GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIII

NUMĂRUL 1. — SEPTEMBRIE 1947

SUMARUL

1. Lista membrilor Societăţii „Gazeta Matematică".
2. Membrii decedaţi.
3. Asupra amortizării împrumuturilor. . *Victor V. Mehedincu.*
4. Concursul „Gazetei Matematice" din 1948.
5. Raport pentru acordarea premiului „General Scarlat Panaitescu" . . . . *Comisiunea pentru premii.*
6. Note matematice: 1—2.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 1342, 4277, 4772, 4993, 5161, 5591, 5924, 6024, 6083.
11. Exerciţii: 1—2.
12. Probleme propuse: 6391—6400.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1947

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea **„Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **N. Georgescu-Roegen**, Licenţiat în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier) şi Ing. **D. Stan** (Locţiitor de casier).

Următoarele şedinţe ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:
Marţi 23 Septembrie ora 18: Adunarea materiei pentru Nr. 2.
Marţi 7 Octombrie ora 18: Facerea copertei pentru Nr. 2.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1947 sunt indicate în tabla de materii a volumului LII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 6391, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 6400.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 - 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *« Gazeta Matematică »* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . „ 150
— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *« Gazetei Matematice »* . . . . . „ 500

GAZETA MATEMATICĂ

GAZETA MATEMATICA

FOAIE LUNARĂ

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL LIII

15 SEPTEMBRIE 1947 — 15 AUGUST 1948

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1947

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ"

DELEGAȚIUNEA SOCIETĂȚII PENTRU ANUL 1947/48 *)

ION S. ANTONIU, N. GEORGESCU ROEGEN și AL. D. BUNESCU (Casier)

PERSONALUL REDACȚIUNII „GAZETA MATEMATICĂ"

GENERAL GH. BUICLIU și N. N. MIHĂILEANU. Membri delegați pentru : cereri, diverse și suplimente.

G. D. SIMIONESCU și O. N. ȚINO. Raportori.

G-L GH. BUICLIU, G-L GH. I. LITEANU și D. V. STOICA. Membri delegați pentru : schimburi de reviste și reclamațiuni privitoare la tipărire.

GENERAL GH. BUICLIU. Membru delegat pentru adunarea, repartizarea și coordonarea materiei de tipărit.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru impr imarea revistei și convocările lunare.

G-L GH. BUICLIU, N. GEORGESCU ROEGEN, TIBERIU POPOVICIU și G-L GR. ZAPAN. (Aritmetica și teoria numerelor) ; COL. M. FOCȘENEANU, ȘERBAN GHEORGHIU, N. N. MIHĂILEANU, AL. PANTAZI, G. D. SIMIONESCU și AUREL STAN. (Geometria) ; I. S. ANTONIU, V. CLAUDIAN, C. IONESCU ȚIU și G-L G. I. LITEANU. (Trigonometria) ; TH. ANGHELUȚĂ, N. GEORGESCU ROEGEN, D. V. IONESCU și C. IONESCU-BUJOR. (Algebra) ; AL. STOENESCU, GABRIELA ȚIȚEICA și V. VÂLCOVICI. (Mecanica) ; I. I. CHIȚULESCU, AD. GHEORGHIU și AL. PANTAZI. (Descriptivă și Perspectivă) ; N. I. CIORĂNESCU, GH. TH. GHEORGHIU și MIRON NICOLESCU. (Analiza și Teoria Funcțiilor) ; COL. E. ST. IACOB, V. MARIAN și P. SERGESCU. (Istoria și Filosofia Matematică) ; N. GEORGESCU ROEGEN, GH. MIHOC și O. ONICESCU. (Calculul Probabilităților) ; I. S. ANTONIU, C. BUDEANU, S. ȚIȚEICA și T. VESCAN. (Fizica matematică și electricitatea) ; C. V. COSTĂCHESCU și C. ORĂȘANU. (Astronomie și cosmografie) ; G-L ST. BURILEANU și COL. M. FOCȘENEANU. (Balistica) ; D. STAN și C. C. TEODORESCU. (Rezistența materialelor) ; membrii delegați pentru revederea și redijarea articolelor, notelor și problemelor propuse de corespondenți.

GH. TH. GHEORGHIU, D. MANGERON, N. N. MIHĂILEANU, I. I. STAMATE și GABRIELA ȚIȚEICA. Delegați pentru chestiuni de examen.

V. CLAUDIAN și C. IONESCU-BUJOR. Delegați pentru Probleme propuse.

G-L GH. BUICLIU, și C. IONESCU-ȚIU. Delegați pentru exerciții.

MARIANA BRATU, ANA IOAN și G-L GH. BUICLIU. Delegați pentru întocmirea Tablei de materii.

ANA IOAN, C. IONESCU-ȚIU și N. N. MIHĂILEANU. Delegați pentru corecturi.

C. IONESCU-ȚIU, bibliotecar.

AURELIAN IACOVACHE, bibliotecar și administrator la *„Casa de citire* I. IONESCU" din Str. Răsuri Nr. 25.

*) Societatea este administrată și reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri și un casier (Art. 14 din Statute).

MEMBRII

1	1945, Febr. 19	ADAM MIRCEA. Inginer. Str. Ţepeş Vodă Nr. 86. Bucureşti.
2	1947, Febr. 17	AGÂRBICEANU IOAN. Inginer. Str. Nic. Golescu, 5. Bucureşti 3.
3	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Traian Lalescu, 1. Timişoara.
4	1946, Aug. 26	ALBESCU C. NICOLAE. Profesor. Str. Aurel Vlaicu, 166, Bucureşti.
5	1937, Aug. 27	ALDEA N. N. Licenţiat în Matematici. — Str. Matei Voevod, 65. Bucureşti 4.
6	1945, Dec. 3	ALEXANDRESCU OCTAV. Profesor Şcoala Normală din Constanţa. B-dul Domniţa Ileana, 1. Constanţa.
7	1938, Febr. 17	ALEXIU IULIAN. Inginer constructor. Licenţiat în Ştiinţe Matematice. Str. Mihail Cornea, 41. Bucureşti 2.
8	1947, Iunie 10	ALMĂJANU PETRE. Maior. Licenţiat matematici. — Str. Maria Ghiculeasa, 2. Parcul Tei, Bucureşti.
9	1943, Febr. 18	AMĂRĂŞTEANU F. MARCEL. Inginer Constructor. Calea Împăratul Traian 11. Craiova.
10	1940, Aug. 28	ANDONIE GH. Inginer de mine. — Profesor Politehnica din Bucureşti. Str. Braziliei, 18. Bucureşti 3. Telefon 2.41.30.
11	1946, Febr. 18	ANDREI ŞTEFAN. Inginer, Str. Vasile Lascăr, 23. Bucureşti. 1.
12	1940, Febr. 8	ANDRONESCU PLAUTIUS. Doctor-Inginer. — Prof. Şcoala Politehnică, Timişoara.
13	1921, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii „Regele Ferdinand I". Cluj.
14	1946, Febr. 18	ANIŢESCU NICOLAIE. Prof. Lic. T. Vladimirescu, Tg. Jiu. Str. Victoriei, 54. Tg. Jiu.
15	1945, Dec. 3	ANTONESCU FILOFTEIA. Licenţiată în matematici. Profesoară. Str. Ismail, 30. Bucureşti, IV.
16	1934, Febr. 21	ANTONIU CORNELIU. Inginer Inspector General. — Profesor la Politehnica „Gh. Asachi". — Str. Ştirbei Vodă, 29*a* Bucureşti. Tel. 5.71.10.
17	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer electromecanic, diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer electrician, diplomat al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Şeful departamentului de studii şi proecte al Societăţii Generale de Gaz şi Electricitate din Bucureşti. — Calea Floreasca, 150. (Telefon 2.94.37). III.
18	1947 Febr. 24	APĂTEANU CAMIL. Inginer. Str. Cometa 36, Bucureşti, 3.
19	1931, Mart. 11	ARGHIRIADE EM. Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
20	1945, Dec. 3	ARMEAN ION. Profesor Lic. Gh. Lazăr, Sibiu. Str. Tribunei, 7. Sibiu.
21	1935, Febr. 13	ARMEANCA IOAN. Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Cluj. Str. Regală, 109. Cluj.
22	1946, Febr. 18	ATANASIU MARCEL A. D. Inginer C. F. R. Asistent Politehnica Bucureşti. Calea Griviţei, 158. Bucureşti, II.

*) Data admiterii.

23	1947, Febr. 17	AUGUSTIN MATEI. Profesor Licenţiat în Matematici. Str. Gh. Dima Nr. 4. Cluj.
24	1947, Febr. 17	AVRAM N. CONSTANTIN. Inginer. Str. Hagi Ghiţă, 10. Bucureşti, II.
25	1941, Iunie 5	AVRAMESCU AUREL. Doctor-Inginer, — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — Str. Sft. Constantin, 24. Bucureşti 1. Tel. 5.21.41.
26	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. Str. Barbu Delavrancea, 51. Bucureşti 2. Telefon 7.56.33.
27	1946, Aug. 26	BĂDESCU EM. AUREL. Maior. Str. B. P. Haşdeu Nr. 33. Bucureşti, 6.
28	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer. — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — B-dul Jianu 38 Bucureşti, 2. Telefon 7.38.42.
29	1936, Febr. 27	BĂDESCU RADU. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Calea Dorobanţilor Nr. 232, Bucureşti 3. Telefon 7.35.86.
30	1942, Aug. 27	BĂDULESCU ALEXANDRA. Licenţiată în Matematici. — Profesoară la Liceul din Târgul-Ocna.
31	1945, Dec. 3	BĂDULESCU I. VASILE. Licenţiat în matematici. Profesor Lic. Aurel Vlaicu, Bucureşti. Aleea Carmen-Sylva, 6. Bucureşti 1.
32	1947, Febr. 17	BĂIATU DUMITRU. Inginer-Profesor. Str. Paris, 32. Bucureşti 3.
33	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Avenida de Mayo, 560. Republica Argentina.
34	1940, Aug. 28	BĂLAN G. ŞTEFAN. Doctor Inginer. — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. Str. Negel, 59, Bucureşti 6. Telefon 4.83.76.
35	1941, Sept. 18	BALLAN EUGEN. Inginer şi Licenţiat în Matematici. — Secretar General la Ministerul de Finanţe. — Str. Brezoianu, 29 (Alee). Telefon 471.84. Bucureşti 1.
36	1946 Febr. 18	BARAN FRANCISC. Inginer. Str. Nicolae Iorga No. 31. Dărmăroaia, Bucureşti.
37	1945, Dec. 3	BARBĂLAT B. Profesor. Str. Popa Petre, 25. Bucureşti.
38	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe. — Str. Carol Davila, 8. Bucureşti 6.
39	1947, Febr. 17	BĂRBULESCU MIHAIL. Inginer. Str. Sărindar 9, et. 2 Bucureşti 1.
40	1944, Febr. 9	BAZACOV GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Traian, Turnu-Severin. — Str. Adrian 119. Turnu-Severin.
41	1947, Febr. 24	BELEŞ E. IOAN. Inginer. Str. Crăiţelor, 5. Bucureşti 6.
42	1947, Iunie 10	BENEŞ ION. Lt.-Colonel. Str. Dr. Severeanu, 30. Bucureşti, 6.
43	1940, Febr. 8	BENEŞ PAUL. Licenţiat în Matematici. — Profesor Secundar. — Str. Vaporul lui Asan, 13. Bucureşti, 3. Telefon 2.93.90.
44	1945, Dec. 3	BERCOVICI MARTIN. Inginer. Subdirector G-ral Soc. Gaz şi Electricitate. Str. Heleşteului No. 14. (Parc. Jianu). Bucureşt i
45	1947, Iunie 10	BODNĂRESCU HORIA. Inginer. Str. Londra, 47. Bucureşti, 3.
46	1946, Dec. 9	BOIANGIU D. D. Inginer. Str. Oraţiu, 15. Turnu-Severin.
47	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer S. N. P. S.. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Director General al Soc. „Uzinele Chimice Române". — Str. Basarabia, 49. Bucureşti, 2.

48	1947, Aug. 26	BORNEMISA MIRCEA. Inginer. Str. Cartelului, 94. Braşov.
49	1947, Aug. 26	BOROIANU EMIL. Inginer. Str. Mareşal Averescu, 26. Braşov.
50	1947, Febr. 17	BORŞ C. Profesor Licenţiat în Matematici. Str. Petru Rareş, 83. Piatra Neamţ.
51	1938, Febr. 17	BOTEA G. EMIL. Inginer şef. Aleea Alexandru, 11. Bucureşti 3. Telefon 2.67.66.
52	1945, Dec. 3	BOTEZ GUSTAV. Licenţiat. Profesor Lic. Matei Basarab. Str. Vasile Lascăr, 154. Bucureşti, 3.
53	1935 Aug. 22	BOTEZ ST. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Politehnica „Gh. Asachi". — Str. Gh. Asachi, 7. Iaşi.
54	1945, Dec. 3	BRATU I. MARIANA. Licenţiată în matematici. Profesoară Lic. Aurel Vlaicu. B-dul Schitu Măgureanu. 17. Bucureşti 1. Telefon 5.58.23.
55	1926, Iunie 28	BRENNER M. AVRAM. Inginer. — Viitorului, 22. Bucureşti, 3.
56	1935, Noem. 7	BUCURESCU I. Lt. C-dor. Licenţiat în Matematici. — Inginer. — Str. Aviator Th. Iliescu, 31. Telefon 239.96. Bucureşti, 3.
57	1920, Ian. 10	BUDEANU I. C. Inginer. Profesor la Politehnica din Bucureşti. Str. Washington, 32. Bucureşti 3.
58	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. General de Divizie în rezervă. Str. M. Kogălniceanu, 10. Bucureşti 2.
59	1938, Mai 9	BUJOREANU N. Inginer Inspector General. — Directorul Podurilor C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
60	1924, Ian. 30	BUNESCU D. ALEXANDRU. Inginer. — Str. Arcului 26. Bucureşti 1. Telefon 1.13.57.
61	1943, Aug. 26	BUNESCU D. EUGEN. Inginer. — Str. Argentina, 50. Bucureşti, 3.
62	1930, Aug. 31	BUNGESCU ION. G-ral de Artilerie. Str. Franzelari, 19. Bucureşti, 3. Telefon 2.67.57.
63	1920, Ian 10	BURADESCU TRAIAN. Inginer Inspector General. Director C. F. R. — Str. Lăzureanu, 48, Bucureşti 6. Telefon 4.62.59.
64	1939, Aug. 31	BURILEANU ŞTEFAN. General de Divizie în rezervă. Licenţiat şi Doctor în Matematici dela Paris. — Str. General Berthelot, 95. Telefon 4.39.83. Bucureşti, 2.
65	1930, Aug. 31	BUŞILĂ ADRIAN. Inginer-Şef. Str. Vaselor, 40 Bis. Bucureşti 4.
66	1947, Febr. 17	CĂLINESCU VALENTIN. Inginer. Str. Rădăuţi, 12. Ap. 6. Bucureşti, V.
67	1947, Febr. 17	CĂLNICEANU GH. Inginer. Str. C. Sandu Aldea, 63. Bucureşti, II.
68	1947, Febr. 17	CÂMBUREANU V. AUREL. Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti, II.
69	1926, Iulie 28	CAMBUREANU V. D. Inginer-Şef. — Director General, Direcţiunea Generală a Drumurilor. — Str. Simonide, 3. Bucureşti 6. Tel. 5.30.55.
70	1914, Iulie 12	CAMBUREANU V. V. Inginer Inspector General. — Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2. Telefon 7.41.88.
71	1947, Aug. 26	CÂMPEANU OCTAV. Inginer. Str. Canal Timiş, 4. Braşov.
72	1946, Aug. 26	CANCIU GH. Profesor. Str. Stănică Marin, 22. Ploeşti.
73	1947, Febr. 17	CANTUNIAR IOAN. Inginer. Profesor. Str. Paris, 57 B. Bucureşti, 3.
74	1921, Noem. 4	CAPRIEL I. Inginer-Şef. Str. Cometa, 33. Bucureşti 3. Telefon 2.11.96.

75	1942, Aug. 27	CARACOSTEA D. ANDREI. Inginer. — Inspector ajutor în Direcţiunea de Poduri C.F.R. — B-dul Lascăr Catargiu, 28. Bucureşti 3. Telef. 2.28.12.
76	1946, Febr. 18	CARACUDOVICI ST. FLORICA. Profesoară. — Str. Petre Liciu, 22. Bucureşti 3.
77	1936, Noem. 7	CARAFOLI ELIE. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Vasile Conta, 3. Bucureşti 3.
78	1920, Mart. 1	CARAMAN EMIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. General Berthelot, 81. Galaţi.
79	1944, Febr. 9	CARANFIL G. NICOLAE. Inginer. — Aleia Modrogan, 17. Bucureşti 3.
80	1944, Febr. 16	CÂRLĂNESCU C. Licenţiat în Matematici. — Profesor Secundar. Calea Dudeşti, 102. Bucureşti 4.
81	1936, Febr. 27	CARTIANU GH. Inginer. — Asistent la Politehnica din Bucureşti. Antreprenor. — Intrarea Tudor Ştefan, 4. Bucureşti 2. Tel. 2.97.16.
82	1928, Aug. 29	CASSIAN GH. General de Artilerie în rezervă. — Str. G-ral Ipătescu, 20. Bucureşti 4. Telefon 1.05.82.
83	1920, Ian. 10	CAZACU N. C. Inginer-Şef. — Str. G-ral Angelescu, 44. Bucureşti 2.
84	1939, Aug. 31	CAZANACLI V. PETRE, Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. Str. I. C. Brătianu, 50. Craiova.
85	1945, Aug. 27	CEAUŞESCU F. VASILE. Locot. Inginer. Intrarea Popa Nan Nr. 5 B. Bucureşti 4.
86	1945, Febr. 19	CETĂŢEANU STELIAN. Inginer Constructor. Calea Şerban Vodă, 108. Bucureşti 5.
87	1945, Dec. 3	CHELEŞ EUGEN. Licenţiat în matematici. Str. Ing. I. D. Teodoru No. 37 bis Bucureşti 2.
88	1935, Apr. 10	CHIRICESCU V. Inginer în Regia Autonomă C.F.R. Str. Italiană, Bucureşti 30. 1. Telefon 2.54.95.
89	1914, Dec. 20	CHIRICUŢĂ A. Inginer. Str. Marin Serghiescu Nr. 6. Telef. 2-3729. Bucureşti 3.
90	1920, Mart. 1	CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer Inspector General în Direcţia Generală C. F. R. — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti 4. Str. Iancu Căpitanu 44. Tel. 2-4318.
91	1921, Febr. 5	CIOC M. Inginer. — Antreprenor de lucrări publice şi particulare. Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1. Telefon 3.58.51.
92	1930, Aug. 31	CIORĂNESCU NICOLAE. Doctor în Matematici din Paris. Licenţiat în Fizico-Chimice. — Profesor Şcoala Politehnică. — Stradela Bucovina, 7. Bucureşti 2. Telefon 3.51.46.
93	1947, Febr. 17	CIULONESCU ION. Inginer. Str. Pasteur, 48. Bucureşti VI.
94	1939, Dec. 7	CLAUDIAN VIRGIL. Licenţiat în Matematici al Universităţii din Bucureşti. — Directorul Liceului „Mihai Viteazul" din Bucureşti. B-dul Pache, 72. Bucureşti IV.
95	1946, Aug. 26	CLIMESCU ALEXANDRU. Profesor. Şcoala Politehnică Iaşi.
96	1945, Dec. 3	COATU CONSTANTIN. Inginer. — Licenţiat în matematici. — Str. Apolodor, 26. Et. III. Bucureşti 1.
97	1933, Aug. 31	CONSTANTINESCU GEORGE. Inginer diplomat al S. P. B. Director General. — Str. N. Iorga, 22. Bucureşti 3. Telefon 4.61.12.

98	1938, Aug. 31	CONSTANTINESCU G. G. Doctor în Matematici. — Str. Radu dela Afumaţi 71, ap. 3. Bucureşti.
99	1947, Febr. 17	CONSTANTINESCU N. N. Inginer. Str. Finlanda, 6 B. Bucureşti 3.
100	1947, Febr. 17	CONSTANTINESCU PAULINA. Licenţiată în Matematici. Str. Miron Costin, 9. Bucureşti 2.
101	1947, Aug. 26	CONSTANTINESCU I. VICTOR. Inginer. Str. Dr. Baiulescu, 15. Braşov.
102	1895,Sept.15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General. Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3. Telefon 7.09.67.
103	1932, Apr. 20	CONSTANTINESCU ZAHARIA. Inginer. Str. Gh. Popescu, 1. Bucureşti 6. Telefon 4.67.54.
104	1936, Febr. 27	COŞEREANU ION. Inginer la Uzinele I. A. R. din Braşov. Str. Mihail Eminescu, 17. Braşov.
105	1947, Febr. 17	COSTACHE NICOLAE. Inginer. B-dul Lascăr Catargiu, 46. Bucureşti 3.
106	1941, Febr. 20	COSTĂCHESCU V. CONSTANTIN. Lt.-C-dor. — Căpitan de lungă cursă.—Str. Călăraşi 57. Constanţa.
107	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer. — Str. Polonă, 57. Bucureşti 3. Telefon 1.16.16.
108	1947, Aug. 26	CRĂCIUN VASILE. Inginer. Str. Matei Basarab, 15. Braşov.
109	1939, Dec. 7	CRĂCIUNEANU CONST. C-dor-Ing. — B-dul Mărăşti, 47. Bucureşti 2. Telefon 7.48.37.
110	1946, Aug. 26	CRĂCIUNESCU MIOARA. Profesoară. — Şoseaua Giurgiului, 5. Bucureşti. Cart. Şerban Vodă.
111	1945, Dec. 3	CREANGĂ IOAN. Profesor la Politehnica Gh. Asachi Iaşi.
112	1947, Iunie 10	CRISTEA D. EFTIMIE. Inginer. Str. Turda, 104. Bucureşti, 2.
113	1936, Aug. 25	DĂSCĂLESCU HR. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Liceul Ferdinand Str. Principele Ferdinand 35. R.-Sărat.
114	1947, Iunie 10	DIACONESCU V. CONST. G-ral Divizie. Str. Mihai Vodă, 55. Bucureşti, I.
115	1946, Febr. 18	DIACONESCU ION. Licenţiat în matematici. — Profesor Lic. Comercial Regele Carol I. — Str. Arhitect Mincu, 9. Bucureşti, II.
116	1941, Iunie 5	DINESCU P. ALEX. TUDOR. Inginer Constructor. Str. Eufrosina Poteca, 5. Bucureşti 4. Telefon 0.83.38.
117	1947, Aug. 26	DINESCU MARIA. Profesoară, Liceul Mihai Viteazul. Şoseaua Vitan, 127. Alee. Bucureşti.
118	1939, Febr. 23	DOBRESCU ANDREI. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Nerva Traian, 36. Bucureşti 5.
119	1939, Aug. 31	DOBRESCU D. PAUL. Locot. Inginer. Str. Bisericii, 4. Bucureşti 2.
120	1945, Aug. 27	DONCIU NICOLAE. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Colegiul Naţional Militar „N. Filipescu". Predeal.
121	1947, Aug. 26	DRAGOMIR N. IOAN. Inginer. Str. Regina Maria, 48. Braşov.
122	1939, Dec. 7	DRAGOMIRESCU-BUZNE EDUARD. Lt.-Col. de Artilerie.— Profesor. Str. General Anghelescu, 159. Bucureşti, 2. Tel. 5.34.90.

*) Data fondării revistei „*Gazeta Matematică*". Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

123 | 1946, Febr. 18 | DRĂNICEANU EUGENIA. Profesoară la Politehnica Gh. Asachi. Iaşi. Str. Leonida Varnali, 15. Bucureşti.

124 | 1936, Febr. 27 | DROSESCU GH. ION. Inginer mecanic. — Director al Uzinelor Astra şi Union. — Str. Belgrad, 2. Bucureşti 3. Telefon 2.21.09.

125 | 1922, Mart. 1 | DUMITRESCU ARG. D. Inginer-Şef, — Inspector tehnic C. F. R. — Str. Principele Nicolae, 32. Craiova.

126 | 1922, Noem. 1 | DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor Colegiul Naţional Sf. Sava. — Str. Sf. Elefterie, 52. Bucureşti, 6. Telefon 3.72.51.

127 | 1936, Febr. 27 | DUMITRESCU C. I. Inginer Electromecanic dela S. P. B. — Asistent la „Rezistenţa Materialelor" la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Calea Victoriei 139. Telefon 5.91.09.

128 | 1947, Febr. 17 | DUMITRESCU NICOLAE. Inginer. Str. Eugenia, 16. Bucureşti 2.

129 | 1945, Dec. 3 | DUMITRESCU I. TH. Licenţiat în matematici. Inginer chimist. Str. General Leca, 41. Bucureşti V. Telefon. 5.92.65.

130 | 1918, Ian. 28 | FELIX CORNELIU. General de Brigadă în rezervă. — Şos. Ştefan cel Mare, 218. Bucureşti 1.

131 | 1945, Dec. 3 | FLEXI CUŞUŢĂ SOFIA. Profesoară. Str. Adrian, 30. Bucureşti VI.

132 | 1947, Aug. 26 | FLOREA INOCENŢIU. Inginer. Str. Voevozilor, 8. Braşov.

133 | 1935, Apr. 10 | FLORESCU M. ULPIU. Inginer constructor S. P. B.. — Asistent la Politehnica Bucureşti. — Str. Vaselor, 28. Bucureşti 4. Telefon 2.52.36.

134 | 1946, Febr. 18 | FOCŞA VLADIMIR. Inginer. Şef de Serviciu C. F. R. — Str. Gr. Alexandrescu, 78 et. I. Bucureşti 3.

135 | 1929, Ian. 31 | FOCŞENEANU I. MIHAIL. Lt.-Col. de Artilerie. — Licenţiat în Matematici. — Str. Porumbaru, 33. Bloc C. Etaj III. Telefon 7.15.83. Bucureşti 3.

136 | 1946, Febr. 18 | FRÂNCU DUMITRU. Licenţiat în matematici. — Profesor Secundar. — Str. Lt. Niculescu Bazar, 17. Bucureşti.

137 | 1947, Aug. 26 | FUEREA CONSTANTIN. Inginer. Piaţa Unirei, 1. Braşov.

138 | 1921, Mai 4 | GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Calea Victoriei, 70. Bucureşti, 1.

139 | 1943 Aug. 26 | GAFENCU RODICA. Licenţiată în Matematici. — Profesoară. — Str. Unirei. Buzău.

140 | 1947, Aug. 26 | GĂINĂ GH. Inginer. Str. Episcop Safta, 67. Braşov.

141 | 1946, Aug. 26 | GAIU NICOLAE. Profesor. Colegiul „Nicolae Filipescu", Predeal.

142 | 1946, Febr. 18 | GALBURĂ GHEORGHE. Doctor în matematici. Asistent la Universitate. — Str. Rozelor, 9. Bucureşti 6.

143 | 1914, Dec. 20 | GÂLCĂ I. TOMA. Inginer. — Str. Wilson, 15. Etaj II, apart. 7. Bucureşti 1. Tel. 3.48.13.

144 | 1947, Iunie 10 | GALL ST. TRAIAN. Inginer. Str. Dr. Teohari, 15. Bucureşti, 6.

145 | 1944, Mai 8 | GEORGESCU CALIPSO. Licenţiată în Matematici. — Profesoară. — Str. Vasile Stroescu 10. Bucureşti 4.

146 | 1947, Aug. 26 | GEORGESCU CONST. Inginer. Str. Lapedat, 30. Braşov.

147 | 1906, Mart. 4 | GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General. — Str. Gh. D. Palade, 35. Bucureşti 3.

148	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. NICOLAE. Inginer Inspector General. — Director Fab. de Chibrite. — Str. Şos. Jianu, 70. Bucureşti 2.
149	1927, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici.Str. Bitolia, 5. Bucureşti 3.
150	1939, Dec. 7	GEORGESCU-ROEGEN OTILIA. Licenţiată în Matematici.—Profesoară secundară. — Str. Bitolia, 5. Bucureşti 3. Tel. 2.03.03.
151	1945, Dec. 3	GEREANU ANA. Licenţiată în matematici. — Str. Locot. C. Ionescu-Baican, 58. Bucureşti 4.
152	1939, Dec. 7	GERMANI DIONISIE. Profesor la Politehnica din Bucureşti. Str. Paris, 45. Bucureşti 3. Tel. 2-1162.
153	1947, Febr. 17	GHENEA ALEXANDRU. Inginer. Parcul Delavrancea, Aleea C. Nr. 2. Bucureşti, 2.
154	1938, Aug. 31	GHEORGHIEŞ AL. General de divizie în rezervă. Str. Mântuleasa, 5. Bucureşti 4.
155	1936, Febr 27	GHEORGHIU C. ADR. Licenţiat în Matematici. Arhitect. — Str. Turda, 209. Bucureşti 2.
156	1941, Iunie 5	GHEORGHIU ALEXANDRU. Inginer constructor. — Asistent la Şcoală Politehnică. — Calea Victoriei, 128. Bucureşti 1. Tel. 4-6580.
157	1932. Apr. 20	GHEORGHIU TH. GH. Doctor în Matematici. — Profesor Şcoala Politehnică Timişoara.
158	1914, Ian. 8	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. — Profesor Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Piaţa Lahovary, 3. Bucureşti 3. Tel. 2.95.18.
159	1929, Aug. 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în Matematici şi diplomat al Institutului de Statistică din Paris. — Subdirector general al Institutului Central de Statistică. Str. Av. Iliescu, 44. Bucureşti 3.
160	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Str. Lalescu, 3. Timişoara, 3.
161	1947, Aug. 26	GHIA P. HORIA. Str. Regina Maria, 31. Braşov.
162	1942, Febr. 19	GHICA AL. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Aleea Alexandru, 16. Bucureşti 3.
163	1921, Mai 4	GHIMUŞ D. AL. Col., Inginer Radio-electrician. E. S. E. (Paris). — Str. Chişinău, 12. Bucureşti 2. Telef. 5.45.47.
164	1947, Febr. 17	GHIOCEL VASILE. Inginer. Str. Dr. Ghiulamila, 27. Bucureşti 6.
165	1939, Febr 23	GHIRCOIAŞU V. N. Licenţiat în Matematici. — Asistent universitar la Facultatea de Ştiinţe. — Str. Mico 40. Cluj.
166	1936, Aug 25	GHIŞOIU I. PETRE. Inginer. Str. Răspântiilor, 17. Bucureşti 3. Telef. 2.75.74.
167	1942, Aug. 27	GHIŢESCU SPIRIDON. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Str. Al. Constantinescu, 1. Parcul Domeniilor, Bucureşti 2. Telefon 7.12.32.
168	1931, Mart 11	GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Dr. Ioan Meşotă" din Braşov. — Str. Dorobanţilor, 5. Braşov.
169	1910, Iunie 21	GRIGORESCU C. Inginer. Antreprenor de lucrări publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4. Telef. 4-7828.
170	1945, Dec. 3	GROSU ION. Inginer. — Licenţiat în matematici. — Director General al Uzinelor I. A. R. — Str. Momuleanu, 27. Bucureşti.

171	1941, Iunie 5	GUȚU ION. Inginer constructor. — Inginer în Direcția Podurilor C. F. R. — Str. Vișinilor, 2. București 4. Tel. 4.47.95.
172	1947, Aug. 26	HÂNCU MIRCEA. Inginer. Str. M. Eminescu, 16. Brașov.
173	1927, Ian. 28	HANGANU M. D. Doctor-Inginer. — Profesor la Politehnica din București 2. — Șos. Jianu, 56. București. Telef. 7.49.79.
174	1946, Febr. 18	HARET G. SPIRU. Inginer. — Profesor Șc. de subingineri din București. — B-dul Lascăr Catargiu No. 14. București 3.
175	1945, Dec. 3	IACOB CAIUS. Doctor în matematici. — Profesor. Universitatea Cluj.
176	1945, Aug. 27	IACOB ȘT. EUGEN. Lt.-Colonel. — Str. Smârdan, 2 A. Galați.
177	1946, Aug. 26	IACOVACHE AURELIAN. Licențiat în Matematici. Str. Răsuri, 25. București 3.
178	1922, Mai 10	ILIESCU GH. Inginer Inspector General. — Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret. — București 6. Telef. 4-0600.
179	1926, Iunie 28	IOACHIMESCU A. GH. Inginer. Str. Buzești, 74. București 2. Telef. 5.45.31.
180	1945, Dec. 3	IOAN ANA. Licențiată în matematici. — Profesoară și Asistentă. Str. Columb, 10. București 2.
181	1947, Febr. 17	IOAN Z. GHEORGHE. Inginer. Str. Belgrad, 10. București 3.
182	1920, Ian. 10	IOANOVICI AUREL. Inginer. — Antreprenor. — Str. Paris, 28. București 3. Telef. 2.28.10.
183	1945, Dec. 3	IONESCU Z. ALEXANDRU. Licențiat în matematici. — Profesor Lic. Știrbey-Vodă. Str. București, 165. Călărași.
184	1922, Noem. 1	IONESCU V. D. Doctor în Matematici dela Sorbona. — Decan al Facultății de Științe. — Cluj.
185	1946, Febr. 18	IONESCU V. FLORIN. Inginer C. F. R. — Str. Elena Matei Voevod, 7. București 4.
186	1947, Aug. 26	IONESCU GH. Ing. Str. Dr. Toma Ionescu, 11 B. Brașov.
187	1947, Febr. 17	IONESCU I. GH. Inginer. Str. Dr. Toma Ionescu, 13. București 6. Telefon 4.84.96.
188	1936, Febr. 27	IONESCU P. HARALAMBIE. Licențiat în Științele Matematice. — Profesor secundar. — Str. Agricultori, 15. Ap. 13. București 4.
189	1947, Iunie 10	IONESCU C. ION. Dr. Inginer. Str. Ing. Davidescu, 23. București 6.
190	1947, Aug. 26	IONESCU ST. ION. Inginer. Comuna Noua, 47. Oficiul Poștal Dârste. Jud. Brașov.
191	1945, Dec. 3	IONESCU N. MIHAI. Licențiat în matematici. — Profesor Lic. Frații Bugești. Craiova.
192	1941, Febr. 20	IONESCU I. PAUL. Profesor de Matematici la Liceul Comercial „Gh. Chițu".
193	1939, Febr. 23	IONESCU TIBERIU. Licențiat în Matematici. — Inspector școlar. — Calea Rahovei, 40. București 1. Telef. 5.76.88.
194	1947, Febr. 17	IONESCU TEODOR. Inginer. Str. Fitibiliu, 8. București 4.
195	1933, Febr. 22	IONESCU-BUJOR CONSTANTIN. Licențiat în Matematici. — Profesor Asistent Universitar. — Str. Petrescu IX. Nr. 30. București 4.
196	1936, Febr. 27	IONESCU-ȚIU D. C. Maior în rezervă. Inginer constructor. Licențiat în Matematici. — Asistent Universitar. — Calea Griviței, 158. București 2.

197	1932, Apr. 20	IONESCU-ZANE D. GH. Inginer. Str. Fabrica de Chibrituri, 28. Bucureşti 6. Telefon 3.80.70.
198	1946, Febr. 18	IVANCEA I. MIRCEA. Inginer C. F. R. — Subşef de serviciu. Aleea Grand. Str. D No. 11. Bucureşti 2.
199	1929, Ian. 30	KAUFMANN NORBERT. Inginer-Şef. Str. General Manu 26, Bucureşti 2. Telefon 6.17.09.
200	1946, Dec. 9	LASCARIDIS ANASTASE. Inginer. Str. Dionisie, 12. Bucureşti 3.
201	1931, Aug. 28	LAZU CONST. Inginer. Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6. Telef. 3.83.18.
202	1934, Dec. 19	LEONIDA D-TRIE. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Bul. Brâncoveanu, 6. Bucureşti 1. Telef. 4.06.34.
203	1947, Iunie 10	LEOVEANU CONST. Lt.-Colonel. Inginer. Str. Armenească, 14 bis. Bucureşti 3.
204	1921, Mai 4	LITEANU I. GH. General de Corp de Armată în rezervă. — Str. Spătarului, 54. Bucureşti 3. Telefon 2.09.40.
205	1935, Aug. 22	LIVADA F. GRIGORE. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — St. Dr. Mirinescu, 23. Bucureşti 6.
206	1946, Aug. 26	LUCULESCU CONSTANTIN. Inginer. — Str. Vasile Lascar, 27. Bucureşti 1.
207	1945, Dec. 3	MACOVEI ION. Profesor de matematici la Colegiul Naţional „Carol I". Str. Elena Doamna, 38. Craiova.
208	1934, Dec. 19	MALAXA C. ELENA. Licenţiată în Matematici şi Fizico-Chimice. — Profesoară de matematici şi Directoarea Şcolii Centrale de fete din Bucureşti. — Str. General Lahovary, 3. Bucureşti 3.
209	1934, Dec. 19	MALAXA N. Inginer. — Industriaş. — Aleea Alexandru, 38. (Parcul Filipescu). Bucureşti 3. Telef. 7.39.45.
210	1913, Aug. 30	MALCOCI C. Inginer Inspector General. Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3. Telefon 2.54.10.
211	1934, Febr. 21	MANAFU VALERIU. Inginer Str. Basarabiei 47. Bucureşti. Tel. 4.92.66.
212	1947, Febr. 17	MANCIU CORNELIU. Inginer. Str. Romană, 8. Bucureşti, 3.
213	1947, Febr. 17	MANEA GHEORGHE. Inginer. Parcul Jianu. Str. H, 3. Bucureşti 3.
214	1946, Aug. 26	MANGÉRON D. DUMITRU. Profesor. Şcoala Politehnică Iaşi.
215	1947, Febr. 17	MANIŢIU EMILIAN. Inginer. Str. Ana Davila, 22. Bucureşti, 6.
216	1926, Iunie 28	MANOILESCU MIHAIL. Inginer Bd. Dacia, 41. Bucureşti 3.
170	1946, Febr. 25	MANU IOAN. Licenţiat în matematici. — Profesor Şcoala Normală de băieţi — Gherla.
217	1932, Apr. 20	MĂRĂCINE B. Inginer. Str. Dr. Pasteur, 65. Bucureşti 6. Telef. 4.36.37.
218	1947, Febr. 17	MARCU VASILE. General în rezervă. Inginer. Str. 10 Mese, 7. Bucureşti, 4.
219	1947, Aug. 26	MĂRDĂRESCU VLADIMIR. Inginer. Str. Aurel Popovici, 8. Braşov.
220	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef. — Direcţia Generală a Drumurilor. — Intrarea Geneva, 6. Bucureşti 3. Telef. 2.45.84.
221	1939, Dec. 7	MARIAN VICTOR. Doctor în Fizică. Licenţiat în Fizico-Matematici. — Conferenţiar la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Str. Hajdeu, 1. Cluj.

222	1946, Aug. 26	MARINESCU S. DUMITRU. Inginer. — Str. Alexandru II, 15. Ploeşti.
223	1922, Mai 10	MATEESCU CRISTEA. Doctor Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Inginer liber profesionist. — Str. Dorobanţilor, 1. B. (Alee). Bucureşti 3. Telefon 2.25.70.
224	1945, Dec. 3	MATEESCU I. ION. Inginer. — Şef de secţie C. F. R. Şos. Jianu, 3. Bucureşti 3.
225	1943, Aug. 26	MATEESCU DAN. Inginer diplomat. —Politehnica Berlin Strasburg. Inginer la Uzinele Reşiţa. Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Gh. Lazăr, Nr. 5. Reşiţa.
226	1943, Aug. 26	MĂTIEŞ V. ION. Licenţiat în Matematici. Profesor secundar-Cluj. — Str. D-trie Cantemir, 17. Cluj.
227	1944 Aug. 21	MAVRODIN D. DUMITRU. Licenţiat în Matematici. — Asistent la Facultatea de Arhitectură din Bucureşti. — Str. Antim 62. Bucureşti 6.
228	1943, Febr. 18	MEHEDINCU VASILE. Licenţiat în Matematici. Profesor la Liceul Comercial „N. Bălcescu", Str. Alex. Constantinescu, Nr. 24. Parcul Domeniilor. Bucureşti 2.
229	1939, Aug. 31	MEREUŢĂ EM. Licenţiat în Matematici. — Str. Niculescu Bazar, 7. Parcul Iancului. Bucureşti 4. Telef. 5.88.61.
230	1927, Mai 11	MEREUŢĂ V. Inginer. — Subdirector Direcţiunea de Întreţinere C. F. R. — Str. Ştefan Burcuş, 12. Bucureşti 2. Telef. 7.13.91.
231	1939, Dec. 7	MICLESCU ANDREI. Colonel de Artilerie. Licenţiat în Ştiinţele Fizico-chimice şi Drept, brevetat al Şcoalei Superioare de Război din Paris. — Profesor la Şcoala Superioară de Război. — Str. Delea Veche, 15 bis. Bucureşti 4. Tel. 4-3514.
232	1947, Febr. 17	MICLESCU ION. Inginer. Str. Simu, 3. Bucureşti 3.
233	1942, Aug. 27	MIHĂIESCU S. ŞTEFAN. Inginer. Uzinele Metalurgice Concordia. Ploeşti.
234	1945, Dec. 3	MIHĂILĂ N. Licenţiat în matematici. — Profesor Liceul Comercial Carol I. — Str. Av. Sănătescu, 8. Bucureşti 6.
235	1935, Noem. 5	MIHĂILEANU N. N. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Matei Basarab Bucureşti. Asistent la Facultatea de Matematici. Str. Vulturi, 63. Bucureşti 4. Telef. 4-3425.
236	1921, Febr. 5	MIHALOPOL C. Inginer Inspector General. — Splaiul Independenţei, 63. Bucureşti 6. Telef. 4.07.18.
237	1939, Dec. 7	MIHOC GHEORGHE. Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Facultatea de Ştiinţe Bucureşti. Director în Casa Centrală a Asigurărilor Sociale. — Str. Gogu Cantacuzino, 14. Bucureşti 4.
238	1939, Aug. 31	MIHU CERCHEZ. Inginer. — Licenţiat în Ştiinţele Matematice. — Str. Paleologu, 7. Bucureşti. 4.
239	1947, Febr. 17	MINOIU IOAN. Inginer. Str. Sfântu Ştefan, 16. Bucureşti 4.
240	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer. — Inginer-Şef la Societatea „Concordia", Str. Roma, 18. Bucureşti 3. Telef. 2.66.88.
241	1934, Dec. 19	MIRESCU PETRE. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Secr. G-ral Min. Ed. Naţionale. Str. Vasile Conta, Intr. A, ap. 6. Bucureşti 3.

242	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer Inspector General. Licenţiat în Matematici. Piaţa Lahovari, 1 A. Bucureşti 3. Telef. 2.53.43.
243	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Intreprinzător de lucrări publice. — Str. Ciprian Porumbescu, 11. Bucureşti. Telef. 2.45.91.
244	1940, Febr. 8	MIU M. ION. Inginer Constructor. Licenţiat în Matematici. — Str. Mihai Bravu Nr. 160 bis. Bucureşti 4.
245	1947, Febr. 17	MODÂLCĂ GL. EMIL. Inginer. Str. Providenţii, 19. Turnu-Severin.
246	1942, Aug. 26	MOISIL ANA. Inginer. Str. Stupinei, 39. Bucureşti 4.
247	1939, Febr. 23	MORŢUN EMIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „I. C. Brătianu". Piteşti.
248	1947, Febr. 17	NĂCESCU DAN. Inginer. Str. Caragiale, 31. Bucureşti 3.
249	1932, Febr. 21	NEAMŢU PETRE. Inginer. — Str. Roma, 59. Bucureşti 3.
250	1946, Aug. 26	NECULCE EUGENIU. Profesor. Str. Popa Tatu, 61. Bucureşti 2.
251	1947, Iunie 10	NEDELCU FLOREA. Inginer. Str. Iacob Negruţi, 26. Bucureşti 2.
252	1928, Aug. 29	NEGURĂ GR. ST. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Codreanu din Bârlad. — Str. Dobranici, 16. Bârlad.
253	1944, Feb. 9	NEICU MIRCEA. Inginer. Şoseaua Jianu 34. Bucureşti III.
254	1939, Aug. 25	NESTOR D-TRU. Inginer. — Str. Agricultori, 15. Bucureşti 4.
255	1934, Dec. 19	NICOLAU AL. Inginer. — Profesor. Şcoala Politehnică Timişoara. — B-dul T. Ionescu, 22, Bucureşti 3. Telef. 2.12.31.
256	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONSTANTIN. Inginer-Industriaş. Str. Ştefan cel Mare, 44. Piatra Neamţ.
257	1921, Noem. 4	NICOLAU T. M. Inginer Inspector General. — Director al Coordonării în Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. Profesor la Şcoala de Constructori de Lucrări Publice din Bucureşti. — Str. Ecoului, 85. Bucureşti 6. Telef. 3.10.94.
258	1929, Ian. 31	NICOLESCU MIRON. Ministru Subsecretarar de Stat la Ministerul Educaţiei Naţionale. Fost elev al Şc. Normale Superioare din Paris. — Doctor în Ştiinţele Matematice dela Sorbona. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Paris 14. Bucureşti 3. Telef. 2.28.78.
259	1934, Dec. 19	NICOLESCU IOAN RADU. Comandor de Marină în rezervă. Str. Dr. C. Gr. Romniceanu 7. Tel. 5.32.12. Bucureşti 3.
260	1931, Mart. 11	NICULESCU V. ALEX. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Mihail Eminescu" din Bucureşti. — Str. Sabinelor, 119. Bucureşti 6.
261	1947, Aug 26	NICULESCU CONST. Inginer. Str. V. Alexandri, 29. Braşov.
262	1944, Mai 8	NOVACU VALER. Licenţiat în Matematici. Doctor în fizică. — Şef de lucrări la Facultatea de Ştiinţe. — Cluj.
263	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe. — Str. Rozelor, 9. Bucureşti 6. Tel. 3.48.85.
264	1945, Dec. 3	ONIGA GH. THEODOR. Inginer. Str. Anton Pan, 16 B. Etaj II. Bucureşti 4.
265	1927, Ian. 28	ORĂNESCU OCTAVIAN. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti (Secţia Electro-Mecanică). — Directorul Docurilor Galaţi. — Str. Bolintineanu, 2. Galaţi.

266	1913, Oct. 7	ORĂŞANU D. CEZAR. Inginer. — Licenţiat în Matematici. Profesor de Topografie şi Geodezie. — Str. Sfinţii Voevozi, 9. Bucureşti 2. Telef. 3.47.11.
267	1910, Mai 21	ORĂŞANU GR. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Popa Nan, 19. Bucureşti 4. Telef. 4.32.48.
268	1942, Aug. 27	PANAITE N. THEODOR. Maior, Inginer. Str. Dr Marcovici, 2. Bucureşti 1.
269	1929, Ian. 21	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. Actuar-expert. Profesor. Str. Prelungirea Negoiului, 16. Bucureşti.
270	1932, Aug. 24	PÂRVU AUREL. Inginer. Licenţiat în Matematici. Str. Dr. Istrate, 44. Bucureşti 5. Telef. 4.45.36.
271	1939, Aug. 31	PĂSĂRICĂ FL. Licenţiat în Matematici. Splaiul Independenţei, 56. Bucureşti 6. Telef. 5.18.20.
272	1945, Dec. 3	PĂTRAŞCU A. GHEORGHE. Inginer. Profesor Şcoala Subingineri. Str. Av. Gh. Mărăşoiu, 18. Bucureşti 3.
273	1945, Dec. 3	PĂTROIANU MIHAIL. Inginer. Licenţiat în matematici. Str. Calomfirescu, 6. Bucureşti 1.
274	1939, Dec. 7	PAVEL DORIN. Doctor-Inginer. — Profesor la Politehnica Bucureşti. — Str. Dr. Severeanu, 26. Bucureşti 6. Telef. 6.12.52.
275	1941, Iunie 5	PERLEA G. DAN. Inginer C. F. R. — Str. Dr. Severeanu, 8. Bucureşti 6. Telef. 3.61.56.
276	1939, Dec. 7	PERSU AUREL. Inginer. — Conferenţiar la Politehnica Bucureşti. — Calea Victoriei, 159. Bucureşti 1. Telef. 3.22.31.
277	1939, Dec. 7	PETRESCU S. GHEORGHE. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Şef de lucrări la Observatorul din Bucureşti. — Str. Tutunari, 38. Bucureşti 6.
278	1945, Aug. 27	PETRESCU IULIAN. Licenţiat în matematici. — Asistent universitar. Str. Inişor, 4. Bucureşti 4.
279	1940, Aug. 28	PETRESCU PETRE. Lt.-Col. rez. din Artilerie.—Str. Roma (Intrarea Roma, 5). Bucureşti 3. Telef. 2.03.91.
280	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. Bucureşti 5.
281	1945, Dec. 3	POP ALEXANDRU. Licenţiat în matematici. — Profesor Lic. Comercial „Regele Mihai I". Str. Episcopul Ilarion, 28. Bucureşti, 4.
282	1946, Dec. 9	POPA I. MARIN. Licenţiat în matematici. B-dul Al. Cuza, 20. Bucureşti 2.
283	1936, Febr. 18	POPESCU N. CORNELIU. Licenţiat în matematici.— Profesor. Fundătura Mănciulescu, 2. Roşiorii de Vede. Teleorman.
284	1939, Dec. 7	POPESCU M. IOAN. Licenţiat în Matematici. Col. de Artilerie Comandantul Reg., 1 Art. Antiaer. Str. Dr. C. Severeanu, 23. Bucureşti 6. Telefon 4.19.77.
285	1945, Dec. 3	POPESCU OVIDIU. Licenţiat în matematici. Profesor secundar. Referent C. A. M. — Str. Stupinei, 34, scara C. ap. 1. Bucureşti 4.
286	1935, Apr. 10	POPESCU A. VICTOR. Inginer. Conferenţiar Politehnica Str. Comandor E. Botez, 12. Bucureşti 3. Telef. 2.38.30.
287	1934, Dec. 19	POPESCU-BOTOŞANI G. Inginer electromecanic. Str. General Berthelot, 65. Bucureşti 2.

287	1947, Febr. 17	POPOVICI C. CONSTANTIN. Inginer. Str. Dionisie Lupu, 12. Bucureşti 1. Tel. 2.84.79.
288	1944, Febr. 9	POPOVICI C. GH. CONST. Inginer. Piaţa Lahovari 1 A. Bucureşti 3. Telef. 2.76.30.
289	1946, Febr. 18	POPOVICIU I. GAVRIL. Inginer Str. Virgil Pleşoianu, 53. Bucureşti 2. Telef. 7.47.37.
290	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Matematici. — Profesor Universitatea din Cluj.
291	1947, Febr. 17	POPP ALEXANDRU. Inginer. Str. Popa Petre, 41. Bucureşti 3.
292	1931, Mart. 11	POPP N. Comandor — Inginer. — Str. Viitor, 16. Bucureşti 3. Telef. 2.65.72.
293	1927, Mai 11	POPP I. TRAIAN. Licenţiat în Matematici. — Inspector general didactic, Min. de Război. — Profesor la Colegiul Naţional „Sf. Sava". — Str. Clucerului, 10. Bucureşti 2. Tel. 7-1125.
294	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAIL. Inginer-Antreprenor. Şoseaua N. Titulescu. Intr. Tighina, 11. Bucureşti 2. Telef. 3.58.52.
295	1945, Dec. 3	POSTELNICESCU MIRCEA. Inginer. Uzina electrică Griviţa C. F. R. Str. Dr. Demostene, 9. Bucureşti 6.
296	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. General de Divizie. — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
297	1935, Apr. 10	PRAPORGESCU N. Licenţiat în Matematici. Actuar expert. Str. Aviator Sănătescu, 28. Bucureşti 2. Telef. 7.46.00.
298	1945, Dec. 3	PREDOIESCU M. TRAIAN. Licenţiat în matematici. — Profesor Gimnaziul Comercial Regele Ferdinand I. — Str. Eroina dela Jiu No. 14. Bucureşti 6.
299	1944, Febr. 9	PROFIRI N. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — B-dul Elisabeta 24. Bucureşti 1. Telef. 3.25.91.
300	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. General de Artilerie în rezervă. B-dul Lascăr Catargiu, 16. Bucureşti 3. Telef. 2.49.46.
301	1946, Febr. 18	RĂDULESCU MARCEL. Inginer Str. Horia, 1. Et. 2. Cluj.
302	1947, Febr. 17	RĂDULESCU VLAD. Inginer. Str. Mih. Antonescu, 1. Bucureşti 2.
303	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer S. N. P. S. — Inginer-Consilier în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Gr. Cantacuzino, 59. Bucureşti 2. Telef. 2.82.04.
304	1946, Febr. 18	RIZESCU T. GHEORGHE. Inginer Inspector General. Director General al Uzinelor N. Malaxa. — B-dul Brătianu, 32. Bucureşti 1.
305	1945, Dec. 3	RIZESCU T. ION. Licenţiat în matematici. — Profesor Liceul Mircea cel Bătrân. — Str. Ştefan Mihăileanu, 18. Constanţa.
306	1947, Febr. 17	ROBAN VINTILĂ. Inginer. Str. Armenească, 28 bis. Bucureşti 3.
307	1933, Febr. 22	ROŞU AL. AL. Licenţiat în Matematici. Doctor în Ştiinţele Politico-Economice. — Licenţiat în Drept. — Avocat. — Str. Inginer B. Giulini, 9. Bucureşti 6. Telef. 4.66.32.
308	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer Inspector General. Calea Victoriei, 2. Bucureşti 1. Telef. 3.62.54.
309	1941, Febr. 20	RUZVAN I. THEODOR. Inginer constructor. — Bd. G-ral Traian Moşoiu, 11. Bucureşti 5. Telef. 4.53.91.

310	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. Inginer. — Director General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Cartierul C. A. M. Filaret Str. B. 28. Bucureşti 6. Telef. 5.18.20.
311	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. Str. Frumoasă, 50. Bucureşti.
312	1947, Febr. 17	SAPATINO CONST. Inginer. Str. Th. Masaryk, 21. Bucureşti 4.
313	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer Constructor. — Director General al Societăţii „Clădirea Românească". — Str. Pia Brătianu, 5. Bucureşti 3.
314	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer-Şef. — Direcţia de Studii a Căilor Ferate Române. Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — Str. Columb, 7. Bucureşti 3. Telef. 2.14.30.
315	1944, Febr. 16	SAUR I. Inginer electromecanic. — Inginer Soc. „Seta" Sibiu. Subdirector Ministerul Afaceri Interne. — Str. Ion Maiorescu, 47. Bucureşti 4. Telef. 1.11.98.
316	1947, Aug. 26	SĂVESCU IOAN. Inginer. Str. Castelului, 34. Braşov.
317	1938, Aug. 31	SAVIN C. I. Căpitan. Licenţiat în Matematici. — Str. Dr. Severeanu, 35. Bucureşti 6. Telef. 4.78.02.
318	1947, Febr. 17	SCHILERU GRIGORE. Inginer. Str. Intrarea Romei, 3. Bucureşti 3.
319	1935, Aug. 22	SCHILERU-DILI C. ION. Inginer Şef — Profesor titular Şcoala Politehnică Timişoara. — Str. Ştirbey-Vodă, 65. Bucureşti 2. Telefon 3.41.41.
320	1946, Dec. 9	ŞCODRANU AL. Inginer. Str. Heleşteului, 31. Parcul Jianu. Bucureşti.
321	1945, Dec. 3	ŞERBĂNESCU FLORICEL. Licenţiat în matematici. Actuar şi Asistent la Acad. Comercială. — Str. M. lot. 359. Vatra Luminoasă. — Bucureşti.
322	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer Inspector General. Referent la Consiliul Tehnic Superior. — Str. Paleologul, 3 bis. Bucureşti 4. Telefon 3.46.04.
323	1919, Sept. 12	SERGESCU PETRE. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie. — Rector şi Profesor Politehnica din Bucureşti. Post profesor la Universitatea din Cluj. Membru corespondent al Academiei Române — Calea Plevnei, 56. Bucureşti 2.
324	1921, Febr. 6	SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Facultatea de Arhitectură. Director General Tehnic la Municipiul Bucureşti. — Şos. Kiseleff 25. Bucureşti 2. Telef. 7.10.01.
325	1934, Mai 2	SIMIONESCU D. GH. Licenţiat în Matematici. — Inspector în învăţământul secundar. — B-dul Pache, 99. Corp. VI. Bucureşti 4. Telefon 4.92.49.
326	1940, Aug. 28	SIMIONESCU MIRCEA. Inginer constructor. — Asistent la Politehnica din Bucureşti. — Str. Varşovia, 2. Bucureşti 3. Telefon 2.25.55.
327	1945, Dec. 3	SIRINIAN MENDREY. Licenţiată în matematici. — Profesoară lic. din Constanţa. — Str. Ion Grădişteanu, 17. Constanţa.
328	1941, Iunie 5	ŞLEAHTENEA DUMITRU. Inginer constructor. Diplomat Şcoala Politehnică Bucureşti 928. — Soc. Comunală Locuinţe ieftine Bucureşti. — Parcul Iancului II. Str. Gabrielescu, 5. Bucureşti. Telef. 4.92.13.

329	1910, Aug. 3	SMÂNTÂNESCU AUREL. Inginer Inspector General. Pensionar. Str. Sf. Ştefan, 23. Bucureşti 4.
330	1946, Aug. 26	ŞOVA C. ION. Inginer. — Str. Ion Ghica, 6. Cluj.
331.	1943, Febr. 18	STAMATE I. IONEL. Licenţiat în Matematici. — Asistent la Facultatea de Ştiinţe din Cluj.
332	1933, Aug. 31	STAMATESCU I. GH. Inginer-Şef. Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti 3. Telef. 2.35.75.
333	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Matei Basarab — Str. Toamnei, 47. Bucureşti 3. Telef. 2.16.76.
334	1938, Febr. 17	STAN I. AURELIAN. Lt. Comandor Inginer, diplomat al Politehnicei Bucureşti. Licenţiat în Matematici. Str. Atena, 3. Bucureşti 3. Telefon 5.59.74.
335	1920, Ian. 10	STAN A. D-TRU. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Str. Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4. Telefon 3.84.89.
336	1945, Dec. 3	STAN V. ILIE. Ing. Calea Dorobanţilor 82. Bucureşti 3. Telef. 2.84.08.
337	1941, Iunie 5	STANCU S. MIRCEA. Inginer. — Şef de Şantiere la Soc. Comunală de Locuinţe ieftine. — Calea Şerban Vodă, 272. Bucureşti.
338	1943, Aug. 26	STĂNCULESCU I. ION. Inginer constructor. — Inginer în Adm. Com. P. C. A. Asistent suplinitor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Romană 182. Bucureşti 3.
339	1943, Febr. 18	STĂNCULESCU-ROMAŞCAN GEORGETA. Inginer constructor. — Inginer în M. L. P. C. — Str. Romană 182, Bucureşti 3.
340	1946, Aug. 26	STĂNCULESCU-ROCIU-MARGARETA. Profesoară. Str. Horei, 32. Bucureşti 4.
341	1941, Aug. 28	ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE. Sublocotenent. Ofiţer de Transmisiuni. Instructor la Şcoala de Ofiţeri de Transmisiuni. — Str. Popp de Băseşti, 52. Bucureşti 4.
342	1939, Febr. 23	STOENESCU I. ALEXANDRU. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. Str. Caragea Vodă, 21. Bucureşti 3.
343	1943, Febr. 18	STOICA D. ALEXANDRU. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Str. Eminescu, 27. Bucureşti 2.
344	1934, Mai 2	STOICA V. DUMITRU. Inginer Str. Eminescu, 27. Bucureşti 2. Telefon 7.18.04.
345	1941, Iunie 5	STOIKA V. VICTOR. Inginer Inspector General. — Str. Paris, 12. Bucureşti 3. Telef. 2.03.19.
346	1945, Dec. 3	STOILOV S. Doctor în matematici. — Profesor universitar. — Ambasadorul României la Paris. — Piaţa Roseti, 3. Bucureşti 1.
347	1947, Iunie 10	STRATILESCU GR. IOAN. Inginer — Prof. Str. Dr. Mirinescu, 21. Bucureşti VI.
348	1946, Aug. 26	STUPARU CONSTANTIN. Profesor. — Str. Plevnei, 21. Turnu-Severin
	1947, Aug. 26	SVETENCU ORESTE. Inginer. Str. Vintilă Brătianu, 12. Braşov.
349	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU ARISTIDE General de Artilerie în rezervă. — Str. Frumoasă, 54. Bucureşti 2. Telef. 3.39.31.
350	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Licenţiat în Matematici. Doctor Inginer mecanic. — Profesor Politehnica — Str. Cazărmei, 52. Bucureşti 6. Telef. 4.50.78.

351	1900, Noem. 1	TEODOREANU VASILE. Profesor onorar. Pensionar. — Str. Dionisie, 76. Bucureşti 2.
352	1934, Mai 2	TEODORESCU C. C. Profesor la Politehnica din Bucureşti. Directorul Laboratorului de Rezistenţă şi Incercări de materiale. Calea Griviţei 132. Bucureşti 2. Telefon 3.94,40.
353	1945, Dec. 3	TEODORESCU ST. IOAN. Licenţiat în matematici. Profesor secundar. Referent C. F. R. — Str. Chişinăului, 16. Bucureşti 2.
354	1945, Dec. 3	TEODORESCU D. IOANA. Licenţiată în matematici. — Profesoară la Lic. Carmen-Sylva. — Str. Sandu Aldea, 16. Bucureşti 2.
355	1947, Iunie 10	TEODOR ŞERBAN. Maior — Inginer. Calea Plevnei, 190. Bucureşti 2.
356	1937, Ian. 28	THEODORU G. HENRI. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Intreprinzător de lucrări publice şi particulare. Birou de studii hidraulice. — Str. Alex. Donici, 27. Bucureşti 3. Telefon 2.37.89.
357	1910, Mai 21	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici. — Aleea Matei Corbescu, 8. Bucureşti 1. Telef. 2.73.57.
358	1945, Dec. 3	TILICĂ ŞTEFAN. Locot. de Geniu — Str. Elena Doamna, 78. — Bucureşti 6.
359	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Ismail, 16. Bucureşti 4. Telef. 4.74.74.
360	1939, Dec. 7	ŢINTEA M. ION. Doctor-Inginer — Profesor — Str. Leova, 42. Bucureşti 4. Telef. 5.46.79.
361	1929, Oct. 30	ŢIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici. Inginer. — Asistentă la Politehnica din Bucureşti. — Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti 3. Telef. 2.80.64.
362	1939, Aug. 31	ŢIŢEICA RADU. Doctor în Fizică., Licenţiat în Matematici, Inginer. — Profesor la Labor. Optică, Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti 3. Telef. 2.80.64.
363	1941, Febr. 20	ŢIŢEICA ŞERBAN. Licenţiat în Matematici, licenţiat în Ştiinţe Fizico-Chimice, doctor în Ştiinţe. — Str. Vovidenie, 23. Iaşi.
364	1947, Aug. 26	TOGĂNEL GEORGE. Inginer. Str. Roth, 2. Braşov.
365	1936, Febr. 27	TOMESCU ST. IOAN. Inginer. — Intrarea Geneva, 4. Bucureşti 3. Telef. 2.35.82.
366	1944, Feb. 9	TUDORAN MIHAIL. Inginer Inspector General din C. F. R. — Str. Maramureş 2. Bucureşti 2. Telef. 5.39.48.
367	1940, Aug. 28	TULLEA C. GH. Inginer diplomat. — Inginer Inspector General în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Av. Th. Iliescu, 69. Bucureşti 3. Telef. 2-4361.
368	1947, Febr. 17	TUTUNARU D-TRU. Inginer. Str. Ştefan Burcuş, 14. Bucureşti 2.
369	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer. — Str. Dr. Lister, 65. Bucureşti 6. Telef. 4.92.08.
370	1935, Noem. 5	VÂLCOVICI VICTOR. Doctor în Ştiinţele Matematice şi Mecanice. — Membru corespondent al Academiei Române. Membru al Academiei de Ştiinţe. — Profesor de Mecanică la Universitatea din Bucureşti. Str. Londra, 44. Bucureşti 3. Telef. 2-3399.

371	1914, Dec. 20	VARDALA ION. Inginer Inspector General. Str. Wilson, 15. Bucureşti 1. Telef. 4.32.85.
372	1946, Dec. 9	VARLAM PETRE. Inginer. Calea Dorobanţilor, 137. Bucureşti 3.
373	1927, Mai 11	VASILACHE I. Inginer Inspector General. — Profesor şi Subdirector al Liceului Industrial Nr. 1. — Str. Viitorului, 48. Bucureşti 3. Telef. 1.26.84.
374	1920. Ian. 10	VASILESCU C. I. Inginer-Şef. — Bucureşti.
375	1940, Febr. 8	VASILESCU I. TEODOR. Inginer constructor.
376	1944, Febr. 9	VASILESCU-STABU AL. MIRCEA. Sublocotenent de Artilerie. — Str. Iancu Căpitanul 35. Bucureşti 4.
377	1945, Mart. 26	VASILIU M. CONST. Inginer diplomat. Licenţiat în Matematici. — Profesor de Matematici, la Liceul Militar „Mihai Viteazu". Str. Gh. Asachi. 4. Timişoara.
378	1931, Apr. 10	VASILIU G. DAN. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Director Ministerul de Finanţe. — Str. N. Bălcescu, 17. Bucureşti 3. Telef. 3.28.70.
379	1941, Febr. 20	VASILIU C. EUGENIU. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Antreprenor de lucrări publice şi particulare. — Str. Vornicul Mogoş, 6. Bucureşti 4. Telefon 3.23.55.
380	1933, Febr. 22	VASILIU GH. Ing., de mine şi geodezie. Str. Vespasian, 44. Bucureşti 2.
381	1941, Febr. 20	VASILIU C. ION. Inginer Şef. — Sub Şef Serviciu C. F. R. Calea Griviţei, 150. Bucureşti 2.
382	1925, Aug. 26	VASILIU MIHAI. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Profesor titular la Politehnica „Gh. Asachi" Iaşi şi Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. Str. Vaselor, 70. Bucureşti. Telef. 2.46.60.
383	1947, Iunie 10	VASILIU MIRCEA. Inginer. Str. C. C. Arion, 13. Bucureşti 2.
384	1945, Aug. 27	VASU VASILE. Licenţiat în matematici. Profesor secundar. Str. Ilie Măgeanu Nr. 9 Sibiu.
385	1938, Febr. 17	VESCAN T. TEOFIL. Doctor în Ştiinţe fizice. Licenţiat în Matematici. Profesor Cluj. Piaţa Malinovschi Nr. 1.
386	1936, Febr. 27	VICIU A. A. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Militar Mihai Viteazul. — Asistent la Facultatea de Ştiinţe. — Str. Eliade Rădulescu, 25. Cluj.
387	1944, Febr. 9	VIŞA EUGEN. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Timotei Cipariu. com. Dumbrăveni, jud. Târnava-Mică.
388	1947, Iunie 10	VOINEA P. RADU. Inginer. Str. Depărăţeanu, 26. Bucureşti 2.
389	1933, Febr. 22	WOINAROVSKY R. Licenţiat în Matematici. — Calea Moşilor, 133. Bucureşti 3. Telef. 5.53.07.
390	1945, Dec. 3	ZAHARIA O. IOAN. Licenţiat în matematici. — Profesor Liceul Comercial Constanţa. — Str. Tudor Vladimirescu Nr. 11. Constanţa.

391	1941, Iunie 5	ZAMFIRESCU GH. ION. Maior de Artilerie. — Inginer Subsecretariatul pentru Industria de Stat. Direcţia Tehnică. Bd. Elisabeta, 97. Bucureşti 2.
392	1920, Sept. 28	ZAPAN GH. Doctor în Filosofie dela Universitatea din Berlin. — Conferenţiar la Facultatea de Litere şi Filosofie din Bucureşti. — Directorul Institutului Psihotehnic din Bucureşti. Str. Gh. Lazăr, 4. Bucureşti (Telef. 4-9337).
393	1921, Mai 4	ZAPAN GRIGORE. General de Escadră - Inginer. — Inginer de Construcţii Aeronautice şi Mecanice (E. N. S. A. Paris). — Profesor la Şcoala de Sub-Ingineri. — Str. Pasteur, 44. Bucureşti 6. Telefon 4.39.29.
394	1925, Aug. 26	ZLATCU ST. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politehnică din Zürich. — Antreprenor. — Bulevardul Elisabeta, 59. Bucureşti 2. Telefon 3.49.11.

†

MEMBRII DECEDAŢI [1]

	Data admiterii	Data morţii
1. ABASON E.	1922 Martie 1	1942 Dec. 17
2. ABRAMESCU NICOLAE	1907 Iulie 1	1947 Febr. 11
3. BANCIU I.	1911 Februarie 20	1940 Sept. 16
4. BRATU GH.	1920 August 15	1941 Sept. 1
5. BRUCKNER VICTOR	1910 Iunie 21	1946 Iulie 20
6. BUŞILĂ G. ION	1921 Mai 4	1944 Martie 10
7. FLORIAN D. ZAHARIA	1938 Februarie 17	1945 Aprilie 5
8. FUNDĂŢEANU C. I.	1928 Mai 9	1940 Sept. 23
9. GHEORGHIU A. MIRCEA	1913 August 30	1944 Decembrie 21
10. IOACHIMESCU GH. ANDREI	1895 Septemvrie 15	1943 Martie 13
11. IONESCU ION	1895 Septemvrie 15	1946 Sept. 17
12. LINTEŞ ION, C-DOR	1919 Septemvrie 12	1946 Iulie 21
13. NICHIFOR A. GH	1910 Mai 21	1946 Aprilie 3
14. SERGESCU BARBU	1928 August 29	1944 Iulie 29
15. STOICESCU T. T.	1936 August 25	1945 Mai 1
16. TEODORESCU V. N.	1911 Mai 18	1943 Ianuarie 23
17. ZAMFIRESCU C. GRIGORE	1924 Ianuarie 30	1943 Iunie 8

[1]) Aci sunt trecuţi în ordinea alfabetică numai redactorii şi membrii decedaţi în ultimii 7 ani şi cari au stat la „*Gazeta Matematică*“ până la sfârşitul vieţii lor.

ASUPRA AMORTIZĂRII IMPRUMUTURILOR

Să considerăm că la începutul unei perioade, o datorie este în sumă de V unităţi monetare şi e contractată cu dobândă unitară *i*.

Pentru rambursarea acestei datorii, debitorul plăteşte *n* rate la intervale egale de timp, interval care fie anul.

Cele *n* plăţi făcute de debitor, se numesc *anuităţi* şi cuprind fiecare două plăţi, una care reprezintă *dobândă* şi alta care reprezintă parte din suma împrumutată şi se numeşte *amortisment*.

Pentru amortizarea împrumuturilor, vom deosebi mai multe metode, pe care le vom grupa în: amortizări cu *anuităţi constante* şi amortizări cu *amortismente constante*.

Fiecare din aceste categorii de amortizări, se vor putea face socotind dobândă *simplă* sau *compusă*.

I. Amortizări cu dobândă simplă

1°. *Amortismente constante.* In fiecare perioadă se achită $\frac{V}{n}$ din suma împrumutată şi dobânda sumei datorată la începutul perioadei.

Acest mod de amortizare constitue *metoda olandeză*, care îşi are aplicaţiune şi la noi la împrumuturile contractate la *Casa de Depuneri şi Consemnaţii*.

Notând anuitatea anului p cu a_p, vom avea:

$$a_p = \frac{V}{n} + \left(1 - \frac{p-i}{n}\right) Vi \qquad (1)$$

unde făcând $p = 1, 2, 3 \ldots n$ găsim valorile celor *n* anuităţi, care descresc în progresie aritmetică.

2°. *Anuităţile constante:* Notând cu a_1, a_2, a_2 a_{n-1}, a_2 cele *n* plăţi făcute de debitor, şi capitalizând cu dobândă simplă atât datoria V cât şi fiecare din plăţile făcute, notând cu S soldul la sfârşitul anului al *n*-lea, avem:

$$S = V(1+ni) - \{a_1[1+(n-1)i] + a_2[1+(n-2)i] + \ldots + a_{n-1}(1+i) + a_n\}$$

sau mai condensat:

$$S = V(1+ni) - \sum_{p=1}^{n} a_p[1+(n-1)i].$$

Dacă în această expresiune vom face $a_1 = a_2 = \ldots a_n = a$ și presupunând că soldul este zero, adică am achitat întreaga datorie, vom avea:

$$V(1 + ni) = na + ai \sum_{p=1}^{n} (n - p).$$

$$\therefore \quad V(1 + ni) = na + ai \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{an}{2}[2 + (n-1)i]$$

De aci rezultă pentru anuitate expresiunea:

$$a = \frac{2V(1 + ni)}{n[2 + (n-1)i]} \tag{2}$$

formulă cu care vom socoti una din cantitățile componente cunoscând pe celelalte trei.

Observarea I. Pentru calcularea lui i avem din (2):

$$i = \frac{2(an - V)}{n[2V - a(n-1)]}$$

și cum valoarea lui i trebue să fie pozitivă, vom avea:

$$an - V > 0 \quad \text{cu} \quad a > \frac{V}{n}$$

$$2V - a(n-1) > 0 \quad \text{cu} \quad a < \frac{2V}{n-1}$$

de unde deducem:

$$\frac{V}{n} < a < \frac{2V}{n-1}$$

niște limite pentru anuitate.

Observarea II. Pentru calcularea lui n avem din (2):

$$ain^2 + (2a - ai - 2Vi)n - 2V = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații, vor fi numărul perioadelor în care se amortizează împrumutul (soluția negativă corespunde problemei scontului).

II. Amortizarea cu dobândă compusă

1°. *Cu anuitățile constante.* Să presupunem că facem după fiecare perioadă soldul contului, în care sunt cuprinse dobânzile și în acest caz, socoteala va fi cu dobândă compusă.

Plătind sumele $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n$ la sfârșitul fiecărei perioade, soldurile vor fi, notând $1 + i = u$:

După 1^a perioadă soldul va fi $Vu - a_1$

„ 2^a „ „ „ „ $Vu^2 - a_1 u - a_2$

„ 3^a „ „ „ „ $Vu^3 - a_1 u^2 - a_2 u - a_3$

⋮

„ n^a „ „ „ „ $Vu^n - \sum_{p=1}^{n} a_p u^{n-p}$.

Notând cu S acel sold, vom avea:

$$S = Vu^n - \sum_{p=1}^{n} a_p u^{n-p}$$

unde făcând $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots a_n = a$, obținem

$$S = Vu^n - a \sum_{p=1}^{n} u^{n-p} \qquad (2')$$

Efectuând însumarea găsim

$$S = Vu^n - a \cdot \frac{u^n - 1}{i}.$$

Observarea I. Soldul este diferența dintre:

a) Vu^n, care reprezintă valoarea capitalizată a datoriei, după n perioade cu dobânda unitară i;

b) $a \cdot \frac{u^n - i}{i}$, care reprezintă suma valorilor plăților capitalizate fiecare cu dobândă compusă pe sfârșitul perioadei a $n - a_1$ cu dobânda unitară i.

Observarea II. Dacă $S = 0$ avem:

$$Vu^n = a \cdot \frac{u^n - 1}{i} \quad \therefore \quad a = \frac{Vi}{1 - u^{-n}} \qquad (3)$$

formulă cu care se socotește anuitatea constantă, care folosește la amortizarea împrumutului V în condițiile impuse și cu care socotim una din cantitățile componente cunoscând pe celelalte trei.

Observarea III. Dacă în expresiunea

$$Vu^n = a \sum_{p=1}^{n} u^{n-p} = au^{n-1} + au^{n-2} + \ldots + au + a$$

împărțim cu u^n ambii membri obținem:

$$V = a \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{u^n} = \frac{a}{u} + \frac{a}{u^2} + \ldots + \frac{a}{u^{n-1}} + \frac{a}{u^n} \qquad (4)$$

ceace ne arată că suma datorată V se poate rambursa efectiv în n perioade prin achitarea termenilor a, procentul fiind cel de dobândă unitară i, iar achitarea făcându-se la sfârşitul fiecărei perioade.

Rezultă că debitorul plăteşte periodic suma a care cuprinde dobânda sumei datorată şi amortismentul fiecărei perioade. Acest mod de amortizare constitue *metoda franceză*, cea mai uzitată.

Observarea IV. Notând cu A_p şi m_p respectiv suma rămasă de amortizat după plata primelor p anuităţi şi amortismentul de rang p, vom avea relaţia:

$$a = A_p\, i + m_p = (A_p - m_{p+1})\, i + m_{p+2}$$

de unde evident vom avea:

$$m_{p+2} = m_{p+1}\, u$$

ceace înseamnă că amortismentele cresc în progresie geometrică cu raţia u.

Observarea V. In unele ţări se întrebuinţează *metoda germană* de amortizare, care diferă de cea franceză prin aceea că dobânda sumei datorate se achită anticipat.

Cu notaţiile de până aici avem:

$$a = A_p\, i + m_p = (A_p - m_{p+1})\, i + m_{p+i}$$

$$m_p = m_{p+1}\,(1 - i) \quad \text{şi} \quad m_{p+1} = m_p \times \frac{1}{1 - i}$$

ceace ne arată că amortismentele cresc în progresie geometrică.

Pentru calculul anuităţii vom avea:

$$V = \sum_{p=1}^{n} m_p = m_1 \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{1 - i}\right)^{p-1} = m_i \cdot \frac{(1 - i)^{-n} - 1}{i} \times (1 - i)$$

$$\therefore \qquad m_1 = \frac{V \times \dfrac{i}{1 - i}}{(1 - i)^{-n} - 1}$$

iar pentru anuitate avem:

$$a = m_1 + (V - m_1)\, i = Vi + m_1\,(1 - i) = \frac{Vi}{1 - (1 - i)^n}. \qquad (5)$$

2°. *Cu amortismente constante şi anuităţi constante.*

Dacă debitorul plăteşte în fiecare perioadă dobânda sumei împrumutată, iar pentru reconstituirea acelui capital la sfârşitul celor n perioade, depune suma $(a - Vi)$ în fiecare perioadă, avem un mod de amortizare numit *metoda americană* sau *sinking-fund.*

Observarea I. Dacă pentru depunerile periodice de $(a - Vi)$ dobânda unitară este tot i, în cele n perioade va aduna o sumă pe care notând-o cu A, avem:

$$A = (a - Vi) \times \frac{u^n - 1}{i} = \frac{Vi}{u^n - 1} \times \frac{u^n - i}{i} = V.$$

Observarea II. Dacă însă dobânda unitară pentru depunerile făcute periodic de debitor este $t \neq i$, atunci suntem conduşi să considerăm o dobândă unitară i pe care o plăteşte debitorul creditorului său (prin achitarea periodică a sumei Vi dobânda sumei împrumutată) şi o dobândă unitară t cu care plasează anuitatea $\frac{Vt}{(1+t)^n - 1}$, ca să reconstitue suma V în cele n perioade.

Astfel că, anuitatea constanţă a' pentru amortizarea împrumutului va fi:

$$a' = Vi + \frac{Vt}{(1+t)^n - 1}. \qquad (6)$$

Observarea III. Urmărind variaţia expresiunii amortismentului din compunerea anuităţii (6), vom observa că dacă t creşte, acea expresiune descreşte, aşa că vom scoate următoarele:

Dacă $t < i$ atunci $a' > a$

„ $t = i$ „ $a' = a$

„ $t > i$ „ $a' < a$

şi debitorul va urmări să plaseze amortismenîele cu procent cât mai mare, pentru a avea un profit maximum.

3. *Cu anuităţi variabile.* a) *Amortizări cu anuităţi în progresie aritmetică:*

Să presupunem că plăţile făcute de debitor sunt în progresie aritmetică de raţie r.

In acesi caz vom înlocui în expresiunea (2') a lui S pe a_p prin $a + (p-1)\,r$ şi vom obţine, făcând $S = 0$, expresiunea:

$$Vu^n = \sum_{p=1}^{n} [a + (p-1)r]\, u^{n-p}$$

pe care desvoltând-o:

$$Vu^n = au^{n-1} + (a+r)\,u^{n-2} + (a+2r)\,u^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + [a+(n-2)\,r]\,u + \{a+(n-1)\,r\}$$

sau:

$$Vu^n = a\,(u^{n-1} + u^{n-2} + \ldots + u + 1) +$$
$$+ ru^{n-2} + 2ru^{n-3} + \ldots + (n-2)\,ru + (n-1)\,r$$

și însumând succesiv avem:

$$Vu^n = a \cdot \frac{u^n - 1}{i} + \frac{r}{i}\left(\frac{u^n - 1}{i} - n\right) = \frac{u^n - 1}{i}\left(a + \frac{r}{i}\right) - \frac{nr}{i}$$

$$\therefore \qquad V = \frac{1 - u^{-n}}{i}\left(a + \frac{r}{i}\right) - \frac{nru^{-n}}{i} \cdot$$

$$\therefore \qquad V = \frac{1 - u^{-n}}{i}\left(a + nr + \frac{r}{i}\right) - \frac{nr}{i}$$

de unde apoi avem pentru anuitate expresiunea

$$a = \left(V + \frac{nr}{i}\right) \cdot \frac{i}{1 - u^{-n}} - r\left(n + \frac{1}{i}\right) \cdot \qquad (7)$$

Observarea I. Dacă în anuitățile în progresie aritmetică, schimbăm pe r în $-r$, vom avea:

$$a = \left(V - \frac{nr}{i}\right) \cdot \frac{i}{1 - u^{-n}} + r\left(n + \frac{1}{i}\right) \cdot$$

b) *Amortizări cu anuități în progresie geometrică.* In acest caz vom avea:

$$S = Vu^n - \sum_{p=1}^{n} aq^{p-1}\,u^{n-p} \quad \therefore \quad Vu^n = a \sum_{p=1}^{n} q^{-p-1}\,u^{n-p}$$

$$\therefore \quad Vu^n = a\frac{q^n - u^n}{q - u} \quad \text{și deci:} \quad a = \frac{Vu^n\,(q-u)}{q^n - u^n} \qquad (8)$$

c) *Amortizări în care fiecare amortisment este un multiplu al primului amortisment.* Presupun că fiecare amortisment este cât primul înmulțit cu rangul său, în care caz vom avea:

$$V = \sum_{p=1}^{n} pm_1 = m_1 \times \frac{n\,(n+1)}{2}$$

de unde se vede imediat că

$$m_1 = \frac{2V}{n\,(n+1)} \cdot$$

Deci vom putea socoti o anuitate oarecare a^p:

$$a_p = \left(V - m_1 \sum_{k=1}^{p-1} k\right) i + p m_1$$

$$\therefore \qquad a_p = -\frac{m_1 i}{2} p^2 + m_1 \left(1 + \frac{i}{2}\right) p + Vi \qquad (9)$$

de unde se vede că anuitatea este o funcție de gradul doi, rangul ei fiind variabil.

De sigur că anuitatea fiind funcțiune de rangul doi, cum coeficientul primului termen este negativ, va trece printr'un pentru valoarea variabilei p (rangul ei)

$$p = \frac{m_1 \left(1 + \frac{i}{2}\right)}{2 \cdot \frac{m_1 i}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{i}}{i} = \frac{i}{2} + \frac{1}{2}$$

valoarea maximă fiind:

$$a_M = Vi + \frac{m_1 (2 + i)^2}{8i}$$

cum se știe dela studiul trinomului de gradul doi.

VICTOR V. MEHEDINCU.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE" DIN 1948

1. Societatea *Gazeta Matematică*, în Adunarea generală dela 26 August 1947, a hotărît să se țină în anul 1948 concursul tradițional, între elevii liceelor din întreaga țară din clasele IV, V, VI, VII și VIII.

Concursul va avea loc în ultimele zile ale vacanței de Paște. Data și locul ținerii concursului se va anunța în numărul 6 din Februarie 1948 al revistei *Gazeta Matematică*, când se va publica și numele candidaților admiși la concurs.

2. Inscrierea la concurs se va face *numai* prin cerere individuală, *scrisă personal* de candidat și primită la Societatea *Gazeta Matematică*, Calea Griviței 158, București, până la ora 12 în ziua de 18 Ianuarie 1948.

Nu se primesc cereri scrise şi trimise de părinţi, rude, cunoştinţe, profesori sau şcoli.

3. In cerere candidatul va arăta pe puncte în ordine următoare:

a) Numele de familie, iniţiala numelui părintelui şi numele de botez.

b) Şcoala şi clasa în care urmează. Cei pregătiţi în particular vor arăta şcoala la care au urmat în anul precedent sau la care au depus examenul pentru clasa precedentă.

c) Adresa personală: în timpul şcoalei şi în timpul vacanţei de Paşte.

d) Dacă dispune sau nu de mijloace de a veni la Bucureşti, dacă are sau nu unde fi găzduit şi întreţinut în timpul concursului.

Cei cari au nevoie de bani pentru transport vor indica gara de plecare spre Bucureşti şi pe cea de înapoiere dela Bucureşti.

e) Activitatea dela *Gazeta Matematică* şi *Suplimentul Gazetei Matematice* indicând numerele de ordine ale problemelor şi exerciţiilor rezolvate sau menţionate.

4. Candidaţii admişi pentru concurs, dar care din diferite motive nu vor putea sau nu vor mai voi să vină la concurs, sunt obligaţi să anunţe în scris şi din timp societatea.

5. Părăsirea sălilor de concurs este interzisă înainte de a preda lucrarea scrisă.

6. Candidaţii reuşiţi la concurs vor primi diplome şi premii sau menţiuni. Primul reuşit va primi şi premiul «LT. COL. G. TĂNĂSESCU» constând din cărţi.

Programa analitică a concursului şi materiile la care vor fi examinaţi concurenţii din fiecare clasă se vor publica în numărul 2 al *Gazetei Matematice*.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ".

RAPORT PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „GENERAL SCARLAT PANAITESCU"

Domnilor membri,

Examinând lucrările de matematici cu aplicaţie la ştiinţele militare apărute în cursul anului 1946, precum şi diferitele reviste de specialitate în care sunt publicate lucrări ce nu aparţin membrilor

Societății *Gazeta Matematică*, am constatat că singura publicație în care au apărut asemenea lucrări a fost Revista Artileriei.

Suntem deci de părere, ca pentru anul 1946, să se aibă în vedere la acordarea premiului G-ral « Sc. PANAITESCU », Revista Artileriei.

Având însă în vedere faptul că în acest an urmează a se acorda efectiv premiul pentru o perioadă de 5 ani (perioada 1942—1946) și ținând seamă că în decursul acestor cinci ani au fost recomandate în vederea premierii următoarele publicații sau lucrări:

— 1942 Studiul matematic al perforării plăcilor de blindaj a d-lui Cpt. GHEORGHIU GHEORGHE, prezentată în manuscris.

— 1943 Revista „Technica și Viața".

— 1944 Revista Corpului Technic Militar.

— 1945 Balistica tunurilor cu bătăi foarte mari de Maior Ing. EUGENIU BURLACU, publicată în Revista Artileriei.

— 1946 Revista Artileriei.

Comisiunea este de părere ca premiul General « Sc. PANAITESCU », pentru lucrări de matematici cu aplicații la Științele militare, pe intervalul 1942—46 să fie acordat Revistei Artileriei singura publicație cu apariție regulată și în care au apărut cea mai mare parte din lucrările de tehnică militară mai însemnată.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI
„GENERAL SCARLAT PANAITESCU"

Lt.-Col. DRAGOMIRESCU EDUARD BUZNE,
Ing. D. STAN și Lt.-C-dor Ing. AURELIAN I. STAN.

Acest raport a fost aprobat în ședința dela 26 August 1947 a Adunării generale ordinare.

NOTE MATEMATICE

1. *Asupra problemei 2354.* Iată o soluție mai simplă decât cea publicată în *Gazeta Matematică*, Vol. XLII, p. 31 și care permite generalizarea:

In sistemul de numerație cu baza B *să se găsească un număr de trei cifre abc astfel ca diferența abc — cba să se scrie cu aceleași cifre.*

Dela stânga spre dreapta cifrele diferenţei vor fi

$$a-c-1 \quad , \quad B-1 \quad , \quad B+c-a.$$

Observăm că $a > c$, şi că eliminând cazul banal $a = c$, vom avea $c < B-1$. Prima cifră a diferenţei nu poate fi a. Vom distinge două cazuri:

1°. $a = B-1$, $a-c-1 = B-2-c$, $B+c-a = c+1$,

deci $$B-2-c = c \quad , \quad c+1 = b$$

care ne dă soluţia

$$a = B-1 \quad , \quad b = \frac{B}{2} \quad , \quad c = \frac{B}{2} - 1 \qquad (1)$$

valabilă dacă B este par.

2°. $b = B-1$, $a-c-1 = c$, $B+c-a = a$, care conduce la

$$a = \frac{2B-1}{3} \quad , \quad b = B-1 \quad , \quad c = \frac{B-2}{3} \qquad (2)$$

când $B = \mathcal{M}3 + 2$.

Dacă B = 10, avem soluţia (1): 954 — 459 = 495.

Pe aceeaşi cale simplă se poate rezolva problema 6391.

N. GEORGESCU ROEGEN.

2. *Tetraedru quasiortocentric.* Pe dreapta DO_d, care uneşte vârful D al unui tetraedru ortocentric $T \equiv ABCD$, cu centrul O_d al cercului circumscris triunghiului ABC, se ia punctul D_1 aşa că

$$O_d D_1 = k \,.\, O_d D.$$

In virtutea teoremei lui STEWART, aplicată triunghiurilor DAD_1, DBD_1, DCD_1, avem:

$$k \,.\, \overline{D_1A}^2 - \overline{DA}^2 = (k+1) \,.\, \overline{AO_d}^2 - k(k-1) \,.\, \overline{DO_d}^2$$

$$= k \,.\, \overline{D_1B}^2 - \overline{DB}^2 = k \,.\, \overline{D_1C}^2 - \overline{DC}^2.$$

Dar, în tetraedrul ortocentric T, există relaţiunile

$$\overline{BC}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \lambda$$

$$\therefore \quad k \,.\, \overline{D_1A}^2 - \overline{DA}^2 = k \,.\, \overline{D_1A}^2 + \overline{BC}^2 - \lambda = k \,.\, \overline{D_1B}^2 + \overline{CA}^2 - \lambda$$

$$= k \,.\, \overline{D_1C}^2 + \overline{AB_1}^2 - \lambda$$

aşa că

$$\overline{BC}^2 + k \,.\, \overline{D_1A}^2 = \overline{CA}^2 + k \,.\, \overline{D_1B}^2 - \overline{AB}^2 + k \,.\, \overline{D_1C}^2.$$

Acest tetraedru D_1ABC, *quasiortocentric,* are proprietăţile următoare, uşor de verificat:

1. *Piciorul* D_1' *al înălţimei* D_1D_1' *înparte distanţa dela* O_d *la ortocentrul* H_d *al feţei* ABC *în raportul* $1/k$.

2. *Dreapta care uneşte centrul sferei circumscrise cu punctul* P, *luat pe mediana* DG_d *aşa că*

$$\frac{PG_d}{PD} = \frac{k}{3}$$

este perpendiculară pe faţa ABC, *iar dreptele* AP, BP, CP *limitate la feţele opuse sunt egale.*

3. *Centrul de greutate al lui* D_1ABC *se proiectează ortogonal pe* ABC *în punctul* Q *aşa că*

$$\frac{O_dQ}{O_dG_d} = \frac{3(k+1)}{4k}$$

4. *Dacă* Ω *este punctul lui* MONGE, *iar* M, N, S, T, U, V *mijloacele muchiilor* BC, DA, CA, DB, AB, DC *atunci*

$$\overline{\Omega N}^2 + k \cdot \overline{\Omega M}^2 = \overline{\Omega T}^2 + k \cdot \overline{\Omega S}^2 = \overline{\Omega V}^2 + k \cdot \overline{\Omega U}^2.$$

In particular când $k = -1$, *vârful* D_1 *este simetricul lui* D *faţă de* O_d, *diferenţa patratelor muchiilor opuse este aceeaşi, iar medianele care pleacă din* A, B, C *sunt egale*[1].

V. THÉBAULT.

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. Anul XX. No. 1. Martie 1947. B. BAIDAFF: Un cuvânt asupra inaugurării a 20 ani de apariţie.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVII. Nr. 6. August 1947. GH. TH. GHEORGHIU. Articol de metodologie. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

1) Această notă mi-a fost sugerată de observaţiile făcute de d-l R. BLANCHARD în soluţia pe care a dat-o problemei 3264 în *Mathesis*, Vol. LV, pag. 59.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXXIII. Nr. 2—3. Aprilie-Septembrie 1947. FLORICA CÂMPAN: Logaritmii şi maşina de calculat, două mijloace deosebite de simplificarea calculului.

C. IACOB. LAZARE CARNOT. (Ext. „Ştiinţă şi progres". Anul X Nr. 1—2).

C. IACOB. Mécanique des fluides. (Gauthier-Villars Paris. 124866—46).

C. IACOB. Recherches sur les mouvements fluides engendrés par la rotation de plusieurs corps solides. (Ext. „Disquisitiones Matematicae et Physicae" t. III).

C. IACOB. Sur le méthode approchée de M. LAMLA en dinamique des fluides compressibles. (Ext. „Buletin de la section scientifique". Tome XXVIII. No. 10).

C. IACOB. Sur l'emploi de la methode hodographique en mecanique des fluides compressibles. (Ext. „Mathematica" Vol. XXII, 1946).

P. SERGESCU. La vie et l'oeuvre de GASPARD MONGE. (Ext. din „Sciences" No. 54).

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 325. (Gazeta Matematică XLIX, 243). Se întreabă care este caracteristica aritmologiei.

Aritmologie, este numele care a fost dat de AMPÈRE ştiinţei generale a numerelor şi măsurii mărimilor, oricari ar fi ele.

AMPÈRE nu admite în clasificarea ştiinţelor, nici aritmetica nici algebra, dar le numeşte pe amândouă sub numele de *aritmologie.* El împarte aritmologia în *„Aritmologie elementară"* şi *„Megetologie"* (ştiinţa mărimilor).

Aritmologia elementară cuprinde *« aritmografia »* şi *« analiza matematică ».*

Aritmografia se ocupă de diversele moduri de expresiune a cantităţilor cunoscute; *anzalia matematică* de rezolvarea ecuaţiilor, de determinarea cantităţilor necunoscute prin relaţii date; a transforma expresiunile numerelor este obiecul *aritmografiei*; a transforma ecuaţiile, este rolul *analizei matematice.* Există această diferenţă între *aritmografie şi analiză matematică,* că transformările aritmografice nu alterează de loc valoarea acestor expresiuni, în timp ce transformările analitice schimbă valoarea celor doi membrii ai fiecărei ecuaţii, dar de aşa manieră că lasă să subziste egalitatea celor doi membrii.

Megetologia, cuprinde teoria funcţiilor sau calculul infinitezimal şi teoria probabilităţilor. Teoria funcţiilor răspunde la această dublă problemă: *cunoscând relaţiile prin cari sunt legate cantităţi cari variază simultan, să se găsească acele relaţii cari rezultă între aceleaşi cantităţi şi limitele rapoartelor creşterilor lor respective*; şi, din contră, când cunoaştem aceste ultime relaţii, să se arate relaţiile între valorile primitive.

Iată şi împărţirea ştiinţelor matematice, după AMPÈRE, pentru a vedea unde se situează *aritmologia* în clasificaţia sa:

- Ştiinţele Matematice.
  - Matematici pure
    - Aritmologie
      - Aritmologie elementară
        - Aritmografia
        - Analiza matematică
      - Megetologia
        - Teoria funcţiilor
        - „ probabilităţilor
    - Geometria
      - Geometria elementară
        - Geometrie sintetică
        - Geometrie analitică
      - Teoria formelor
        - Teoria liniilor şi suprafeţelor
        - Geometria moleculară
  - Ştiinţe fizico-matematice
    - Mecanică
      - Mecanică elementară
        - Cinematică
        - Statică
      - Mecanică Transcend.
        - Dinamică
        - Mecanică moleculară
    - Uranologie
      - Uranologie elementară
        - Uranografia
        - Heliostatica
      - Uranognosie
        - Astronomia
        - Mecanica cerească.

MARCEL D. POPA
Student facult. ştiinţe, Bucureşti.

DIVERSE

Pentru abonaţi la I. R. M. Domnii abonaţi la *Intermédiaire des Recherches Mathématiques* sunt rugaţi a trece pe la *Gazeta Matematică* în ori ce zi de lucru între orele 8 şi $12\,^1/_2$ spre a-şi ridica volumele pentru care au plătit abonamentul.

Abonaţii din provincie, care doresc să li se expedieze revista I. R. M. prin poştă sunt rugaţi a trimite prin mandat poştal la *Gazeta Matematică* sau în cont CEC Nr. 26220 câte 12 lei de volum pentru expediţia obişnuită sau câte 36 lei de volum pentru expediţia recomandat.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1342. *Să se găsească curbele aşa ca între razele de curbură ale curbei şi primele două desfăşurate să avem relaţia*

$$a\rho + 2b\rho' + c\rho'' = 0.$$

Aplicaţie la cazul $a = c = 1$, $b = 0$.

N. DIACONESCU.

Soluție dată de d-l MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila). Considerăm curba reprezentată tangențial prin ecuația

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi = f(\varphi)$$

unde f este o funcțiune arbitrară de un argument φ ce reprezintă coeficientul unghiular al tangentei la curbă. Pornind dela această reprezentare, coordonatele unui punct curent depe curbă (adică reprezentarea parametrică a curbei) este

$$x = f \sin\varphi + f' \cos\varphi \quad ; \quad y = -f \cos\varphi + f' \sin\varphi$$

accentele indicând operația derivării.

Pornind dela această reprezentare, d-l D. V. IONESCU într'un articol publicat în *Revista Matematică din Timișoara*, Vol. XII, p. 109, găsește că

$$\rho = f + f'' \quad , \quad \rho' = f' + f''' \quad , \quad \rho'' = f'' + f^{IV}, \ldots$$

Se vede din aceste formule un lucru interesant care e bine să-l punem în evidență. In prima parte a acestor relații, accentul indică ordinul desfășuratei a cărei rază de curbură este considerată, iar în partea a doua operația derivării. Pentru a nu se face confuzie, să notăm cu ρ_n raza de curbură a celei de-a n^a desfășurată. Atunci vom avea

$$\rho_n = f^{(n)} + f^{(n+2)} = (f + f'')^{(n)} = \rho^{(n)}$$

adică: *raza de curbură a desfășuratei a* n^a *este derivată, în raport cu coeficientul unghiular al tangentei, de ordinul* n *a razei de curbură a curbei în punctul considerat.*

In baza formulelor de mai sus, ecuația din enunț devine ecuația diferențială

$$cf^{(IV)} + 2bf''' + (a + c)f'' + 2bf' + af = 0$$

cu coeficienți constanți și a cărei integrare depinde de ecuația caracteristică

$$cr^4 + 2br^3 + (a + c)r^2 + 2br + a \equiv (r^2 + 1)(cr^2 + 2br + a) = 0.$$

Notând cu α și β rădăcinile ecuației ce se capătă anulând paranteza a doua avem următoarele cazuri:

1) $b^2 - ac > 0$, avem

$$f(\varphi) = C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi + C_3 e^{\alpha\varphi} + C_4 e^{\beta\varphi}$$

C_i fiind constante. Curbele corespunzătoare vor avea ecuaţiile parametrice

$$x = C_1 + C_3(\sin\varphi + \alpha\cos\varphi)e^{\alpha\varphi} + C_4(\sin\varphi + \beta\cos\varphi)e^{\beta\varphi},$$
$$y = -C_2 - C_3(\cos\varphi - \alpha\sin\varphi)e^{\alpha\varphi} - C_4(\cos\varphi - \beta\sin\varphi)e^{\beta\varphi}$$

2) $b^2 - ac < 0$ şi prin ipoteză $b \neq 0$, $a \neq c$; avem

$$f(\varphi) = C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi + e^{\lambda\varphi}(C_3\sin\mu\varphi + C_4\cos\mu\varphi)$$

λ şi μ fiind partea reală şi partea imaginară a rădăcinilor conjugate α, β; iar

$$x = C_1 + e^{\lambda\varphi}(C_3\sin\mu\varphi + C_4\cos\mu\varphi)(\sin\varphi + \lambda\cos\varphi)$$
$$+ e^{\lambda\varphi}\mu(C_3\cos\mu\varphi - C_4\sin\mu\varphi)\cos\varphi,$$
$$y = -C_2 - e^{\lambda\varphi}(C_3\sin\mu\varphi + C_4\cos\mu\varphi)(\cos\varphi - \lambda\sin\varphi)$$
$$+ e^{\lambda\varphi}\mu(C_3\cos\mu\varphi - C_4\sin\mu\varphi)\sin\varphi.$$

In cazul particular lăsat deoparte, şi care este tocmai cel indicat de problemă,

$$f(\varphi) = (C_1 + C_2\varphi)\sin\varphi + (C_3 + C_4\varphi)\cos\varphi,$$

şi

$$x = C_1 + C_2\varphi + C_2\sin\varphi\cos\varphi + C_4\cos^2\varphi,$$
$$y = -C_3 - C_4\varphi + C_2\sin^2\varphi + C_4\sin\varphi\cos\varphi.$$

3) $b^2 - ac = 0$; avem $(\alpha = \beta)$

$$f(\varphi) = C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi + (C_3 + C_4\varphi)e^{\alpha\varphi}$$

şi deci

$$x = C_1 + (C_3 + C_4\varphi)(\sin\varphi + \alpha\cos\varphi)e^{\alpha\varphi} + C_4 e^{\alpha\varphi}\cos\varphi$$
$$y = -C_2 - (C_3\varphi + C_4\varphi)(\cos\varphi - \alpha\sin\varphi)e^{\alpha\varphi} + C_4 e^{\alpha\varphi}\sin\varphi$$

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4277. *Să se rezolve inegalitatea*

$$I(n) < \sqrt{n}$$

unde $I(n)$ *este indicatorul lui* n.

I. B. FLORESCU.

Fie

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_i^{a_i} \text{ şi } I(n) = p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1} \ldots p_i^{a_i-1}(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_i-1)$$

unde ordinea de mărime a factorilor primi $p_1, p_2, \ldots p_i$ şi a

exponenţilor $a_1, a_2, \ldots a_i$ nu are nici o legătură cu ordinea de mărime a indicilor $1, 2, \ldots i$. Condiţia din enunţ revine la

$$(p-1)^2(p_2-1)^2\ldots(p_i-1)^2 < p_1^{2-a_1}p_2^{2-a_2}\ldots p_i^{2-a_i} \qquad (1)$$

Se vede din (1) ca numerele $a_1, a_2, \ldots a_i$ nu pot fi toate mai mari ca 2 căci atunci membrul II al neegalităţei (1) ar fi subunitar în vreme ce membrul I este mai mare ca 1.

Deci numai unele din numerele $a_1, a_2, \ldots a_i$ ar putea fi mai mari ca 2, altele sunt egale cu 2 şi altele mai mici ca 2, adică egale cu 1. Fie

$a_h, a_{h+1}, \ldots a_i$ mai mari ca 2

$a_j, a_{j+1}, \ldots a_{h-1}$ egali cu 2

$a_1, a_2, \ldots a_{j-1}$ egali cu 1

Inlocuind în (1), vom avea:

$$(p_1-1)^2(p_2-1)^2\ldots(p_{j-1}-1)^2(p_j-1)^2(p_{j+1}-1)^2\ldots$$
$$\ldots(p_{h-1}-1)^2(p_h-1)^2(p_{h+1}-1)^2\ldots(p_h-1)^2$$
$$< p_1p_2\ldots p_{j-1}p_h^{2-a_h}p_{h+1}^{2-a_{h+1}}\ldots p_i^{2-a_i}$$

sau notând cu P şi Q produsele din membrul I şi II pentru care $a > 2$, neegalitatea (1) devine

$$(p-1)^2(p^2-1)^2\ldots(p_{j-1}-1)^2(p_j-1)^2(p_{j+1}-1)^2\ldots$$
$$\ldots(p_{h-1}-1)^2 P < p_1p_2\ldots p_{j-1} Q \text{ cu } P > Q. \qquad (2)$$

De oarece $P > Q$ şi $(p_j-1)^2(p_{j+1}-1)^2\ldots(p_{h-1}-1)^2 > 1$ rezultă că neegalitatea (2) nu ar putea avea loc decât dacă

$$(p_1-1)^2(p_2-1)^2\ldots(p_{j-1}-1)^2 > p_1p_2\ldots p_{j-1}.$$

Pentru aceasta trebue ca, pentru un $x < j$ oarecare, să avem

$$(p-1)^2 > p_x \quad \therefore \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} < p_x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \therefore \quad p_x = 2. \qquad (3)$$

Cum însă numai unul din factorii primi p_i poate fi egal cu 2, rezultă ca (2) este

$$(p_x-1)^2(p_1-1)^2\ldots(p_j-1)^2\ldots(p_{h-1}-1)^2 P < 2p_1p_2\ldots Q \qquad (4)$$

unde în membrul II p_x a fost înlocuit prin 2. Se observă în (4) că $P > Q$, şi că $(p_m-1)^2 > p_m$, căci altfel $p_m = 2$, ceia ce se vede din (3) că nu se mai poate. Deci în (4) avem

$$(p_1-1)^2(p_j-1)^2\ldots(p_{h-1}-1)^2 > p_1p_2\ldots p_{h-1} \quad \text{şi} \quad P > Q.$$

Pentru ca neegalitatea să subziste ar trebui ca neapărat

$$(p_x - 1)^2 > 2$$

ceea ce, după (3), nu se poate.

Rezultă din această examinare că *nici unul din exponenţii* $a_1, a_2, \ldots a_i$ *nu este mai mare ca 2*, aşa că nu rămân de cât următoarele 3 posibilităţi relative la mărimea acestor exponenţi.

1^0. $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 1$ şi $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_i = 2$

2^0. $a_1 = a_2 = \ldots = a_i = 1$.

3^0. $a_1 = a_2 = \ldots = a_i = 2$.

Să le examinăm pe fiecare în parte, cu condiţiunea că ordinea de mărime a factorilor $p_1, p_2, \ldots p_i$ nu este legat de ordinea indicilor $1, 2, \ldots i$.

1^0. In această ipoteză (1) devine

$$(p_1 - 1)^2 (p_2 - 1)^2 \ldots (p_m - 1)^2 [(p_{m+1} - 1)^2 \ldots (p_i - 1)^2] < p_1 p_2 \ldots p_m . \quad (5)$$

Produsul din paranteza mare fiind mare ca 1, neegalitatea atrage neapărat după sine

$$(p_1 - 1)^2 > p_1 \quad , \quad (p_2 - 1)^2 > p_2, \ldots \quad \therefore \quad p_1 = p_2 = \ldots = 2$$

ceea ce nu-i posibil de cât dacă n are pe 2 ca factor la puterea 1. Fie $p_1 = 2$. Neegalitatea (5) devine

$$(p_2 - 1)^2 (p_3 - 1)^2 \ldots (p_i - 1)^2 > 2 p_2 p_3 \ldots p_i .$$

De oarece $(p_h - 1)^2 > p_h$ ar trebui ca, cel puţin

$$(p_2 - 1)^2 (p_3 - 1)^2 \ldots (p_1 - 1)^2 < 2$$

ceea ce nu a putea avea loc de cât dacă toţi factorii membrului I ar fi 1 ceea ce conduce la

$$n = 2 \quad \text{cu} \quad I(2) = 1 < \sqrt{2}$$

care este o soluţie a problemei.

2^0. In acest caz avem

$$n = p_1 p_2 \ldots p_i \quad \text{şi} \quad I(n) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_i - 1)$$

$$(p_1 - 1)^2 (p_2 - 1)^2 \ldots (p_i - 1)^2 < p_1 p_2 \ldots p_i . \quad (6)$$

S'a văzut din (2) că pentru

$$p_x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2,\ 618 \ldots$$

avem $(p_x - 1)^2 > p$. Deci pentru ca (6) să existe trebue ca cel puţin unul din factorii p_i să fie 2, iar ceilalţi mai mari ca 2.

Dând în (6) numerelor p_1, p_2... pe rând valorile întregi 2, 3, 4, 5... se observă că

$$(2-1)^2(3-2)^2 = 4 < 2.3 = 6;$$

$$(2-1)^2(3-1)^2(4-1)^2 = 36 > 2.34 = 64;$$

$$(2-1)^2(3-1)^2(4-1)^2(5-1)^2 = 576 > 2.3.4.5 = 120; \text{ etc.}$$

Deci pentru $p > 3$ neegalitatea (6) nu are loc. Rămâne numai

$$n = 2.3 = 6 \quad \text{cu} \quad I(6) = 2 < \sqrt{6} = 2,4\ldots$$

care este o a doua soluţie a problemei

3°. In acest caz (1) devine

$$(p_1 - 1)^2(p_2 - 1)^2 \ldots (p_i - 1)^2 < 1$$

care este o imposibilitate.

In definitiv soluţiile problemei sunt

$$n = 2 \quad \text{şi} \quad n = 6.$$

Notă. 1°. D-l Gh. Gh. Vrânceanu a rezolvat bine problema examinând pe rând cazurile când n are 1, 2 sau 3 factori primi.

2°. D-l C. Berdan a găsit soluţiile exacte, dar cu o demonstraţie mai puţin riguroasă.

3°. D-l I. B. Florescu, propunătorul problemei, enunţă în soluţia d-sale şi problema rezolvării inegalităţii

$$I(n) < a\sqrt{n}$$

şi dă următoarele soluţii pentru $a = 4$:

18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 66, 68, 70, 72, 78, 80, 84, 90, 96, 102, 108, 110, 114, 120, 126, 132, 138, 156, 168, 174, 180, 186, 222, 246, 258, şi 282.

De exemplu

$$I(56) = 24 < 4\sqrt{56} = 4 \times 7,48\ldots = 31,12\ldots$$

D-sa dă şi soluţiile

$$I(64) = 4\sqrt{64} \quad , \quad I(100) = 4\sqrt{100} \quad , \quad I(144) = 4\sqrt{144}$$

pentru ecuaţia

$$I(n) = 4\sqrt{n}.$$

Gh. B.

PROBLEMA 4772. *Fie* A', B', C' *picioarele bisectoarelor interioare ale unui triunghiu* ABC. *Din* A', B', C' *se duc perpendicularele* $A'A_1'$, $B'B_1'$, $C'C_1'$ *respectiv pe bisectoarele* BB', CC', AA'.

Dreptele AA_1', BB_1', CC_1' *formează un triunghiu* $A_2B_2C_2$, *unde* A_2 *este intersecția dreptelor* BB_1, CC_1, etc.

1. *Să se găsească suprafața triunghiului* $A_2B_2C_2$ *în funcție de suprafața triunghiului* ABC *și de laturile acestuia.*

2. *Să se deducă de aci că în cazul când* ABC *este echilateral, avem: Supr.* ABC = 7 *supr.* $A_2B_2C_2$.

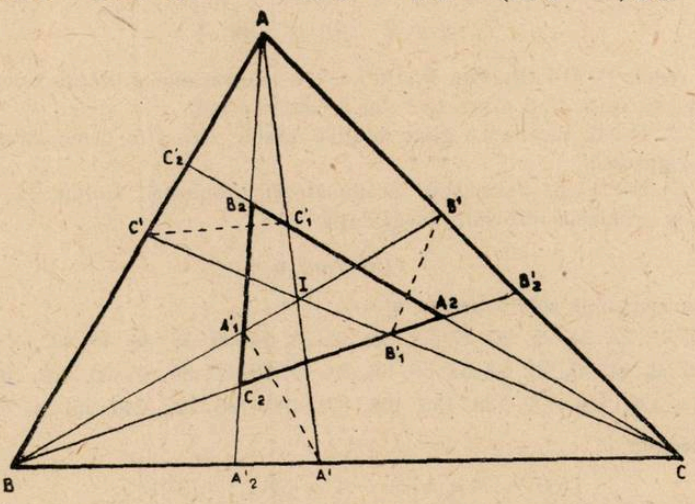
3. *Să se deducă de asemenea că* AA_1', BB_1', CC_1', *nu pot fi niciodată concurente.*

OCTAV ORĂNESCU.

1. Dreptele AA_1', BB_1', CC_1' întâlnesc respectiv laturile BC, CA, AB în punctele A_2', B_2', B_2'.

Din triunghiul ACC', tăiat de transversala $BB_1'B_2'$ se obține:

$$\frac{B_2'A}{B_2'C} = \frac{B_1'C'}{B_1'C} \cdot \frac{BA}{BC'} = \frac{CC' - B_1'C}{B_1'C} \cdot \frac{BA}{BC'} = \left(\frac{CC'}{B_1'C} - 1\right)\frac{BA}{BC'}.$$



Insemnând cu *a, b, c* laturile triunghiului ABC se află că:

$$CC' = \frac{b.c}{a+b}\,\frac{\sin A}{\sin\frac{C}{2}} \quad ; \quad B_1'C = B'C.\cos\frac{C}{2} \quad ; \quad B'C = \frac{a.b}{a+c};$$

$$\therefore \qquad B_1'C = \frac{a.b}{a+c}\cdot\cos\frac{C}{2} \quad ; \quad BC' = \frac{a.c}{a+b}.$$

Prin urmare:

$$\frac{B_2'A}{B_2'C} = \left(\frac{b.c}{a+b} \cdot \frac{\sin A}{\sin\frac{C}{2}} \cdot \frac{a+c}{a.b.\cos\frac{C}{2}} - 1\right) c \cdot \frac{a+b}{a.c} =$$

$$\left[\frac{2c\,(a+c)\sin A}{a\,(a+b)\sin C} - 1\right] \frac{a+b}{a} = \left[\frac{2\,(a+c)}{a+b} - 1\right] \frac{a+b}{a}$$

$$\therefore \frac{B_2'A}{B_2'C} = \frac{a-b+2c}{a} \; ; \; \frac{A_2'C}{A_2'B} = \frac{c-a+2b}{c} \; ; \; \frac{C_2'B}{C_2'A} = \frac{b-c+2a}{b} \quad (1)$$

Facem următoarele notaţiuni:

Supr. $ABC = S$; Supr. $A_2B_2C_2 = S'$; Supr. $BA_2C = S_A$, etc.

Se vede că

$$S' = S - S_A - S_B - S_C = S - \Sigma S_A .$$

Insă $$S_A = \frac{1}{2}\, a.A_2C \sin A_2CB.$$

Din triunghiul ACC_2' tăiat de transversala BA_2B_2' se are:

$$\frac{A_2C_2'}{A_2C} = \frac{BC_2'}{BA} \cdot \frac{B_2'A}{B_2'C} \quad \text{sau} \quad \frac{CC_2' - A_2C}{A_2C} = \frac{BC_2'}{BA} \cdot \frac{B_2'A}{B_2'C}$$

adică: $$\frac{CC_2'}{A_2C} = \frac{BC_2'}{BA} \cdot \frac{B_2'A}{B_2'C} + 1.$$

Din triunghiul BCC_2' avem:

$$\sin A_2CB = \frac{BC_2'}{CC_2'} . \sin B.$$

Prin urmare:

$$S_A = \frac{1}{2}a . \frac{CC_2'}{\frac{BC_2'}{BA} \cdot \frac{B_2'A}{B_2'C} + 1} \cdot \frac{BC_2'}{CC_2'} \sin B = \frac{1}{2}a . \frac{c \sin B}{\frac{B_2'A}{B_2'C} + \frac{c}{BC_2'}} = \frac{S}{\frac{B_2'A}{B_2'C} + \frac{c}{BC_2'}}$$

Insă din relaţiile (1) avem:

$$\frac{B_2'A}{B_2'C} = \frac{a-b+2c}{a} \text{ şi se deduce uşor } \frac{1}{BC_2'} = \frac{2b-c+2a}{c\,(2a+b-c)}$$

$$\therefore S_A = \frac{S}{\frac{a-b+2c}{a} + \frac{2a+2b-c}{2a+b-c}} = \frac{a\,(2a+b-c)\,S}{(2a+b-c)\,(2a-b+2c)+ab}$$

Rezultă prin urmare:

$$S' = S\left[1 - \Sigma \frac{a(2a+b-c)}{(2a+b-c)(2a-b+2c)+ab}\right]$$

care rezolvă prima parte a problemei.

2. Dacă triunghiul ABC este echilateral, avem:

$$\frac{a(2a+b-c}{(2a+b-c)(2a-b+2c)+ab} = \frac{2}{7}$$

şi cum evident: $S_A = S_B = S_C$, avem:

$$S' = S\left(1 - \frac{6}{7}\right) = \frac{1}{7}S.$$

3. Pentru ca dreptele AA_1, BB_1, CC_1 să fie concurente, adică să avem $S' = 0$, trebuie ca:

$$\frac{A_2'C}{A_2'B} \cdot \frac{C_2'B}{C_2'A} \cdot \frac{B_2'A}{B_2'C} = 1$$

sau conform relaţiilor (1):

$$(c-a+2b)(b-c+2a)(a-b+2c) = abc.$$

relaţie care într'un triunghiu nu poate avea loc, de oarece fiecare factor din membrul întâiu este mai mare decât factorul corespunzător din membrul al doilea. Astfel:

$$c < a+2b > b \quad \text{adică} \quad a < b+c$$

ceeace are loc la un triunghiu; analog cu ceilalţi doi factori.

Au rezolvat problema prin procedee mai lungi, sau utilizând coordonatele baricentrice, d-nii: P. P. DRĂGHICESCU, E. MARINESCU, MIRCEA D. POPA şi P. P. TEODORESCU.

O. OR.

PROBLEMA 4993. a, b, c *fiind laturile unui triunghiu, să se arate că avem:*

$$\frac{15}{4} \leqslant \frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{a+c} + \frac{p+c}{a+b} \leqslant \frac{9}{2},$$

2p fiind perimetrul triunghiului.

N. CIORĂNESCU.

Soluție dată de d-nii: MIRCEA D. POPA și IOAN V. JAREGHIE (Liceul militar Iași).

Fie E expresia dată. Avem:

$$E=\frac{p+a}{b+c}+\frac{p+b}{a+c}+\frac{p+c}{a+b}=\frac{3a+b+c}{2(b+c)}+\frac{a+3b+c}{2(a+c)}+\frac{a+b+3c}{2(a+b)}$$

$$=\frac{3a^3+3b^3+3c^3+6a^2b+6a^2c+6ab^2+6b^2c+6ac^2+6bc^2+15abc}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Să calculăm diferența:

$$D_1=E-\frac{15}{4}=3\frac{2a^3+2b^3+2c^3-a^2(b+c)-b^2(a+c)-c^2(a+b)}{4(a+b)(b+c)(c+a}$$

$$=3\frac{(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Se vede că $_1\geqslant 0$ egalitatea având loc numai pentru triunghiul echilateral, deci $E\geqslant\frac{15}{4}$.

Să evaluăm acum diferența:

$$D_2=\frac{9}{2}-E=3\frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+abc-a^3-b^3-c^3}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=3\frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)+3abc}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Se vede că și $D_2>0$ și prin urmare $E\leqslant\frac{9}{2}$.

Au adus în prealabil inegalitățile propuse la:

$$\frac{3}{2}\leqslant\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\leqslant 2 \qquad (1)$$

și apoi au demonstrat, d-nii: D. D. BOIANGIU (Polit. București), DINU D. BUZNEA, VICTOR FLORESCU, M. VASILESCU-STABU (liceul militar N. Filipescu) și I. I. STAMATE (student Cluj).

D-l C. D. EFTIMIE (student Polit. București), arată că sub această ultimă formă inegalitatea a fost propusă de d-l M. PETROVITCH *Bulletin mathématique de la Société Roumaine des sciences*, tome 40 (1937) pag. 208.

Alte demonstrații dela d-nii A. O. SAICHIU (student polit. București), E. WEGENER (bacalaureat) și o demonstrație cu șirul lui STURM dela d-l D. RIPIANU.

Observaţie: Ultima din inegalităţile (I), să-i zicem a d-lui M. PETROVITCH, se poate generaliza. Anume, dacă $a_1, a_2, \ldots a_n$ sunt pozitivi şi fiecare din ei este mai mic decât suma celorlalţi, atunci punând: $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S - a_k} \leqslant 2. \qquad \text{(II)}$$

Demonstraţia este imediată dacă observăm că dacă

$$\frac{a}{b} < 1 \text{ şi } x > 0 \text{ , atunci } \frac{a-x}{b-x} > \frac{a}{b}.$$

Avem astfel: $\dfrac{a_k}{S - a_k} < \dfrac{2a_k}{S}$ de unde (II).

N. C.

PROBLEMA 5161. *Să se găsească maximul suprafeţei dreptunghiului format de două perechi de normale la o elipsă, paralele şi perpendiculare între ele.*

ION C. VASILIU.

Fie $b^2x + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, o clipă şi $M(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$ $M_1(-a\cos\alpha_1, -b\sin\alpha)$ două puncte simetrice faţă de centrul O, ale căror normale sunt paralele.

Se calculează distanţa dintre cele două normale:

$$m = \frac{2c^2 \sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}} = \frac{2c^2 \operatorname{tg}^2\alpha}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(a^2\operatorname{tg}^2\alpha + b^2)}}.$$

Pentru alte două puncte

$$N(a\cos\beta,\ b\sin\beta),\ N_1(-a\cos\beta,\ -b\sin\beta)$$

$$n = \frac{2c^2 \operatorname{tg}^2\beta}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\beta)(a^2\operatorname{tg}^2\beta + b^2)}}.$$

Condiţia de ortogonalitate a normalelor în M şi N se găseşte:

$$a^2 \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta + b^2 = 0.$$

Cu ajutorul acestor elemente se găseşte suprafaţa dreptunghiului format de cele patru normale:

$$S = mn = \frac{4abc^4 \operatorname{tg}^2\alpha}{(a^2\operatorname{tg}^2\alpha + b^2)\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(a^4\operatorname{tg}^2\alpha + b^4)}}.$$

Notând $tg^2\alpha = x$ şi anulând numărătorul derivatei, găsim ecuaţia:

$$(a^2x - b^2)\,[2a^4x^2 + (a^2 + b^2)^2\,x + 2b^4] = 0$$

Prima paranteză ne dă:

$$tg^2\alpha = \frac{b^2}{a^2}.$$

A doua paranteză ne dă rădăcini imaginare, deci inadmisibile.

Rezultă că dreptunghiul în cauză e maxim când e format de normalele în punctele de intersecţie ale elipsei cu diagonalele dreptunghiului format de tangentele în vârfurile elipsei date.

In acest caz dreptunghiul e de fapt patrat întrucât:

$$m^2 = n^2 = \frac{2c^4}{a^2 + b^2} \quad \text{şi deci} \quad S_{max.} = \frac{2c^4}{a^2 + b^2}.$$

S'au primit soluţii bune dela d-nii: OVIDIU ENULESCU, PAUL P. DRĂGHICESCU şi D. RIPIANU.

I. C. V.

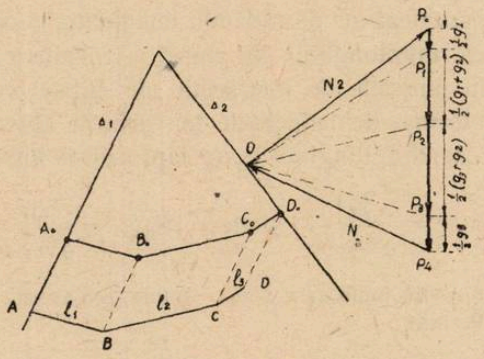
PROBLEMA 5591. *Se dau 2 bare fixe, înclinate una faţă de alta cu un unghiu dat fix. Pe ele pot aluneca prin intermediul a două 2 inele mici* A *şi* C, *fără greutate şi fără frecare, două bare omogene* AB *şi* AC, *articulate între ele în* B, *de lungime* l_1 *şi* l_2, *de greutate* g_1 *şi* g_2. *Să se determine pe cale grafică poziţia lor de echilibru. Să se generalizeze pentru n bare articulate.*

GABRIELA ŢIŢEICA.

Soluţie dată de d-l Lt. MIRCEA D. POPA (Politehnica Bucureşti).

Fie Δ_1 şi Δ_2 cele 2 bare presupuse situate într'un plan vertical. Vom rezolva problema pentru cazul a 3 bare AB, BC, CD, rezolvarea fiind aceeaşi pentru un număr oarecare de bare. Barele au lungimea l_1, l_2, l_3 şi greutăţile g_1, g_2, g_3. Reacţiunile în A şi D vor fi respectiv N_1 şi N_2 perpendiculare pe Δ_1 şi Δ_2. Mărimile lor le aflăm cunoscând direcţiile lor şi ştiind că fac echilibru greutăţilor g_1, g_2, g_3.

Luând separat bara AB presupunem că în A lucrează $\frac{1}{2}g_1$, N_1 şi tensiunea de-a-lungul barei care va avea direcţia barei căci presupunem acum că asupra barei nu lucrează nicio forţă între A şi B. Din echilibrul acestor 3 forţe (poligonul parţial cel mai de jos din poligonul forţelor) deducem direcţia OP_3, adică chiar direcţia barei.



Făcând acelaşi lucru pentru punctul B unde lucrează greutăţile $\frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}g_2$ căpătăm direcţia barei BC dată de OP_2 din triunghiul OP_2P_3. Aceeaşi construcţie se face şi pentru punctul C, determinând ca direcţie a barei CD direcţia OP_1.

Luând un punct A pe bara Δ_1 şi ducând $AB \parallel OP_3$, $BC \parallel OP_2$, $CD \parallel OP_1$, căpătăm conturul cel mai de jos. Apoi printr'o translaţie căpătăm poziţia reală a barelor $A_0B_0C_0D_0$.

G. Ţ.

PROBLEMA 5924. *Să se demonstreze că funcţia:*

$$f(x,y,z) \equiv \frac{(a^2-yz)\sqrt{a^2+x^2} + x\sqrt{(a^2+y^2)(a^2+z^2)}}{(y+z)\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{(a^2+y^2)(a^2+z^2)}}$$

este simetrică în raport cu variabilele sale.

GH. D. SIMIONESCU.

Soluția I-a. Facem numitorul rațional, înmulțind cu expresia conjugată. Notând cu B acest numitor avem:

$$B = [(y+z)\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{(a^2+y^2)\ (a^2+z^2)}]$$
$$[(y+z)\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{(a^2+y^2)\ (a^2+z^2)}] =$$
$$= (y+z)^2(a^2+x^2) - (a^2+y^2)(a^2+z^2) = x^2(y+z)^2 - a^2(a^2-yz)^2$$
$$\therefore\ B = (xy + xz - yz + a^2)\ (xy + yz + zx - a^2).$$

Înmulțim și numărătorul cu expresia conjugată numitorului. Notând acest numărător cu A avem:

$$A = [(a^2 - yz)\sqrt{a^2+x^2} + x\sqrt{(a^2+y^2)\ (a^2+z^2)}]$$
$$[(y + z)\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{(a^2+y^2)\ (a^2+z^2)}]$$
$$= (xy + xz - yz + a^2)\sqrt{(a^2+x^2)(a^2+y^2)(a^2+z^2)} + a^4(x+y+z)$$
$$+ a^2[(x^2 - yz)(y+z) + x(y^2+z^2)] - xyz(xy + xz - yz).$$

Funcțiunea care produce disimetria este $(xy + xz - yz + a^2)$ care se găsește la numitor și înmulțește *radicalul* dela numărător, încât e firesc să ne gândim că se poate produce o simplificare, deci să cercetăm dacă restul numărătorului nu e divizibil cu această funcțiune.

Socotindu-le pe amândouă ca polinoame în a constatăm că împărțirea se face exact și avem:

$$a^4(x+y+z) + a^2[(x^2 - yz)(y+z) + x(y^2+z^2)] -$$
$$- xyz(xy+xz-yz) \equiv (a^2+xy+xz-yz)[a^2(x+y+z) - xyz].$$

Deci

$$A \equiv (xy+xz-yz+a^2)[\sqrt{(a^2+x^2)(a^2+y^2)(a^2+z^2)} + a^2(x+y+z) - xyz]$$

și $$f(x, y, z) \equiv \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{(a^2+x^2)(a^2+y^2)(a^2+z^2)} + a^2(x+y+z) - xyz}{xy+yz+zx-a^2}$$

care este funcțiune simetrică în raport cu x, y, z.

Soluția a II-a dată de d-nii: VASILE D. PĂLĂCEANU (Șc. ofițeri geniu București), GH. A. GRIGORE (student-inginer), GEORGE M. NICOLAE (colegiul Carol I, Craiova), MIHAI R. CONSTANTINESCU (liceul „Sf. Petru și Pavel", Ploiești).

Dacă funcțiunea dată este simetrică în raport cu variabilele sale trebue să avem $f(x, y, z) \equiv f(y, z, x)$, deci

$$\frac{(a^2-yz)\sqrt{a^2+x^2}+x\sqrt{(a^2+y^2)(a^2+z^2)}}{(y+z)\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{(a^2+y^2)(a^2+z^2)}} \equiv \frac{(a^2-zx)\sqrt{a^2+y^2}+y\sqrt{(a^2+z^2)(a^2+x^2)}}{(z+x)\sqrt{a^2+y^2} - \sqrt{(a^2+z^2)(a^2+x^2)}}$$

Dacă se face produsul mezilor şi extremilor se ajunge la o aceeaşi expresie algebrică:

$$(a^2-xy-yz-zx)\left[z\sqrt{(a^2+x^2)(a^2+y^2)}-(a^2+xy)\sqrt{a^2+z^2}\right]$$

Soluţia a III-a dată de d-nii: IOAN C. UDREA, CONST. GH. MIHALACHE (liceul militar Craiova).

Se notează $x=a\,\mathrm{tg}u$, $y=a\,\mathrm{tg}v$, $z=a\,\mathrm{tg}w$.

Atunci:

$$\sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\cos u}\ ,\quad \sqrt{a^2+y^2}=\frac{a}{\cos v}\ ,\quad \sqrt{a^2+z^2}=\frac{a}{\cos w}.$$

Funcţiunea dată devine succesiv:

$$f(x,y,z)\equiv a\,\frac{\dfrac{1-\mathrm{tg}v\ \mathrm{tg}w}{\cos u}+\dfrac{\mathrm{tg}u}{\cos v\ \cos w}}{\dfrac{\mathrm{tg}v+\mathrm{tg}w}{\cos u}-\dfrac{1}{\cos v\ \cos w}}=a\,\frac{\cos(v+w)+\sin u}{\sin(v+w)-\cos u}=$$

$$=a\,\frac{\cos(v+w)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)}{\sin(v+w)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)}$$

$$\therefore\qquad f(x,y,z)\equiv a\cot g\left(\frac{u+v+w}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Notă. La această problemă s'a primit o soluţie asemănătoare cu prima soluţie, dar cu erori de calcul care denaturează rezultatul. Deasemenea o rezolvare asemănătoare cu a doua soluţie, dar care nu duce calculul până la sfârşit ci încheie astfel: *„dacă desfacem parantezele şi reducem termenii asemenea, obţinem membrul I egal cu membrul al II-lea"*.

Aceste soluţii nu pot fi citate.

PROBLEMA 6024. *Numărul de telefon al societaţii* Gazeta Matematică *este astăzi 73803. Să se studieze proprietăţile ale numărului 73803.*

COMANDOR I. LINTEŞ.

Enumărăm următoarele proprietăți:

1°. $N = 73803 = 3 \times 73 \times 337$

2°. $\varphi_1(N) = 48384$

3°. $\varphi_2(N) = 2^9 \cdot 3^3 = 24^3$; $\varphi_3(N) = 2^9 \cdot 3^2$; $\varphi_4(N) = 2^9 \cdot 3$; $\varphi_5(N) = 2^9$; $\varphi_6(N) = 2^8$; $\varphi_7(N) = 2^7$; $\varphi_8(N) = 2^6$; $\varphi_9(N) = 2^5$; $\varphi_{10}(N) = 2^4$; $\varphi_{11}(N) = 2^3$; $\varphi_{12}(N) = 2^2$; $\varphi_{13}(N) = 2$; $\varphi_{14}(N) = 1$

4°. N are 7 divizori în afară de 1: 1; 3; 73; 337; 3.73; 3.337; 73.337; 3.73.337

5°. Factorii primi ai lui N se scriu numai cu cifrele 3 și 7.

6°. Suma și numărul divizorilor lui N sunt:

$$S = 4.74.338 = 100108; \quad P = 73803^4$$

7°. $2^{16} < N < 2^{17}$ și $271^2 < 73803 < 272^2$

8°. $42^3 < 73803 < 43^3$

9°. Suma și produsul numerelor prime cu 73803 și mai mici ca el sunt:

$$\sigma(N) = \frac{73803}{2} \times 48384 = 1785442176$$

$$\pi(N) = \frac{3!\,73!\,337!\,73803!\,(219)^{337} \cdot (1011)^{73} \cdot (24601)^3}{219!\,1011!\,24601!\,3^{24601}\,73^{1011} \cdot 337^{219} \cdot 73803}.$$

Au dat proprietățile indicate în parantezele care urmează după nume d-nii: C. BERDAN (1°, 2°, 3°, 7°); M. R. CONSTANTINESCU (1°, 2°, 4°, 6°, 9°); GH. A. GRIGORE (1°, 2°, 4°, 6°).

Proprietățile 5° și 8° n'au fost date de nici un corespondent.

PROBLEMA 6083. *Cercurile* (O) *și* (O') *sunt tangente exterior în* w. *Tangentele la* (O) *și* (O') *paralele cu* OO' *și de aceeași parte cu* OO' *întâlnesc tangenta comună în* w *respectiv în* A *și* A'. *Să se demonstreze că tangentele din* A *și* A' *la* (O') *și* (O) *sunt paralele între ele. Să se examineze și cazul când* (O) *și* (O') *sunt tangente interior.*

P. P. DRĂGHICESCU.

Proprietatea este mai generală pentru 2 cercuri oarecare și pentru cazul când tangentele paralele nu sunt neapărat paralele cu OO' și de aceeași parte cu OO'. Fie deci A, un punct pe axa

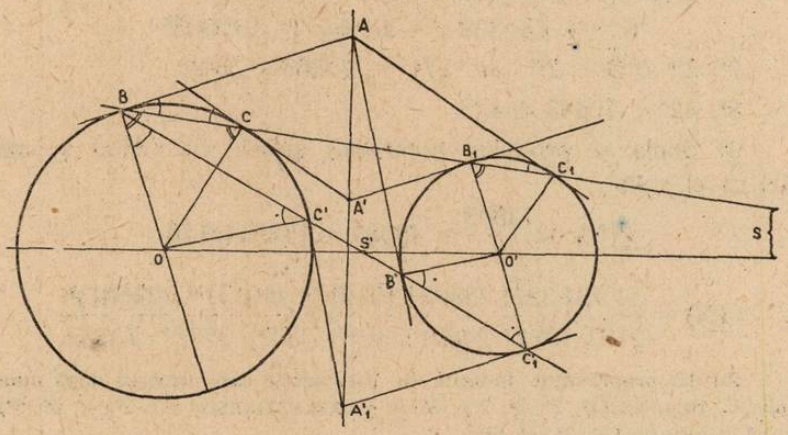
radicală a cercurilor date, AB tangenta exterioară[1] la (O), iar AC_1, AC_2 tangentele la (O'). Ducem în (O') diametrul B_1C_1' paralel cu OB. Tangentele în B_1 și C_1' la (O') sunt evident paralele cu BA și taie axul radical în A' și A_1'.

Tangenta din A' la (O) întâlnește acest cerc în C. Vom demonstra că $A'C \parallel AC_1$. Fie pentru aceasta C'' intersecția lui BC_1 cu (O). Punctul A fiind pe axa radicală avem

$$AB = AC_1 \quad \text{și} \quad \sphericalangle ABC_1 = \sphericalangle AC_1B$$

și cum unghiurile OBA, $O'C_1A$ sunt drepte, rezultă

$$\sphericalangle OC_1B = \sphericalangle OBC_1 = \sphericalangle OC''B.$$



Deci $OC'' \parallel OC_1$ și prin urmare dreapta $BC''C_1$ trece prin centrul de asemănare direct S al celor 2 cercuri.

Tangentele AB, $A'B_1$ fiind paralele, razele OB, $O'B_1$ sunt paralele și BB_1 trece de asemenea prin S. Deci B, C'', B_1, C_1, S sunt coliniare.

Fie C_1' intersecția lui C_1B_1 cu cercul O'. Punctul A' fiind pe axa radicală avem

$$A'C = A'B_1 \quad \therefore \quad \sphericalangle A'CB_1 = \sphericalangle A'B_1C$$

și cum $\sphericalangle OCA'$ și $\sphericalangle O'B_1A'$ sunt drepte urmează că

$$\sphericalangle O'B_1C_1' = \sphericalangle O'C_1''B' = \sphericalangle OCx$$

---

1) La fel se urmează demonstrația și pentru tangenta interioară.

x fiind pe prelungirea B_1C. Dar această relaţie arată ca $OC \parallel O'C_1'$ deci C şi C_1'' se află pe B_1S, ceea ce înseamnă că C'' se confundă cu C şi C_1 se confundă cu C_1, prin urmare $OC \parallel OC_1$ şi deci tangentele $A'C \parallel AC_1$, ceea ce demonstrează teorema.

Dacă în loc de B_1A' considerăm tangenta $C_1'A_1'$, unde A_1' este de partea opusă lui A faţă de OO', şi se urmăreşte aceeaşi demonstraţie se găseşte că B, C', B', C_1' şi centrul de asemănare invers S' sunt colineare şi deci $A_1'C' \parallel AB'$.

Proprietatea din enunţ este deci generală pentru două cercuri oarecare, iar punctele A, A' pe axa lor radicală.

Notă. 1°. D-l Lt. M. D. POPA a rezolvat problema pentru cazul mai puţin particular ca în enunţ, anume când cele 2 tangente paralele nu sunt paralele cu OO'. D-sa s'a servit de relaţiuni de unghiuri.

2°. Au dat foarte bune soluţiuni pentru cazul particular din enunţ d-nii: ANTON I. VARGĂ, AL. A. TIMOTIN (Studenţi, Politehnica din Bucureşti); GH. A. GRIGORE (Clasa a VIII-a particulară); AL. C. BÂRZESCU, I. E. HARGHEL (Liceul „I. Maiorescu", Giurgiu); MIRCEA V. SOARE (Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti); M. BARBAIANI, C. C. DIACONU, M. A. LEON (Liceul „A. Vlaicu", Bucureşti); EM. E. CONSTANTINESCU, I. NEGULESCU, STELIAN A. POPESCU, DAN D. SILIŞTEANU, AUREL N. TELNICEANU, MIRCEA BAŞTA, RADU D. CIOBANU, T. V. ENĂCHESCU, N. GÂLEA, AL. V. HUIDEŞ, AL. I. NICULESCU, AUREL C. TOFAN (Liceul militar „Ştefan Cel Mare", Piteşti); V. D. PĂLĂCEANU (Şcoala Ofiţeri de Geniu, Bucureşti); P. D. COLUMBEANU (Bacalaureat, Bucureşti); C. CORDUNEANU, V. GH. DIACONU, I. T. MUNTEANU, C. V. ROŞU (Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal); M. A. SĂVESCU (Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti); P. P. TEODORESCU (Liceul „Matei Basarab", Bucureşti); M. G. IOSIFESCU (Lic. Ploeşti); P. A. CERNESCU, C. S. TĂNĂSESCU (Bucureşti); M. MIHĂLCIOIU, VIRGILIU STĂNCESCU (Liceul militar, Craiova); CEZAR N. BOERESCU (Student Politehnica, Bucureşti); VIRGIL G. CONSTANTINESCU (Slatina), GEORGE ENESCU şi N. A. CERNESCU.

3°. D-nii M. V. SOARE, M. R. CONSTANTINESCU, AL. IEŞAN, MIRCEA D. PETCULESCU, GH. D. BRAŞOVEANU, VAL. M. STANCIU şi SILVIO E. FANCIOTTI, au dat soluţii prin geometria analitică.

G-L GH. B.

EXERCIŢII

1. *Să se găsească numărul de 4 cifre* abcd *ştiind că numărul de 2 cifre* ab *este prim şi că:*

1°. $a+b+c+d=ab$; 2°. $\sqrt{b}+\sqrt{c}=d$ şi 3°. $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=a+d$.

LT.-COL. E. ST. IACOB.

R. Din 2° şi 3° se deduce

$$\sqrt{a} = a \quad \therefore \quad a = 1.$$

Cum $1b$ este prim iar b este, după 2°, patrat perfect urmează că b este 1 sau 9. Ducând în 1° valorile găsite se obţine

$$c + d = 9.$$

După 2° şi 3° cifra c este patrat perfect, deci

$$c = 1, 4 \text{ sau } 9 \quad \therefore \quad d = 8, 5 \text{ sau } 0.$$

Ducând valorile în 3° se găseşte singura soluţie

$$a = 1 \ , \ b = 9 \ , \ c = 4 \ , \ d = 5 \quad \therefore \quad abcd = 1945 \ ^{1)}$$

2. *Să se calculeze determinantul*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 & 138 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 12 & 2 & 276 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 276 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

LT. COL. E. ST. IACOB.

R. Scăzând prima linie din a treia şi a cincea iar linia a doua din a patra şi a şasea obţinem

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 & 138 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 138 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 138 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 138 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1946 \ ^{2)}$$

PROBLEME PROPUSE

6391. Să se găsească un număr de patru cifre $abcd$ astfel ca diferenţa între el şi răsturnatul lui să se scrie cu aceleaşi cifre.

N. GEORGESCU ROEGEN.

6392. In ce caz $5^{\alpha} 7^{\beta} 11^{\gamma} 13^{\delta} - 1$ este divizibil cu 243?

I. B. FLORESCU.

1) Soluţia este anul în care autorul a trimis exerciţiul pentru propus.
2) Soluţia este anul în care exerciţiul a fost trimis la propus.

6393. Fie $F(x)$ o funcţie reală de o variabilă reală x, definită într'un interval care conţine punctul $x = a$, continuă şi derivabilă cel puţin în acest punct. Să se dea un exemplu de funcţie care satisface acestor condiţiuni şi pentru care expresiunea

$$\lim_{\lambda \to a,\ \mu \to a} \frac{F(\lambda) - F(\mu)}{\lambda - \mu},$$

unde λ şi μ sunt două puncte din interval care tind către punctul a, să tindă către orice număr real şi chiar către $+\infty$ sau $-\infty$.

B. BARBĂLAT.

6394. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$u + v + w = 9 \ ; \ ux + vy + w = 30 \ ; \ ux^2 + vy^2 + w = -8$$
$$ux^3 + vy^3 + w = 156 \ ; \ ux^4 + vy^4 + w = -236.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6395. Să se construiască triunghiul ABC cunoscând unghiul A şi lungimile medianelor din B şi din C.

G-L GH. BUICLIU.

6396. In planul P se dau, cercul O şi două puncte A, B în care se ridică perpendicularele Δ şi Δ_1 pe planul P. Pe dreapta Δ se ia punctul C, iar pe dreapta Δ_1 punctul D astfel încât $\frac{AC}{BD} = \frac{m}{n}$.

Să se construiască pe cercul O, un punct P', astfel încât unghiurile sub care se văd din P' segmentele AC şi BD să fie egale. Discuţie.

ING. AURELIAN STAN.

6397. Pe laturile unui triunghiu ABC se construesc triunghiuri dreptunghice asemenea şi asemenea orientate: BA_0C, CB_0A şi AC_0B în exterior, BA_1C, CB_1A şi AC_1B în exterior. Fie ω, ω_0, ω_1 unghiurile BROCARD ale triunghiurilor ABC, $A_0B_0C_0$ $A_1B_1C_1$. Să se arate că:

$$(\operatorname{cotg}^2\omega + 3)(\operatorname{cotg}\omega_0 + \operatorname{cotg}\omega_1) - 2\operatorname{cotg}\omega(\operatorname{cotg}\omega_0 \operatorname{cotg}\omega_1 + 3) = 0.$$

MIRCEA D. POPA.

6398. Fie A', B', C' intersecțiile bisectoarelor unui triunghiu oarecare ABC cu cercul circumscris și A_c, A_b proiecțiile lui A' respectiv pe AB și AC. Analog obținem punctele B_a, B_c, C_a, C_b Să se arate că:

1°. $\overline{AA_b} = \overline{AA_c} = \overline{B_aC_a}$; etc.; 2°. $\overline{AB_c} = \overline{CB_a}$; etc.

3°. $\overline{AB_c} + \overline{BC_a} + \overline{CA_b} = 0$, (se ține seamă de sens).

4°. $\overline{A_cB_c} + \overline{B_aC_a} + \overline{C_bA_b} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$.

5°. Dacă $\sphericalangle A = 90^0$, avem: $2\overline{B_aC_a} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

6°. Apoi să se deducă relațiile:

$$\sum \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2} = 0; \quad \sum \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \sum \sin A.$$

$$\sum \sin\frac{A-B}{4}\left(\cos\frac{C}{4} - \sin\frac{C}{4}\right) = 0;$$

$$\sum\left(\cos\frac{A}{4} + \sin\frac{A}{4}\right)\cos\frac{B-C}{4} = \sqrt{2}\sum \cos\frac{A}{2}.$$

C. IONESCU-ȚIU.

6399. Segmentul $\overline{AB}$ de lungime constantă a are extremitățile mobile pe două axe perpendiculare Ox și Oy. Ducem parabola (P) tangentă în A și B la Ox și Oy Se cere: 1°. Locul focarului parabolei (P). 2°. Locul proiecțiilor lui A și B pe directoare. 3°. Locul intersecției axei parabolei cu directoarea. 4°. Locul intersecției directoarei cu dreapta AB. 5°. Locul vârfului parabolei (P). 6°. Locul intersecției parabolei cu perpendiculara din O pe AB.

MIRCEA V. SOARE.

6400. Să se găsească poziția unui punct M în interiorul unui triunghiu, unui exagon oarecare, astfel ca forțele reprezentate prin vectorii unind acel punct cu vârfurile figurii, să fie în echilibru. Să se arate că aceste construcții sunt valabile și pentru poligoane concave. Generalizare în cazul unui poligon de n laturi.

A. C. LASCARIDIS.

ERATĂ. In penultimul rând al enunțului problemei 6374, propusă la pag. 390, Vol. LII se adaugă cuvântul ***ortogonal*** după cuvântul ***tetraedru.***

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii;

Athan sin C. Lucilius-Mihai (6378); *Bucur A. N.* (6319, 54, 78); *Cernescu A. N.* (4075, 96, 478, 6083, 105, 322, 54, 78); *Cernescu A. P.* (4056, 75, 96, 184, 99, 234, 307, 729, 6286, 312, 22, 25, 33, 43, 46, 54, 78); *Coceş Gh.* (5129, 6331); *Constantinescu R. M.* (6161, 88, 231, 52, 96, 308); *Cosma I. Gh.* (6331, 40); *Dăscălescu M.* (6331); *Dodu A. E.* (5129, 6331, 54, 57); *Enescu George* (6083); *Fânaru N. D.* (6350, 54); *Goga I. Fl.* (A, N); *Marinescu E. E.* (P); *Mihălcioiu M.* (P); *Moldoveanu D. Cornel* (5129); *Moraite Gh. Al.* (6372); *Moroianu D. A.* (5129); *Petcu A. Val.* (P); *Puţureanu M. I.* (6285, 96, 314, 15, 31, 50; *Ristea Gh. Gh.* (6331, 78); *Soare V. M.* (A, P); *Stanciu Val.* (6279); *Tătaru Sever* (5129); *Teodorescu P. P.* (4104, 5129, 619, 23, 25, 35, 784, 817, 6005, 254, 59, 87, 322, 23, 31, 35, 36, 43, 61, 65, 78, C, N, R); *Vasiliu E. Dan* (E); *Vasilescu Gabriel* (5129); *Wegener N. E.* (4772, 5593, 884, 6156, 295, 98, 315).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela «*Gazeta Matematică*».

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate, cu preţul de 800 lei volumul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—X, XII, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 150

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 180

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . Lei 500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . Lei 250

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 100

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.500

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 320

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 400

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 100

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . Lei 250

PENTRU BIBLIOTECI ŞI AUTORITĂŢI TOATE PREŢURILE SE TRIPLEAZĂ

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LIII abonamentele sunt:

Pentru profesori, studenţi şi elevi. . . . . Lei 480

Pentru autorităţi şi biblioteci . . . . . Lei 1.500

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1946 la 1 Iunie 1947 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este:

Pentru profesori, studenţi şi elevi . . . . . Lei 180

Pentru autorităţi şi biblioteci . . . . . Lei 400

Abonamentele se pot plăti la cont CEC Nr. 26220 sau se pot trimite unde se trimite şi corespondenţa, pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Te'efon. 7-3803).

C. 42.491.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIII

NUMĂRUL 2. — OCTOMBRIE 1947

NUMĂR COMEMORATIV.

SUMARUL

1. In memoria lui Ion Ionescu . . . . . *Gazeta Matematică*
2. Dare de seamă despre comemorarea lui Ion Ionescu . . . . . *Ing. R. P. Voinea*
3. Cuvântare ținută la inaugurarea casei de citire «Ion Ionescu» . . . . . *Ing. I. S. Antoniu*
4. Activitatea lui Ion Ionescu la Gazeta Matematică *G-l Gh. Buiculiu*
5. Cuvântul Academiei Române . . . . . *N. Vasilescu-Karpen*
6. Inginerul Ion Ionescu și societățile de științe *O. Onicescu*
7. Cuvântul Agirului . . . . . *Ing. Cr. Niculescu*
8. Inginerul Ion Ionescu . . . . . *Ing. G. Borneanu*
9. Profesorul Ion Ionescu . . . . . *Ing. D. A. Stan*
10. Activitatea profesorului I. Ionescu ca ofițer de rezervă . . . . . *Lt.-Col. M. Focșeneanu*
11. Ion Ionescu, Omul . . . . . *Ing. C. C. Teodorescu*
12. Cuvântul colegiului inginerilor . . . . . *Ing. E. Grapini*
13. Scrisoarea d-lui T. Constantinescu . . . . . *T. Constantinescu*
14. Scrisoarea d-lui Ing. I. Vardala . . . . . *I. Vardala*
15. Memoriu pentru înscrierea în colegiul inginerilor *I. Ionescu*
16. Testamentul Inginerului Ion Ionescu . . . . *I. Ionescu*
17. Asupra problemei 5527 . . . . . *N. Georgescu Roegen*
18. O clasă de funcțiuni transcendente întregi . . *N. Ciorănescu*
19. Concursul «Gazetei Matematice» din 1948 . . *Deleg. Gaz. Matematice*
20. Premiul «Inginer H. Capriel» . . . . . *Deleg. Soc. Gaz. Matem.*
21. Note matematice: 3—5.
22. Bibliografie.
23. Cereri: 344.
24. Diverse.
25. Probleme rezolvate: 2302, 2338, 3134, 3316, 3405, 6021, 6106, 6129, 6162.
26. Exerciții: 3—7.
27. Probleme propuse: 6401—6408.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAȚIONALĂ

1947

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Docteri sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **N. Georgescu-Roegen**, Licenţiat în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier) şi Ing. **D. Stan** (Locţiitor de casier).

Următoarele şedinţe ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:
Marţi 28 Octombrie ora 18: Adunarea materiei pentru Nr. 3.
Marţi 4 Noembrie ora 18: Facerea copertei pentru Nr. 3.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1947 sunt indicate în tabla de materii a volumului LII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **6391**, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **6400**, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

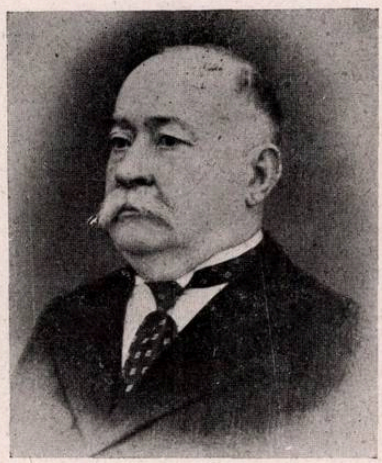
EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *«Gazeta Matematică»* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU „ 150
— Medalia comemorativă, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *«Gazetei Matematice»* . . . . . „ 500

IN MEMORIA LUI ION IONESCU

Societatea Gazeta Matematică închină acest număr, cu pietate şi recunoştinţă, memoriei Profesorului Inginer Ion Ionescu, unul din fondatorii revistei Gazeta Matematică şi primul iniţiator al scoaterii acestei reviste.



Conform dorinţei exprimată de el în articolul 7 al testamentului ce a lăsat, nu i s'a ţinut la înmormântare nicio cuvântare.

Astăzi, după un an dela trista ceremonie, găsim că este momentul să spunem cine a fost Ion Ionescu şi ce-a făcut el pentru Gazeta Matematică, pentru şcoală în general, pentru învăţământul tehnic superior şi pentru inginerie şi pentru a sublinia recunoştinţa pe care i-o poartă atâtea generaţii de corespondenţi ai Gazetei Matematice, publicăm în numărul de faţă soluţiile la câteva din problemele sale nepublicate încă. Ne-am străduit de asemeni ca problemele propuse în acest număr să fie, pe cât se poate, de factura problemelor pe care le propunea Ion Ionescu.

Dorim ca piosul nostru gând de recunoştinţă să fie o pildă generaţiilor viitoare după cum ne-a fost nouă pildă, viaţa de muncă desinteresată, cinstită şi curată a lui Ion Ionescu şi a colegilor săi Vasile Cristescu, A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica plecaţi prea de timpuriu din mijlocul nostru şi a căror memorie o asociem la pioasa comemorare de astăzi.

GAZETA MATEMATICĂ.

DARE DE SEAMĂ DESPRE COMEMORAREA LUI ION IONESCU

In ziua de 17 Septembrie s'a împlinit un an de când ne-a părăsit pentru totdeauna profesorul inginer Ion Ionescu iniţiator şi stâlp al *Gazetei Matematice*. Cu acest prilej Societatea *Gazeta Matematică* a organizat comemorarea marelui dispărut, după programul care a fost schiţat la p. 66, vol. LII al revistei.

Dimineaţa, la orele $11^1/_2$ s'a oficiat un parastas la locuinţa sa din strada Răsuri Nr. 25 şi o slujbă religioasă de sfinţire a *Casei de lectură Prof. Ion Ionescu*, lăsată prin testament societăţii.

Au asistat la această pioasă ceremonie: d-l Avocat Alexandru Ionescu, d-na şi d-l Ing. Broşu, din partea familiei.

D-nii Ing. Ramiro Zamfirescu şi Ştefan Nicolae din partea Ministerului Lucrărilor Publice.

D-nii Ing. I. S. Antoniu, N. Georgescu Roegen şi Ing. D. A. Stan din partea delegaţiei *Gazeta Matematică*.

D-nii Prof. Petrulian, Rectorul Politehnicei din Bucureşti, Prof. C. C. Teodorescu, Prof. Grigore Vasilescu, Prof. I. Chiţulescu şi Ing. Panaitescu din partea Politehnicei din Bucureşti.

D-nii Prof. Ing. Cristea Niculescu, Conf. Ing. Ştefan Bălan şi Ing. Petre Vernescu din partea societăţii A.G.I.R.

D-ra Gabriela Ţiţeica, d-ra Ana Ioan, D-ra Crăciunescu, d-nii Ing. Teodor Atanasescu, Ing. Luca Bădescu, Ing. Bedreag, Ing. Teodor Balş, Ştefan Blezu, Ing. Borneanu, G-ral Gh. Buicliu, Prof. V. Claudian, Ing. Tancred Constantinescu, Lt.-Col. Eduard Dragomirescu-Buzne, Ing. Th. Dumitrescu, Matei Dumitriu, I. B. Florescu, Lt.-Col. Focşeneanu, Ing. Ramiro Gabrielescu, d-na şi d-l Iacovache, C-dor Ing. Ioaniţescu, Ing. C. D. Ionescu-Ţiu, G-ral Gh. Liteanu, Prof. N. N. Mihăileanu, Constantin Pârvănescu, Avocat Al. Roşu, Petre Teodorescu, Ing. G-ral Grigore Zapan, etc.

Modesta locuinţă din strada Răsuri Nr. 25, era de o ordine şi o curăţenie desăvârşită, mulţumită grijei d-nei şi d-lui Iacovache, care merită toată lauda.

Interiorul este simplu, modest: câteva mese, fotolii, dulapuri neîncăpătoare pentru cele peste nouă sute de volume.

Sunt aci tratate de matematici elementare şi superioare, dela aritmetica, atât de mult iubită de Ion Ionescu până la Ecuaţiile Integrale, dela recreaţiile matematice ale lui Fourrey, până la funcţiile Abeliene, colecţii întregi de reviste tehnice şi matematice pentru uzul elevilor de liceu şi Politehnică.

Materialul acesta imens şi variat aşteaptă să fie răscolit de tinerii studioşi. Ei vor găsi aci hrană sufletească din belşug, apa vie care le va potoli setea de adevăr.

Pe pereţi numeroase tablouri ale familiei permit să se urmărească îndeaproape viaţa marelui dispărut. Unele îl înfăţişează la masa de lucru, la care-şi petrecea ore întregi fie pregătind zi de zi lecţiunile, fie studiind amănunţit subiectele proiectelor şi aplicaţiilor, fie corectând sau redijând soluţii trimise de corespondenţii *Gazetei Matematice*.

Altele înfăţişează reuşite siluete de poduri celebre sau splendide fotografii de pe valea Dunării în care pitorescul şi tehnicul se îmbină armonios.

Nu lipsesc tablourile care marchează momente importante din viaţa *Gazetei Matematice* pe care a iniţiat-o şi a condus-o cu atâta dragoste şi pricepere.

Modesta casă din strada Răsuri a devenit neîncăpătoare. Profesori, ingineri, admiratori ai celui ce le-a fost părinte şi îndrumător, au ţinut să vină în număr impresionant. Se vorbeşte în şoaptă ca în faţa unui altar. Deşi mort, Ion Ionescu trăieşte aevea în amintirile ce se deapănă din belşug.

La orele $11^1/_2$, cu o punctualitate demnă de marele dispărut, într'o linişte de mausoleu, se începe serviciul religios. Preotul Mântulescu, parohul bisericii Dichiu, cu glasul vibrant, plin de căldură, de o rară limpezime şi claritate, invoacă odihnă sufletească, pentru cel ce nu a cunoscut odihnă, iertare pentru cel ce a păzit cu sfinţenie calea dreptăţii şi a adevărului, linişte pentru cel ce a înfruntat cu statornicie vitregiile soartei.

A urmat apoi un scurt serviciu religios de sfinţire a casei, după care d-l Ing. I. S. Antoniu a rostit cuvântarea care se publică în paginile următoare.

Solemnitatea a luat sfârşit la orele 13,15.

* * *

După amiază la orele 17, a avut loc în sala « Ion Ionescu » a Şcoalei Politehnice din Bucureşti, comemorarea propriu zisă a marelui dispărut. Au luat parte:

D-nii Ing. I. S. Antoniu, Ing. Ştefan Bălan, G-ral Gh. Buicliu, Ing. E. Bunescu, Ing. Tr. Buradescu, Ing. V. Carbureanu, Prof. V. Claudian, Ing. T. Constantinescu, d-na şi d-l Georgescu Roegen, D-ra Mioara Crăciunescu, d-ra Ana Ioan, Prof. Mihail Hangan, d-na şi d-l A. Iacovache, Avocat Alexandru Ionescu, Prof. Petre Marinescu, Ing. I. Macovei, Prof. Gh. Murgeanu, Prof. O. Onicescu, Ing. Fl. Nedelcu, Prof. Al. Pantazi, Prof. D. Pompeiu, Ing. Vlad Rădulescu, V. Stamatescu, Ing. Alexandru Stoenescu, Prof. Ing. D. A. Stan, Prof. I. Stratilescu, Prof. C. C. Teodorescu, d-ra Gabriela Ţiţeica, Prof. E. Toporescu, Prof. Ing. N. Vasilescu-Karpen, etc.

Sala « I. Ionescu » n'a avut poate nicicând un auditoriu atât de numeros.

D-l Ing. I. S. Antoniu aminteşte în câteva cuvinte că scopul pioasei sărbători este de a comemora memoria profesorului inginer Ion Ionescu, la mormântul căruia, conform dispoziţiei lui, nu s'au ţinut cuvântări. Astăzi după un an, credem că se poate vorbi despre regretatul dispărut şi o facem cu recunoştinţa care se cuvine, pentru tot ce a înfăptuit el la *Gazeta Matematică* şi în celelalte multiple activităţi ale lui.

După aceasta d-l Ing. I. S. Antoniu dă pe rând cuvântul d-lor G-ral Gh. Buicliu, Profesor N. Vasilescu-Karpen, Prof. O. Onicescu, Ing. Cristea Niculescu, Prof. Ing. D. A. Stan, Ing. G. Borneanu, Lt.-Col. M. Focşeneanu, Prof. Ing. C. C. Teodorescu şi Avocat Al. Ionescu, ale căror cuvântări se publică în paginile care urmează.

D-l Avocat Al. Ionescu, ultimul vorbitor, este fratele dispărutului.

D-sa îşi aminteşte că a fost alături de Ion Ionescu, în toate împrejurările hotărîtoare din viaţa lui, alături de el în administrarea *Gazetei Matematice*. Incă din copilărie Ion Ionescu arăta înclinaţii spre inginerie, îi plăceau maşinile şi avea curiozitate ştiinţifică.

D-l Al. Ionescu promite că va da în scris o serie de amintiri, menite să caracterizeze cât mai complet personalitatea marelui dispărut.

Aduce mulţumirile familiei tuturor celor ce au luat parte la această comemorare. Işi aminteşte cu duioşie de gestul impresionant al d-lui G-ral Gh. Buicliu, care a aşezat în sicriul cu rămăşiţele pământeşti ale lui Ion Ionescu, primul număr din anul al LII-lea al *Gazetei Matematice*.

Ion Ionescu şi-a creat două divinităţi la care se închina: *Gazeta Matematică* şi Catedra de Poduri. Intrebat vreodată la care ţine mai mult, i-ar fi fost imposibil să răspundă.

Incheind, mulţumeşte delegaţiei *Gazetei Matematice* care a organizat această comemorare.

La orele 20,15 când şedinţa ia sfârşit, d-l Ing. Enea Grapini predă d-lui Ing. I. S. Antoniu cuvântul ce trebuia rostit din partea Colegiului Inginerilor, care se publică în numărul de faţă.

Sala se goleşte treptat, treptat. Doar figura masivă, autoritară a lui Ion Ionescu, dăltuită în bronz, veghiază neobosită, îndemnând generaţiile viitoare de elevi ingineri la muncă neprecupeţită, disciplinată, constructivă.

Fie ca dragostea lui de tineret, pentru care a iniţiat *Gazeta Matematică*, să rodească din plin, iar viaţa lui să rămână un exemplu nepieritor de muncă, de corectitudine, de totală dăruire.

Ion Ionescu va rămâne un pionier, un apostol al învăţăturii inginereşti.

Gazeta Matematică, care îi datoreşte viaţa şi sprijinul neprecupeţit îi va păstra o veşnică amintire.

Ing. R. P. Voinea.

CUVÂNTARE ŢINUTĂ LA INAUGURAREA CASEI DE CITIRE „ION IONESCU“

Onorată asistenţă,

Se împlineşte azi un an de când Profesorul Inginer Ion Ionescu ne-a părăsit plecând spre nesfârşit. Deşi ţintuit în pat de o boală nemiloasă de mai bine de trei ani, această dispariţie a căzut pentru cei care l'au cunoscut şi care l'au apropiat, cu un trăznet: pentru noi, cei dela *Gazeta Matematică*, golul lăsat este imens. In

adevăr, cu toate că aparent, nu mai lua parte la nici-o manifestaţie a Gazetei, era la curent cu tot ce se petrecea aci şi ori ce măsură se lua primea în prealabil aprobarea sa.

Profesorul Inginer Ion Ionescu a fost iniţiatorul şi unul din cei 10 fondatori ai *Gazetei Matematice*. Ei şi-a închinat întreaga sa viaţă şi Dumnezeu i-a hărăzit fericirea să o vadă la plină maturitate, păşind sigur în a doua jumătate a veacului. Ideia publicării unei reviste de matematici elementare s'a născut nu din dorinţa creării unei surse de venituri pentru tânărul inginer dela 1895 — sarcinile financiare ale celor 10 fondatori erau enorme: 15 lei aur lunar de fiecare — ci din dragostea şi grija mare pentru tehnica românească. Un spirit de înalt patriotism şi altruism a călăuzit pe Ing. Ion Ionescu în iniţierea acestei reviste. Ideia aceasta i-a apărut pe când era încă în Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele, când, supraveghind lucrările scrise ale candidaţilor la admiterea în şcoală, a văzut cât de slab pregătiţi erau absolvenţii liceelor noastre. Analizând cauzele, în discuţiile pe care le-a avut cu alţi camarazi ai săi, apoi, ca tânăr inginer, cu ceilalţi ingineri din birourile şantierului Podului dela Cernavodă, a ajuns la concluzia că numai o revistă de matematici românească va putea ajuta pe elevii liceelor în pregătirea lor pentru carierele technice sau ştiinţifice.

Şi ideia aceasta generoasă, concretizată în ceea ce este astăzi *Gazeta Matematică* s'a dovedit a fi fost una din cele mai fericite: 52 de serii de elevi de liceu, întinse pe trei generaţii şi-au format baza culturii lor ştiinţifice la *Gazeta Matematică*.

Profesorul Ing. Ion Ionescu putea fi mulţumit de opera sa.

Totuşi, mai ales în ultimul timp, când nivelul pregătirii ştiinţifice scăzuse iar la elevii de liceu, din nou preocupări ca cele din 1895 îl năpădiseră. Rezultatele activităţi elevilor la *Gazeta Matematică*, rezultatele concursurilor *Gazetei* — acea balanţă de verificare a nivelului cunoştinţelor matematice a elevilor de liceu, rezultatele concursurilor de admitere în Politechnica din Bucureşti, erau din ce în ce mai slabe. La aceasta, din cauza evenimentelor din ultimii opt ani se adăuga imposibilitatea procurării de cărţi străine. S'a născut atunci în mintea Profesorului Ing. Ion Ionescu ideia necesităţii creării unei săli de lectură pentru elevii de liceu, unde aceştia să aibă posibilitatea să consulte şi să citească tot ce ar avea ei nevoie pentru formarea lor ştiinţifică.

Casa *Gazetei Matematice*, unde există o foarte frumoasă bibliotecă, intimidează pe elevii de liceu care nu îndrăsnesc să intre acolo. Elevii de liceu — şi noi am fost la fel — concep pe cei dela *Gazetă* ca ceva inaccesibil cărora nu le pot înfrunta nici măcar privirea.

Profesorul Ing. Ion Ionescu cunoştea această psichologie a copiilor şi de aceea a vrut să le creeze un cadru potrivit mentalităţii lor.

Astfel a apărut în testamentul său, scris de mâna sa la 12 August 1946, adică cu o lună înainte de a părăsi această viaţă, că lasă casa din Str. Răsuri 25 şi întreaga sa bibliotecă matematică *Gazetei Matematice* pentru a se creia în ea o « Casă de citire » pentru elevii de liceu.

Această casă de citire o inaugurăm astăzi. Din cauza evenimentelor din ultimul timp ea nu se poate prezenta acum aşa cum iniţiatorul ei ar fi vrut să o vadă sau cum noi am fi vrut să o realizăm. Totuşi cele 900 volume pe care Profesorul Ing. Ion Ionescu le-a lăsat, completate cu cărţi de matematici elementare aduse din biblioteca *Gazetei Matematice*, sunt suficiente pentru a pune la îndemâna elevilor de liceu un material cu care să-şi completeze şi îmbogăţească cunoştinţele cât mai mult posibil. Ne lipseşte mobilierul adecuat, totuşi spiritul care pluteşte aici poate crea mediul propriu lecturilor ştiinţifice.

Gazeta Matematică nu a avut local propriu aproape 40 de ani. Vagabondând din birouri de minister în birouri de instituţii, cu arhivă răspândită în diverse poduri, a reuşit să formeze cultura matematică elementară la mii de elevi de liceu şi să contribue la formarea şcolii matematice româneşti,

Nădăjduim că şi această « Casă de citire » îşi va îndeplini rolul prevăzut de iniţiatorul ei, Profesorul Ing. Ion Ionescu, tot aşa cum şi-a îndeplinit rolul *Gazeta Matematică*.

Aşteptăm acum pe elevii de liceu să vină. Ei vor găsi aici, în afară de cărţile de matematici, şi îndrumări sau sfaturi, precum şi atmosfera de probitate ştiinţifică, de acea probitate ştiinţifică care a fost una din caracteristicile şi forţele Profesorului Inginer Ion Ionescu.

Ing. I. S. Antoniu.

ACTIVITATEA LUI ION IONESCU LA „GAZETA MATEMATICĂ“

Activitatea lui Ion Ionescu la *Gazeta Matematică* începe înainte de a fi apărut primul număr al acestei reviste, se continuă după încetarea lui din viaţă şi înglobează tot ceea ce se poate numi viaţa revistei *Gazeta Matematică* şi a societăţii *Gazeta Matematică* timp de 51 de ani.

In adevăr, tânărul inginer Ion Ionescu, este chemat în Septembrie 1894, deci cu un an înainte de apariţia primului număr al *Gazetei Matematice*, să supravegheze candidaţii la lucrarea scrisă la concursul de intrare în fosta Şcoală Naţională de Poduri şi Şosele, azi Şcoala Politehnică din Bucureşti.

Acest tânăr supraveghetor, proaspăt absolvent ca şef de promoţie al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele, nu s'a mărginit să observe ca unii candidaţi să nu copieze ci a urmărit de aproape conţinutul lucrărilor şi a rămas uimit de cunoştinţele slabe ale candidaţilor. El nu s'a mulţumit cu constatarea statică a acestei uimiri ci s'a gândit la ceva dinamic, la ceva operant, la un mijloc de îndreptare pentru şcoala pe care o cinstise cu o neîntrecută sârguinţă. După aproape o lună de frământări, în ziua de 4 Octombrie 1894, găsindu-se împreună cu inginerii Victor Balaban, Mihail Roco şi Ion Zottu, în biroul regretatului V. Cristescu din Str. Manea Brutaru Nr. 14, azi Str. General Budişteanu, a început discuţia asupra rezultatului dezastros al concursului din 1894 şi asupra mijloacelor de îmbunătăţire în viitor. I. Ionescu lucra pe vremea aceea la revista *Mathesis* şi ştia ce stimulent puternic pentru pregătirea în învăţământul matematic este o revistă matematică cu probleme variate. In discuţia care a avut loc între aceşti 5 ingineri s'a pus întrebarea « *de ce nu s'ar scoate o revistă de matematici în limba română* ». Răspunsul la această întrebare cerea bani pentru imprimat, energii şi pricepere pentru compus şi condus revista pe care o şi botezase cu numele ei de azi.

Ion Ionescu şi cei 5 colegi ai lui aveau cunoştinţele necesare şi priceperea pentru a compune şi conduce o revistă matematică iar în cursul anului şi-au găsit noui tovarăşi şi mijloacele materiale pentru a scoate revista al cărei prim număr a apărut la 15 Septembrie 1895.

Abia se aflase de inițiativa scoaterii *Gazetei Matematice* și fondatorii ei între care și d-l ing. TANCRED CONSTANTINESCU, aci de față, sunt solicitați să se contopească cu *Societatea Amicii Științelor Matematice*, care luase ființă la 29 Iunie 1894 sub președinția profesorului C. GOGU. Opoziția lui V. CRISTESCU, I. IONESCU și I. ZOTTU a oprit înfăptuirea acestei contopiri și astfel a luat ființă *Gazeta Matematică*, ca organ aparte.

Pentru asigurarea fondurilor de tipărit, inițiatorii ei s'au oprit la formula cotizațiilor personale, excluzând orice apel la subvenții sau donații.

Din această scurtă expunere se vede cum a activat ION IONESCU la *Gazeta Matematică* chiar înainte de a fi apărut primul ei număr [1]).

De atunci și până la finele lui August 1946, adică până numai cu câteva săptămâni înainte de a-și da sfârșitul, ION IONESCU a fost și sufletul, nu numai stâlpul *Gazetei Matematice*.

El s'a ocupat de administrația și a îndrumat administrația *Gazetei Matematice*, el a fost inițiatorul și susținătorul tuturor desvoltărilor *Gazetei Matematice*, el a fost frâna contra tuturor așa ziselor propuneri de reforme în structura *Gazetei Matematice*, reforme care tindeau să-i altereze caracterul inițial; el a fost sfătuitorul continuu al celor care cereau sprijin și sfat la *Gazeta Matematică*, el a fost pavăza de care se frângeau încercările unor erezii matematice.

ION IONESCU a administrat la început fondurile care se strângeau dela redactori pentru tipărirea *Gazetei Matematice*. Cu o grijă, nebănuit de mare, urmărea ca niciun ban să nu se cheltuească peste strictul necesar asigurării tipăritului. Vigilența lui mergea așa de departe încât nici chiar pentru căratul pachetelor de reviste la poștă nu voia să dea vreun ban, împovărând cu acest balast gratuit pe fratele său mai tânăr ALECU IONESCU.

Tot ION IONESCU a pus problema construcției unui local pentru *Gazeta Matematică* și a făcut parte din comisia care a supraveghiat construcția casei *Gazetei Matematice*.

---

1) Pentru detalii se poate consulta articolul scris de ION IONESCU în primul volum jubilar scos cu ocazia împlinirei a 40 de ani de apariție a revistei.

Incă dela apariţia primelor numere, a stabilit şi un contact sufletesc cu corespondenţii de pe vremuri scriindu-le spre a-i îndruma la rezolvarea vreunei probleme, atrăgându-le atenţia asupra vreunei scăpări în soluţia dată, indicându-le putinţa vreunei generalizări sau îndreptându-i spre vreo carte din care să-şi completeze cunoştinţele. Toate acestea le făcea într'un stil blajin de dascăl sufletesc. Se întâmpla însă câteodată să adreseze şi admonestări pentru neglijenţă în formă sau pentru copiere dela un coleg mai experimentat. Aceste admonestări erau extrem de severe, dar ceea ce era în adevăr dureros erau dojanele pe care le făcea acelora pe care-i prindea că au copiat probleme de prin cărţi şi le-au trimis ca originale la *Gazeta Matematică*. Ion Ionescu era neîndurat de aspru cu ei. Sunt mulţi, şi încă cu cariere foarte frumoase, dintre acei care au primit sfaturile blajine sau usturătoarele dojane ale lui Ion Ionescu, sfaturi sau dojane care le-a servit ca lecţii pentru viitor.

Toate iniţiativele care au urmat în cursul desvoltării *Gazetei Matematice*, se datoresc în cea mai mare parte lui Ion Ionescu. El a înfiinţat rubrica *Note Matematice*, el rubrica *Exerciţii*, rubrica *Diverse*, rubrica *Cereri* şi *Suplimentele* cu recreaţii matematice. Tot Ion Ionescu este acela care în 1902 propune colegilor din redacţie să se dea premii corespondenţilor cu o activitate deosebită şi prin aceasta se înfiinţează concursurile *Gazetei Matematice*, din care primul în forma de azi a avut loc în 1909. După concursurile prin corespondenţă din anii 1903 şi 1904 au urmat concursurile ţinute simultan în mai multe oraşe. La primul din aceste concursuri, Ion Ionescu s'a dus la Bârlad să conducă concursul cu concurenţii de acolo. Când Ion Ionescu a intrat în sala în care trebuia să se ţină concursul, a găsit-o goală. Un concurent vine şi-i comunică că liceul având o serbare, concurenţii au diferite roluri şi nu pot veni la concurs. Ion Ionescu roagă pe elev să transmită directorului liceului următoarele: « *Ministerul mi-a pus la dispoziţie o sală şi am delegaţie dela Gazeta Matematică să stau patru ore în acea sală şi voi sta patru ore în acea sală* ». Insuşi Ion Ionescu povesteşte că după această comunicare « *mi-am scos pardesiul şi m'am aşezat pe catedră, rămânând singur. După câtva timp au venit toţi candidaţii înscrişi, iar ceva mai târziu am primit şi vizita Domnului Director al Liceului...* ».

Până în 1942 inclusiv a făcut parte din toate comisiile dela concurs ca examinator pentru aritmetică.

In cursul anului 1899, deci numai după 4 ani dela apariţia primului număr al *Gazetei Matematice*, Ion Ionescu pune problema scoaterii de culegeri de probleme. La această grea problemă s'au asociat fără şovăire colegii V. Cristescu, A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica şi scot primul volum de *Culegere de probleme* care apare în 1901. Partea de aritmetică a culegerii este întocmită de Ion Ionescu. Acestui volum, care s'a epuizat în 1912 i-au urmat pe rând celelalte 23 de volume care se găsesc în biblioteca *Gazeta Matematică* şi care au adus foloase netăgăduite învăţământului matematic la noi în ţară.

Dacă iniţiativa scoaterii acestor culegeri este a lui Ion Ionescu, trebue să subliniem, pentru istoric, că structura lor este datorită aproape exclusiv marelui profesor şi pedagog G. Ţiţeica. Modul de prezentare şi de redijare a primului volum, deşi compus de 4 autori, este de o omogeneitate izbitoare ceea ce dovedeşte unitatea de vederi a celor 4 autori; de altfel această unitate se observă şi la volumele următoare, compuse de alţi autori membrii ai societăţii *Gazeta Matematică*, ceea ce dovedeşte o încadrare perfectă în ceea ce numim spiritul şi metoda *Gazeta Matematică*.

Cu cât *Gazeta Matematică* înaintează în vârstă, iniţiativele lui Ion Ionescu devin mai numeroase. El iniţiază înfiinţarea bibliotecii tehice a *Gazetei Matematice* şi tipăreşte în această bibliotecă cartea *Beton armat* a cărei primă ediţie din 1915 a avut un prea frumos succes de librărie, fiind primul curs tipărit în româneşte în această materie. Este interesant să reamintesc că mijloacele pentru tipărit acest prim volum au fost puse la dispoziţie tot de Ion Ionescu. El era pe atunci profesor titular la catedra de lucrări grafice la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele şi a suplinit pe Anghel Saligny, în ultimii săi ani de profesorat, la catedra de poduri. Pentru această suplinire Ion Ionescu avea drept la un salariu. El a considerat însă, că deşi avea un spor de muncă, nu este drept să primească şi un spor de salariu şi nici nu l-a primit cu toate insistenţele pe care i le făcea Anghel Saligny. In faţa refuzului repetat a lui Ion Ionescu, profesorul inginer Anghel Saligny a depus la Casa de Depuneri salariul ce se cuvenea lunar suplinitorului său I. Ionescu iar la retragerea sa

din învăţământ, ANGHEL SALIGNY i-a înmânat lui I. IONESCU o recipisă de 13.750 lei care reprezenta suma strânsă lună de lună a lefurilor ce se cuveneau lui ION IONESCU. Acesta mulţumeşte, dar nu primeşte suma pentrucă scria el, « *legea cumulului nu permite ca cineva să aibă o funcţiune şi două catedre şi că ceea ce nu este permis a se face pe faţă, nu este bine să se facă în mod oricât de bine deghizat* ».

Ce lecţie minunată pentru toate timpurile.

In 1920, ION IONESCU se asociază la propunerea lui G. ŢIŢEICA de a fixa vocabularul matematic român şi colaborează cu regretaţii G. EM. FILIPESCU, A. G. IOACHIMESCU, TR. LALESCU şi G. ŢIŢEICA, tipărind primul *Vocabular matematic român*, care a apărut în 1923 în Vol. IX al Bibliotecii *Gazeta Matematică*.

Mai târziu susţine propunerea d-lui Prof. V. MARIAN de a se tipări la *Gazeta Matematică* în româneşte *Elementele lui* EUCLID, care au şi apărut în Biblioteca istorică a *Gazetei Matematice*, în 3 volume şi este o carte de mare valoare pentru cel mai pretenţios bibliofil.

Familia regretatului profesor G. ŢIŢEICA, prin d-şoara GABRIELA ŢIŢEICA oferă *Gazetei Matematice* suma de 100.000 lei pentru tipărituri. ION IONESCU este acela care propune înfiinţarea unei biblioteci de matematici, în care să se tipărească monografii şi care să poarte numele ilustrului profesor G. ŢIŢEICA. Primul volum din această bibliotecă, *Maxime şi minime geometrice*, este scos de ION IONESCU. Fără a insista asupra felului magistral în care este alcătuit acest volum şi asupra soluţiilor originale şi frumoase pe care le dă diferitelor probleme, nu mă pot reţine de a sublinia partea istorică din primele pagini ale volumului.

Fiind un pasionat admirator al operelor marilor gânditori, a propus încă din anul 1937 să se tipărească în româneşte marea operă « *Philosophiae naturalis principia mathematica* » a lui NEWTON. ION IONESCU dorea ca în 1942, când se împlineau 300 de ani dela moartea marelui NEWTON, *Gazeta Matematică* să aibă tipărită celebra lucrare, de aceea l-a mobilizat pe d-l profesor V. MARIAN cerându-i să termine traducerea în timp şi pe d-l profesor V. VÂLCOVICI cerându-i s'o revadă. Manuscrisul este gata. ION IONESCU a avut mulţumirea împlinirii unui gest pios pentru marele gânditor al omenirii dar a murit cu regretul că biblioteca românească

nu s'a putut îmbogăți cu acea monumentală lucrare, din cauza prețului excesiv al tiparului.

La ședința care a avut loc la începutul anului 1909 la Societatea Politehnică ce se afla cu chirie la etajul I din casa dela întâlnirea străzei Episcopiei cu strada Exarcu, Ion Ionescu pune problema asigurării continuității *Gazetei Matematice*. S'au emis diferite păreri: strângeri de fonduri și plasamente la bănci, atragere de mai mulți redactori și alte propuneri dintre care n'a lipsit și afilierea la vreo instituție de durată cum ar fi Școala Națională de Poduri și Șosele, Universitatea sau altele. In timpul discuției, A. G. Ioachimescu întreabă *« ce-ar fi dacă ne-am constitui în societate ca persoană juridică »*, la care Ion Ionescu răspunde *« la asta m'am gândit și eu și am vorbit cu fratele meu* Alexandru *care se oferă să ne facă gratis formalitățile necesare »*.

Pe atunci era ministru la instrucția publică Spiru Haret, care aprecia munca dela *Gazeta Matematică* și care a înlesnit trecerea în parlament a legii de constituirea Societății *Gazeta Matematică*. Ion Ionescu și G. Țițeica fac parte din prima delegație care administrează noua societate cu începere dela 1 Septembrie 1909.

Și acum *Gazeta Matematică* propriu zisă, scumpa lui *Gazetă Matematică*, este revista la care a colaborat continuu până cu o lună înainte de a muri. Dacă mijloacele ar îngădui, activitatea lui Ion Ionescu la revista *Gazeta Matematică* ar trebui să fie redată printr'un volum omagial, care să cuprindă tot ce a publicat [1]) el în *Gazeta Matematică*. O va face, poate, vreuna din generațiile viitoare care sunt datoare să scoată volume omagiale pentru fiecare din ceilalți trei mari susținători ai *Gazetei Matematice*: V. Cristescu, A. G. Ioachimescu și G. Țițeica.

Noi nu putem astăzi decât să ne limităm a enumăra succint din materialul pe care l-a publicat Ion Ionescu în *Gazeta Matematică*.

Înșirat pe capitole, *Gazeta Matematică* publică articole, note matematice, chestiuni de examen, bibliografii, cereri, diverse, probleme rezolvate, exerciții și probleme propuse. Ion Ionescu pu-

1) Pentru moment se pot consulta tablele de materii ale celor 52 de volume apărute.

blică numeros material în fiecare din aceste capitole, după cum arăt în cele ce urmează.

El a tipărit în *Gazeta Matematică* 14 articole de aritmetică, 7 de algebră, 7 de geometrie, 4 de trigonometrie, 1 de geometrografie, 1 de geometrie analitică, 1 de calculul integral şi infinitezimal, 3 de mecanică, 2 de metodologie, 1 de balistică, 6 referitoare la învăţământul matematic, 20 de istoria matematicilor şi 10 articole cu subiecte diverse în total 77 de articole cuprinzând aproape toate ramurile matematicelor, cu predominarea aritmeticei care era baza înclinărilor lui.

Primele lui articole de aritmetică se ocupau de operaţiunile elementare în care a dat metode practice pentru efectuarea operaţiunilor aritmetice. Sunt de semnalat articolele *Calculul aritmetic cu numere specificate* (XVI—200—241), *Patrate gemene* (XX—203, 241, 401, 441) şi *Aritmetica juridică* (XXIV—145). In primul din aceste 3 articole caută să lămurească confuziunea care se face la înmulţire, care de fapt este o adunare, unde factorii reprezintă mărimi diferite. Dacă 5 oameni au lucrat 4 zile cu 3 lei pe zi scriem că s'au plătit

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ lei},$$

fără să avem vreun mijloc de a şti ce reprezintă fiecare din numerele abstracte din membrul I şi fără a înţelege de ce înmulţind oameni cu zile şi cu lei obţinem lei. Ion Ionescu propune ca numerele să se scrie cu diferite culori după obiectele pe care e reprezintă şi apoi dă şi rezolvă câteva probleme practice, dintre care unele cu necunoscuta la gradul al douilea.

In articolul *patrate gemene* publicat în 4 numere ale revistei se ocupă de patratele ca $441 = 21^2$ şi $841 = 29^2$ care au toate cifrele identice afară de prima dela stânga, le găseşte forma generală, construeşte diagrame pentru aflarea lor şi stabileşte proprietăţile generale ale acestor patrate curioase. Este dela sine înţeles că Ion Ionescu nu s'a limitat la baza zecimală de numeraţie ci a rezolvat problema şi în cazul general al unei baze oarecare.

Aritmetica juridică este un articol şi interesant şi amuzant. Se ştie că legile, contractele, testamentele, actele de asociaţie, sau orice act juridic în care intră date numerice, dau naştere la fel de fel de interpretări şi duc la paradoxuri şi la procese in-

terminabile din cauza nepreciziunilor, ba câte odată duc şi la comicării. Ion Ionescu a dat soluţii la câteva exemple caracteristice, chestiunile de asemenea natură neputându-se clasifica din cauza varietăţii lor. Vă citez un exemplu: un bărbat cade greu bolnav şi moare. In testamentul rămas dela el, se prevede o normă de împărţirea averii în cazul când nevasta, care era însărcinată, va avea o fată şi altă normă în cazul când va avea un băiat. Se întâmplă însă că în ziua sorocului se naşte o fată şi un băiat gemeni. Cum se va împărţi acum averea între mamă şi cei doi copii? Problema datează din timpul Romanilor. Ion Ionescu dă soluţiunea pe care ar trebui să o dea matematicienii unor astfel de probleme care dau de lucru magistraţilor şi aduc beneficii avocaţilor.

Articolul *Comparaţiunea rădăcinilor mai multor ecuaţiuni de gradul al doilea*, ocupă mai multe numere din volumele III, IV şi V şi este un studiu complet, o teorie întreagă care s'a scos şi în broşură a parte, broşură ce n'ar trebui să lipsească din biblioteca niciunui mânuitor al matematicelor. In acest studiu s'a ocupat atât de ecuaţiile cu rădăcini reale cât şi de acelea cu rădăcini imaginare.

In trigonometrie este caracteristic articolul *Un nou metod pentru studiul trigonometriei*, în care reuşeşte să rezolve problemele de trigonometrie numai cu cunoştinţe de aritmetică şi cuprinde noţiuni de algebră şi geometrie. Metoda şi rezultatele din acest articol dau putinţa arpentorilor şi conductorilor de poduri şi şosele care nu au cunoştinţe mai întinse, să poată rezolva cu uşurinţă problemele pe care le întâlnesc în practica de toate zilele a preocupărilor lor.

In articolele *Consideraţiuni practice la alcătuirea şi rezolvarea problemelor de matematică* (Vol. XVI, XVII şi XXXVIII) scoate în evidenţă greşelile ce se fac în compunerea unor probleme numerice când se ajunge la rezultatul că un automobil merge mai încet decât un car cu boi şi dă îndrumări practice de alcătuirea acestor probleme. Pedagogia matematicelor elementare ar trebui să înceapă cu acest articol.

Trebue să menţionăm în mod deosebit articolele de geometrografie intitulate *Practica construcţiunilor grafice sau geometria aplicată* (Vol. X, XI XIII şi XIV). Aceste articole au fost strânse în volum aparte. In ele se dau metode practice de construcţii,

se pun coeficienţi fiecărei operaţiuni de desen şi se caută construcţia cea mai economicoasă. Autorul a propus şi probleme în legătură cu aceste articole, probleme care au interesat în mod deosebit pe unii corespondenţi.

S'a ocupat şi de probleme sociale cum este de exemplu articolul *Reprezentarea proporţională* (XXII) inspirat de modificarea unor articole din constituţie în 1917 la Iaşi. In acest articol precizează cum trebue să se facă, pe bază matematică, calculele la alegerile în care se prescrie reprezentarea proporţională. A propus şi probleme relativ la această chestiune. (Problema 3536, Vol. XXXII).

Ion Ionescu este propriu zis acela, care a pus bazele studiului istoriei matematicilor în ţara românească prin articolele pe care le-a scris în *Gazeta Matematică* despre cărţile vechi de matematici şi despre oamenii din vechime care au avut cât de cât preocupări matematice.

In cadrul articolelor scrise de Ion Ionescu se pot cita şi 4 dări de seamă asupra unor congrese matematice precum şi un număr de 5 necrologuri.

După articole, urmează note matematice. In acest capitol Ion Ionescu a scris de asemeni note din diferitele ramuri ale matematicelor publicând un total de 154 note din care 16 de aritmetică, 12 de geometrie, 5 de algebră, 1 de trigonometrie, 2 de geometrie analitică, 7 de mecanică, 1 de metodologie, 49 de istoria matematicelor şi 61 diverse.

Urmează apoi capitolul bibliografie, cel mai gingaş capitol din orice revistă. A scrie şi a-ţi da părerea despre o publicaţie înseamnă a avea, pe lângă cunoştinţele necesare o independenţă şi o subiectivitate nealterată de niciun factor de ordin afectiv sau interesat. Şi mai trebue ceva. Trebue să nu-ţi pese dacă s'o supăra pe tine acela pe care l-ai criticat sau dacă ţi-ai face duşmani pe duşmanii aceluia pe care l-ai lăudat. Ion Ionescu avea şi subiectivitatea necesară şi independenţa de caracter să-şi spună părerea aşa cum o simţea el, şi simţea totdeauna adevărul adevărat. Iar de duşmănii nu-i păsa după cum nu-l încălzeau nici prieteniile interesate. Graţie acestor calităţi, al acestor puteri am putea spune, critica lui conta. Deşi supăra pe unii autori, dădea în schimb adevărat nimb acelora pe ale căror lucrări le reco-

manda. Nu-şi cruţa nici pe colegii din *Gazeta Matematică*. Recenzând o carte a unui coleg scrie că are *deformaţiuni permanente*. Autorul a ţinut seamă de critica severă a lui Ion Ionescu pentrucă la ediţiile următoare nu s'a mai putut găsi nici urmă de vreun fel de deformaţiune.

Neîntrecut de usturătoare au fost recenziile lui Ion Ionescu la lucrările acelora care se ocupau de problemele clasice ca teorema lui Fermat, pe care i-a numit fermatişti, sau de cadratura cercului.

In total a publicat în *Gazeta Matematică* 198 de bibliografii din care 122 pentru cărţi şi publicaţii străine şi 70 pentru cărţi şi publicaţii româneşti.

In anul 1915, el înfiinţează rubrica cereri în care, după exemplul revistei *The Matematical Gazette*, se pun întrebări privitoare la istoricul, studiul sau învăţământul matematicelor şi cărora redacţia nu le poate da răspuns imediat. Până la moartea lui Ion Ionescu s'au publicat 340 de cereri din care mai mult de 70% sunt întrebări puse de el. Iată două exemple de astfel de cereri: *care este prima carte scrisă în limba română în care se vorbeşte despre logaritmi* sau *ce se ştie despre studiile matematice ale lui* Antioh Cantemir.

Sunt corespondenţi, şi mai tineri şi mai în vârstă, care răscolesc biblioteci şi răsfoesc volume şi care dau răspunsuri foarte interesante la parte din aceste cereri. Aceste răspunsuri formează un foarte documentar material pentru istoricul matematicelor în ţara noastră.

Tot Ion Ionescu este acela care a înfiinţat în Vol. XXI rubrica *Diverse*, pentru a pune pe corespondenţi în curent cu unele fapte care interesează pe cei ce se ocupă cu matematicele. In primele 5 volume următoare, rubrica *diverse* a fost redijată în întregime numai de Ion Ionescu. In această rubrică el a înscris cărţile care s'au donat pentru biblioteca *Gazeta Matematică* în urma apelului făcut de el în articolul întitulat *Biblioteca Gazeta Matematică* (XL).

Capitolul cel mai interesant pentru corespondenţii *Gazetei Matematice* este capitolul problemelor în care Ion Ionescu a adus o contribuţie nepreţuită. Până în Decembrie 1942, când a căzut paralizat, a propus în fiecare număr (cu excepţia numerelor 10 I,

12 III, 11 IV, 8 şi 11 V, 12 XVIII, 1, 2 şi 4 XXII), 5 XXV, 3, 5, 8, 10, 11 XXVI, 4 XXVII, 11 XXVIII, 7 XXIX, 2 XXXIX) cel puţin câte o problemă. In Martie 1943, două luni după ce căzuse la pat a început din nou să propună probleme şi a continuat cu mici întreruperi până în Martie 1946 când l-au părăsit puterile.

In total a propus 626 probleme din care 276 de aritmetică şi teoria numerelor, 156 de geometrie, 96 de algebră, 33 de trigonometrie, 6 de fizică, 38 de mecanică, 2 geometrografie, 1 de calculul probabilităţilor, 11 de geometria analitică, 3 de calcul integral şi diferenţial, 2 de cosmografie, 1 de topografie şi 1 problemă 1056 pe care nu o pot încadra şi care întreabă *cum se poate anamorfoza planul aşa ca să efectuăm înmulţiri cu rigla fără a ajunge la logaritmi?* Problema este în legătură cu un articol al lui asupra anamorfozei şi este regretabil că nu ne-a lăsat soluţia ei. Aceste 626 de probleme cu soluţiile lor sunt suficiente să completeze o voluminoasă culegere de probleme.

Problemele lui Ion Ionescu sunt foarte atractive, deşi grele, pentrucă conţin în enunţul lor o parte de mister cu multe semne de întrebare şi pentrucă prin natura lor nu se rezolvă numai aplicând una după alta o serie de teoreme înlănţuite, ci contând pe mijloace proprii ceea ce face pe rezolvitor să aibă emoţiile şi plăcerile unui original descoperitor când a reuşit să găsească soluţia. Problemele lui Ion Ionescu sunt investigative şi în acelaşi timp cer o meticuloasă cercetare a diferitelor şi câte odată a numeroaselor cazuri care se pot ivi. Câţi din cei mai dotaţi corespondenţi ai *Gazetei Matematice* n'au încercat să găsească numai cu compasul diametrul secţiunii unei bare cilindrice circulare ruptă neregulat (Problema 1364)? Câţi n'au voit să găsească cifra dela mijlocul lui 5^{100} (597)? In afară de partea investigativă problemele lui Ion Ionescu au şi un caracter practic iar unele din ele se leagă cu evenimente sociale, istorice sau calendaristice. Aşa în problema 100 întreabă care sunt anii în care Paştele se va serba în aceeaşi zi la toţi creştinii. In parlamentul din 1907/8 se votează legea cârciumelor. Ion Ionescu pune problema 1297 prin care cere cea mai mare întindere pe care ar putea-o avea un sat pentru ca în el să nu fie posibilă deschiderea niciunei cârciume atunci când se limitează distanţele care trebue să fie între

cârciumă şi şcoală, biserică şi primărie. In 1912/13 când România ridica pretenţiuni asupra unui oraş a unei ţări vecine Ion Ionescu pune problema 1916 în care scrie literile acelui oraş una după alta în ordine alfabetică şi presupunând că se scriu 6 permutări pe minut întreabă în cât timp se ajunge la scrierea corectă a numelui acelui oraş sau în timpul boalei care l-a dus în mormânt pune problema 6006 în care fixând anul, ziua şi ora la care s'a produs primul bombardament asupra Bucureştilor, întreabă care sunt datele corespunzătoare în ţările de unde vin escadrilele de bombardament.

Alte ori citind cărţi vechi de istorie sau literatură dă de fraze ca următoarea a lui Costache Conachi: « *Dovedita împreunare a trei moşii într'un colţ, fireşte şi pe a patra moşie, în lipsă de alte dovezi temeinice arătătoare de semne sau măsorişte* », care este o urmare a regulei că limitele moşiilor le formau crestele despărţitoare ale apelor curgătoare. Propune problema (3545) întrebând dacă « *este adevărată această teoremă* »?

Sau pune o problemă asemănătoare din o poezie a lui Eminescu sau întreabă « *care sunt persoanele care îşi pot serba ziua naşterii în aceeaşi zi a lunii?* » (Problema 4111) întrebare la care s'ar răspunde cu uşurinţă făcând diferenţa între durata anului astronomic şi durata anului calendaristic dacă n'ar fi încurcătura pe care o fac anii bisecţi, dacă congresul panortodox dela Constantinopol n'ar fi hotărît ca din anii multiplii de 100 să nu fie bisecţi decât cei de forma $9\,m + 2$ şi $9\,m + 6$ şi dacă mai ales n'ar fi în enunţ cuvântul *persoanele* care te obligă să te gândeşti şi la alte calendare decât la cele creştine.

Din cauza caracterului lor investigativ, multe din problemele propuse de Ion Ionescu, au rămas nerezolvate.

Ion Ionescu îşi redija problemele cu o deosebită meticulozitate, căutând să nu-i scape nicio soluţie chiar în problemele de aritmetică cu multe soluţii.

El a redijat şi multe probleme propuse de alţii. N'am putut identifica decât 31 de astfel de probleme, anume pe acelea semnate la finele soluţiei cu I. I.

La finele mai tuturor problemelor redijate de el, Ion Ionescu adaugă notiţe cu completări, observări şi numeroase trimiteri.

Ion Ionescu a fost permanent redijorul suplimentelor cu recreaţii matematice unde pe lângă partea distractivă a jocurilor şi glumelor matematice găsea mijlocul să adauge câte o lecţie de morală şi câte odată de patriotism sau să intercaleze anecdote istorice din viaţa matematicienilor.

Tot în cadrul activităţii lui Ion Ionescu la *Gazeta Matematică* se înscriu şi cuvântările pe care le-a ţinut la diferitele solemnităţi ale redacţiei sau societăţii *Gazeta Matematică*.

In fine o contribuţie de mare preţ istoric sunt articolele pe care le-a scris în cele 2 volume jubilare, scoase cu ocazia împlinirii a 40 şi apoi a 50 de ani de apariţie regulată a *Gazetei Matematice* în special articolul *Constituirea, administrarea şi redactarea Gazetei Matematice*, publicat în primul volum jubilar unde dă amănunte interesante din istoricul acestei reviste şi articolul *Cei care nu mai sunt*, publicat în al doilea volum jubilar unde fixează viaţa acelora care au trecut pe la *Gazeta Matematică*, membri sau corespondenţi decedaţi. Ion Ionescu ţinea mult să nu se uite trecutul care, cu sau fără păcate, este sursa vieţii şi a activităţii pe care o continuă prezentul. El nu admitea discontinuităţi nici în ordinea morală, nici în ordinea socială nici în ordinea evolutivă în general. Admitea numai salturi.

In primul din aceste 2 articole face, după cum am spus, istoricul amănunţit al vieţii *Gazeta Matematică* în primii 40 de ani de apariţie. Imi pare rău că n'a povestit nimic despre şedinţele dela începutul *Gazetei Matematice*. Schiţez eu un crâmpei pentru unele şedinţe, legate de atmosfera lui Ion Ionescu. Când eram puţini membri în redacţia *Gazeta Matematică*, cam până la 1912, şedinţele se ţineau la Societatea Politehnică care-şi avea sediul lângă Ateneul Român sau în casa câte unui membru de redacţie. Pe atunci Ion Ionescu locuia în strada Călugei Nr. 23 în casa din fundul curţii — cu faţa spre stradă. In camera din dreapta uşii avea biroul. In această cameră era o masă birou mare, dulapuri tixite cu cărţi catalogate, o canapea şi câteva scaune. O lampă de petrol atârna de tavan şi una cu picior era pe masă. Pe jos erau levicere. Era un aranjament modest dar extrem de cald, o atmosferă caldă de pur intelectual. Ne adunam acolo cam odată la 2 luni. El şedea de obicei la birou. Ii încredinţam manuscrisele sau îi citeam numele rezolvitorilor pentru

facerea copertei. Apoi începea vorba. Se vorbea despre corespondenţi, despre gazetă, despre probleme, despre cărţile apărute. Se făceau glume matematice sau se povesteau întâmplări inginereşti ori de ale profesorilor. Nu se discuta nicio iotă despre politica internă sau externă, nu se făceau personalităţi şi nu se puneau niciodată probleme de interes personal. In mijlocul acestei atmosfere apărea o tablă mare cu crafle şi cu pahare cu vin. Plecai dela şedinţă cu satisfacţia cu care pleacă credincioşul din templu.

Alte ori, cam prin vacanţa de vară sau în spre toamnă făceam şedinţele la Valea Călugărească la via pe care o avea acolo Ion Ionescu. Acolo se păstra acelaşi ritual şi aceeaşi atmosferă ca şi în str. Căluşei Nr. 23.

Tradiţia de atunci, mai puţin vinul şi craflele, s'au înrădăcinat aşa de puternic la *Gazeta Matematică* încât şi astăzi căutăm să o menţinem nealterată în şedinţele din *Casa Gazeta Matematică*.

Gazeta Matematică a fost ameninţată de întrerupere în primul războiu mondial, în timpul refugiului la Iaşi. Ion Ionescu era pe atunci mobilizat cu gradul de maior la Marele Cartier General la Iaşi. Aici a stăruit din răsputeri şi a scos *Gazeta Matematică*, fiind ajutat în special de Tr. Lalescu şi de ceilalţi membri care se găseau la Iaşi. A scos astfel la Iaşi la tipografia H. Goldner, Str. Gh. Mârzescu, întreg Vol. XVIII în 288 pagini, aşa că graţie stăruinţei neobosite a lui Ion Ionescu viaţa *Gazetei Matematice* nu a fost întreruptă nici în împrejurările grele din 1917/18. In acest volum XVIII abundă subiectele de balistică şi de probleme în legătură cu armata

Este curios şi totuşi este potrivit răutăţii şi invidiei omeneşti, că activitatea atât de dezinteresată a lui Ion Ionescu la *Gazeta Matematică* a stârnit unele duşmănii. Au fost glasuri care i-au reproşat că se amestecă în matematici unde nu are competenţa necesară, şi că face recenzii la cărţile profesorilor de matematici când de acestea trebue să se ocupe numai profesorii de matematici.

Acelor glasuri, anonime sau nu, le-a răspuns răspicat şi semnat prin articolul intitulat *Grafomaţii* (XIX), în care dovedeşte, dacă mai era nevoie de dovadă, că el Ion Ionescu se amestecă în matematici pentrucă are şi ştiinţa şi experienţa şi putinţa necesară şi că el este un *filomat*.

De asemeni acelora care, din interes pentru *Gazeta Matematică*, sau poate din alte cauze decât purul interes, caută greşelile care se strecoară în *Gazeta Matematică* şi care inerent se pot strecura în orice publicaţie, le amplifică, le difuzează şi le califică altfel de cum sunt, le-a răspuns documentat şi sper convingător în articolele *Erorile de tipar în cărţile de matematică* (L) şi *Erare humanum est* (XLVI) şi şi-a continuat nestingherit activitatea dela *Gazeta Matematică* unde, în ciuda criticelor sterpe rodul muncii sale *adevărat desinteresate* continuă şi va continua mulţi ani, atâta timp cât se vor găsi entuziasme de factura desinteresată a acelora care-l moştenesc pe Ion Ionescu şi pe iluştrii săi tovarăşi V. Cristescu, A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica.

Am spus la început că activitatea lui Ion Ionescu la *Gazeta Matematică* continuă şi după încetarea lui din viaţă. Aşa este. Ion Ionescu activează şi va activa la *Gazeta Matematică* prin problemele care i-au rămas nerezolvate şi care probabil că nu se vor publica mulţi ani de aici înainte din cauza greutăţii lor. Ion Ionescu activează la *Gazeta Matematică* prin culegerile de probleme publicate şi care vor fi scoase cu siguranţă în noui ediţii, el activează prin manuscrisul de culegere de probleme de aritmetică comercială pe care nu l-am putut publica încă şi activează prin casa din str. Răsuri 25, care sperăm să devină str. Inginer Ion Ionescu, casă pe care a lăsat-o moştenire [1]) *Gazetei Matematice* împreună cu întreaga lui bibliotecă spre a face în ea o casă de citire pentru elevi, studenţi, profesori şi alţi amatori de consultat cărţi de ştiinţă.

Acum un an când Ion Ionescu se ducea la locul de veci i-am pus în sicriu Nr. 1, Vol. LII al *Gazetei Matematice*, ultimul număr care apăruse cu două zile înainte de a închide el ochii, pentru a se amesteca cu ţărâna lui şi ţărâna publicaţiei pe care a desăvârşit-o aşa încât să devină un factor social de covârşitoare importanţă.

Atunci, ascultându-i cuvântul, ne-am plecat frunţile cu pietate în faţa Puternicului Nepătruns şi l-am dus pe Ion Ionescu la locul de veci în tăcere pentrucă dorise să nu se vorbească la moartea lui.

---

1) Publicăm la pag. 122 din acest număr părţile testamentului lui Ion Ionescu, care se referă la *Gazeta Matematică* şi la istoricul vieţei lui.

Azi, după un an de tăcere, credem că suntem dezlegaţi de cuvântul lui şi ne îngăduim să spunem cine a fost şi ce-a făcut Ion Ionescu în lumea aceasta, fiind siguri că dacă din sferele în care pluteşte sufletul lui ne face vreo dojană de încălcarea cuvântului de a nu i se ţine cuvântări la moarte, ne va ierta, dacă vom fi omis a spune ceva din ceea ce a înfăptuit Inginerul Profesor Ion Ionescu.

G-l Gh. Buicliu.

CUVÂNTUL ACADEMIEI ROMÂNE

Academia Română se asociază la omagiul adus memoriei fostului său membru corespondent, Profesorul Inginer Ion Ionescu.

Niciodată expresiunea «*O viaţă întreagă închinată exclusiv şcoalei şi învăţământului*» n'a corespuns mai bine adevărului, ca în cazul omului excepţional care a fost Ion Ionescu.

Altă preocupare de cât aceea a şcoalei, a cursului, a elevilor săi şi a *Gazetei Matematice*, nu ştiu să fi avut.

Rezultatele se cunosc: nenumărate generaţii de ingineri formaţi la severa sa disciplină; un neasemănat de folositor interes pentru matematică, deşteptat în tinerimea şcolară prin *Gazeta Matematică*.

Rigiditatea caracterului său şi severitatea cu care judeca lucrările elevilor, nu excludeau o deosebită bunătate sufletească şi o generozitate dovedite în multe împretjurări.

De aceia nimeni ca Ion Ionescu nu merită mai mult omagiul ce se aduce astăzi memoriei sale.

N. Vasilescu-Karpen.

INGINERUL ION IONESCU ŞI SOCIETĂŢILE DE ŞTIINŢE

Unul dintre fruntaşii generaţiei de ziditori ai României contemporane, ai României tehnice şi ştiinţifice, ai României care începea să aducă o contribuţie proprie la cercetarea naturii, la crearea de metode, la tehnica ştiinţifică a lumii, a fost inginerul Ion Ionescu.

Vorbind Congresului Asociaţiei pentru înaintarea ştiinţelor ţinut în 1911 la Târgovişte despre importanţa economică a râului Ialomiţa Ion Ionescu spunea, interpretând năzuinţele întregii sale generaţii, cu simplitatea directă care-i era propice: « *Este o datorie de onoare ca, dacă împrumutăm străinătăţii metode moderne pentru trebuinţele ştiinţifice, tehnice şi economice să căutăm a da şi noi la rândul nostru alte metode în schimb* ».

Profesorii şi maeştrii săi reuşiseră să-şi asimileze ştiinţa şi metoda de exploatare a naturii şi de organizare a lumii care au făcut strălucirea veacului al XIX-lea.

Revenea generaţiei lui să dea sforţarea creatoare de a face să rodească, cu fruct românesc aceste mari câştiguri.

De aici o concepţie de viaţă, o filosofie care i-a călăuzit întreaga activitate. Inginer, de sigur. Insă, înainte de ori-ce om de ştiinţă. Primatul ştiinţei era primul articol al crezului său.

La Congresul Asociaţiei pentru înaintarea ştiinţelor care s'a ţinut la Galaţi în 1912, vorbind despre « Navigabilitatea Siretului » el spune:

« *Oamenii de ştiinţă trebue să se aşeze dintr'un punct de vedere înalt, de acolo ei trebuie să-şi spună cuvântul în chestiunile ce li se pun. Deci ştiinţa prin glasul lor, trebue să decidă şi nu altcineva.*

Al doilea articol al crezului său era sinceritatea: sinceritatea aceea directă, crudă câte odată, jovială, însă exprimată în termeni plini de umor cu adevărat românesc, aş zice valah, dacă termenul n'ar fi deformat în sens pejorativ.

Cu ce farmec simplu vorbind la Societatea Română de ştiinţe despre jubileul logaritmilor îşi mărturiseşte recunoştinţa ce o poartă acestor logaritmi — aşa de lăsaţi în uitare — cărora le datoreşte interesul pentru matematică.

« *Eram în clasa a 4-a primară, când cercetând un anticar găsesc o aritmetică mare şi jupuită. In ea am văzut cum folosindu-ne de logaritmi putem face în chipul cel mai simplu înmulţiri sau împărţiri cu numere mari — operaţii care mă speriau întotdeauna.*

Mi-a plăcut aşa de mult că am aruncat toţi haiducii şi poveştile pe care le aveam, căutând să mă apropii de unele din ramurile ştiinţei ca să mai pot gusta din frumuseţele ei. Faptul că sunt inginer în contra dorinţei a lor mei, faptul că şi acum îmi petrec din orele libere studiind, faptul că sunt unul din servitorii matematicei româneşti o

datoresc transformării ce au produs în mine logaritmii la o etate la care impresiile produse se șterg cu greu ».

Nobilă mărturisire care luminează viziunea lui Ion Ionescu despre Știința matematică și lămurește întreaga lui activitate în acest domeniu. Pentru o judecată superficială temele favorite ale lui Ion Ionescu par simple curiozități căutate de un spirit cu simț mai mult pitoresc. Privite în lumina interioară, preocupările lui urmăresc întotdeauna în problemele fastidioase de calcul, de tehnică grea, calea pură a unui gând simplificator — nu artificial — care ține de esența însăși a matematicei.

De altfel Ion Ionescu revine asupra temei. Intr'o conferință despre « *Mania Calculului* » făcută în 1909 la Societatea română de științe printre ai cărei fondatori și colaboratori statornici el trebue socotit alături cu Doctorul Istrati și Gheorghe Țițeica, el spune:

« *Sunt foarte multe lucruri pe care le face omul fără nicio socoteală, dar ceea ce este mai curios e că printre acestea se găsește și calculul* ».

Calcul fără socoteală, un joc de cuvinte ieșit din creierul lui sănătos, arată insistent și adânc că pentru el matematica nu-i simplu joc, nu-i doar o « *Calculomanie* » cum spune singur insistând asupra valorii adânc spirituale, a valorii de gândire pe care o reprezintă activitatea matematică.

Intr'o altă conferință la Societatea de Științe despre *Nepopularitatea matematicilor* el citează cuvântul unui autor nordic, Björnson recunoscut mie ca adept al acestei științe:

« *Știința numerelor este într'o eternă aurore, mai pură ca zăpada, mai sublimă ca aerul* ». Deci nu calcul, nu pedanterie, nu ariditate și izolare, ci doar gând pur, așa cum a fost în marea tradiție a creatorilor acestei științe.

Fie-ce om își urmărește gândurile esențiale, vehiculele destinului său pe căi proprii. El năzuia, ca ori-ce om mânat de pasiunea cunoașterii, cât mai sus.

Intr'o comunicare mai intimă la Societatea de Științe în 1932 despre « *Podurile noastre* » el termină cu aceste vorbe ale unui mare poet:

« *Nimeni să nu fie asemeni altuia, dar fie-care să fie asemeni celui mai de sus* ».

Cuvintele acestea exprimă necontenita lui silință de perfecționare de sine și în aceeași vreme pasiunea lui pentru educarea tineretului căruia i-a fost, în întregime, unul din marii profesori.

Pe drumul acesta mai ales el și-a împlinit destinul. El s'a silit să îndrumeze tineretul prin disciplina aspră a științei, folosind matematica drept instrument principal de lucru, către problemele cele mai concrete ale realității românești.

Aici este cheia întregii sale personalități, a originalității sale în viața generației căreia îi aparținea.

Gândire, gândire pură și concretă, gândire aplicată la concret, la problemele noastre proprii.

Este prin aceasta în directă filiațiune cu marii clădítori ai lumii moderne.

Am citat anume titlurile câtor-va dintre comunicările lui la Societatea de Științe sau la Congresele Asociației pentru înaintarea Științelor:

Importanța economică a râului Ialomița, Navigabilitatea Siretului.... Aș mai putea cita « *Podul Regele Carol I* », « *Pădurile noastre* ». In fiecare din aceste lucrări sistematice, preciziunea problemelor și tehnica indicată pentru cercetare poartă semnul sigur al științei, în vreme ce obiectele constituie încă și astăzi probleme deschise ale realităților românești.

Educator pasionat el trebuia să ajungă la cercetarea metodică a trecutului în orice problemă avea de cercetat și în special, cu acea nevoie de concret, de realitate, de așezare solidă a oricărui pas pe care avea să-l facă puternica lui personalitate, a celui românesc.

De aici comunicările lui la Societatea română de Științe și mai apoi la Academia Română, unde a fost chemat în aparență pentru această din urmă activitate, în realitate pentrucă acoperea cu personalitatea lui un însemnat sector al vieții științifice românești, despre « *Călătoria lui* Ruggiero Biscovich *în România veacului al șaptesprezecelea* », despre « *Dobânda în vechile așezăminte românești* », *despre* « *Aritmetcile lui* Lazarini », *despre* « *Algebra lui* Petrache Poenaru », *despre* « *Aritmetica și Geometria lui* Gheorghe Lazăr », *sau despre* « *Centenarul primei cărți românești de Matematică tipărită în București* ». Este vorba de artimetica rațională a lui Eliade.

Am încă şi acum în amintire farmecul deosebit al acestei din urmă comunicări în care bogata încercare a lui ELIADE de a dota matematica românească cu o terminologie proprie devenise un joc literar luminând cu o nouă strălucire spirituală pe cel mai statornic membru al Societăţii noastre.

Prezent întotdeauna, printre cei dintâi, la ora şedinţei, la Societatea de Ştiinţe ca şi la Academia Română, disciplinat, cunoscător al Regulamentului, tradiţionalist în lăuntrul unei adevărate republici de camarazi fără deosebire de vârstă, de grad sau de vechime, ION IONESCU a rămas pentru noi o figură unică de ziditor temeinic al unei lumi tehnice care înfruntă orice greutate.

O. ONICESCU.

CUVÂNTUL AGIRULUI

AGIR-ul a ţinut să ia parte printr'o delegaţie la comemorarea inginerului şi dascălului de ingineri ION IONESCU.

Atunci când s'a înfiinţat AGIR-ul ION IONESCU a fost de părere că o nouă asociaţie de ingineri nu are rost, atâta vreme cât există Soc. Politehnică. Şi, cum îi era firea, până la sfârşitul vieţii a rămas consequent părerii sale şi nu s'a înscris printre membrii noii asociaţii. Cu toate acestea, cu spiritul, chiar fără voia lui, a fost prezent. A fost prezent prin foştii săi elevi, a fost prezent prin radiaţiile ce a împrăştiat până la sfârşitul vieţii sale pământeşti şi continuă să le împrăştie şi acum după moarte. ION IONESCU este cea mai strălucită ilustrare a teorii că există ceva ce nu se distruge, ceva care se poate multiplica prin sine însuşi, este capitalul spiritual.

Intreaga pleiadă de ingineri, cari s'au adăpat la învăţăturile lui, la învăţăturile nu numai strict technic ci şi la cele profesionale, luate în tot complexul lor, îşi dau seama că au fost moştenitori ai lui ION IONESCU, încă de pe când el trăia. De faţă, sau nu, el a fost, şi este, alături de ei. Şi, dacă am căta, prin ce a ajuns ION IONESCU să aibă o astfel de influenţă, am găsi că a dus până la extrem despersonalizarea. In toată viaţa lui, în tot ce a făcut, nu s'a gândit niciodată la persoana lui. După ce a chibzuit, a ajuns la o concluzie, aşa cum ar fi ajuns în orice teoremă de matematică. In raţiona-

mentul lui nu a intrat nicio consideraţie personală. A avut în faţă un prieten, sau un duşman, pe cineva care-i era simpatic sau antipatic, concluzia era aceeaşi. Ca martor într'un proces, în care un avocat punea la îndoială sinceritatea depoziţiei mele, pe baza relaţiilor dintre mine şi Ion Ionescu, întrucât în proces era interesat şi fratele acestuia, Alecu Ionescu, am putut afirma că, dacă Ion Ionescu ar fi chemat să depuie într'un proces, în care ar fi interesat personal, depoziţia sa n'ar conţine decât adevărul şi numai adevărul, aşa cum spune formula jurământului. Iar preşedintele a confirmat acest lucru. Faima lui Ion Ionescu depăşise cercurile strict inginereşti.

Ne-am strâns pentru a comemora un an dela încetarea sa din viaţă. Este o manifestare a amintirii de fiecare clipă pe care fiecare inginer o poartă lui Ion Ionescu. Despre el se poate spune că într'adevăr, vecinică îi va fi pomenirea.

Prof. Ing. Cristea Niculescu.

INGINERUL ION IONESCU

In noţiunea de inginer, aşa cum o înţelegem noi, se cuprind pe lângă aceea de ingeniozitate — adică de găsirea soluţiilor originale la problemele tehnice ce se pun — şi acelea de exactitate, de conştiinciozitate şi de adaptabilitate la realitate a soluţiilor găsite. Meditând mai mult asupra acestor noţiuni, în legătură cu personalitatea atât de puternică a lui Ion Ionescu, m'am întrebat adesea dacă el s'a manifestat în viaţă, aşa cum o ştim aproape cu toţii, datorită culturii tehnice primite în Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele din vremea lui, sau a avut în el chemarea acestei mentalităţi de inginer şi şi-a ales pregătirea culturală şi calea vieţii după această chemare.

Inclin spre această a doua părere. Părinţii săi, legaţi mai mult de partea economică a vieţii, l-au îndrumat spre meseria de contabil, atunci mai rapid productivă. A urmat de aceea cursurile Şcoalei Comerciale din Bucureşti (de pe B-dul Domniţei). Dar la terminarea ei, după o scurtă perioadă de aplicare, s'a pregătit spre a concurà la intrarea în Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele pe

care a terminat-o în 1894, cu cea mai mare medie obţinută de un absolvent până atunci, fiindu-i numele săpat cu litere de aur în placa de onoare a absolvenţilor şcolii. Pe orice cale ar fi pornit însă, prin seminar sau şcoli militare, cred că tot la Şcoala de Poduri ar fi ajuns.

Nu a fost un inginer de creaţii tehnice excepţionale. Privind întreaga lui activitate nu găsim o operă tehnică monumentală datorită în întregime lui. Se resfrânge în el aspectul celeilalte mari chemări, ridicată la înălţimi atât de rar atinse: Chemarea de apostol, evidenţiată ca profesor şi ca « stâlp » al *Gazetei Matematice*. Pentru el ingineria nu a fost o cale de ajungere la o situaţie materială excepţională. Putem spune că a murit cel mult cu o situaţie materială modestă. Ingineria lui a fost o îndârjită stăruinţă ca ceea ce realiza să fie perfect studiat, corect executat, cercetat până în cele mai mici amănunte, rezistând oricărei critici sau desagregări de mai târziu. Aşa a fost, aşa a căutat să-i facă pe cei din jurul lui, aşa i-a făcut pe cei mai tineri cari au lucrat sub conducerea sa. Era, este, în cariera inginerească un titlu de glorie, acela de a fi lucrat cu Ion Ionescu.

Acei cari i-au fost colegi în tinereţe, îşi aduc aminte cum, ieşit din Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele, a fost angajat inginer la C. F. R. şi repartizat la lucrările liniei Feteşti-Cerna-Vodă. Aci lucra tot timpul pe şantier, la rând cu lucrătorii, cu haine care nu îl mai deosebiau de ei. Odată, Gh. Duca, directorul general de atunci al C. F. R. l-a invitat în vagonul lui. S'a scuzat spunând că este prea murdar. « *Nu eşti murdar* » i s'a răspuns ». « *Această prezentare sete cea mai bună carte de vizită a D-tale* ».

Din succesiunea de lucrări care alcătuesc podul peste Borcea şi Dunăre, primul pasaj de lângă Feteşti a fost montat (nu calculat) de el. La decofrare a trecut prin emoţii, prin care mulţi din noi am trecut în împrejurări similare: Slăbind cintrele de lemn spre a degaja lucrarea, a constatat cu groază că ele nu se desprind de grindă. O clipă a avut impresia că grinda vine după cintre şi se va prăbuşi. S'a recules însă. Nu grinda venia după cintre, ci acestea făcuseră aderenţă cu mortarul din lucrare şi nu se desprindeau destul de uşor.

Trecut în secţia condusă de Ionel Brătianu, a fost trimis în Franţa, Anglia şi apoi în Germania pentru studii şi supravegherea unor construcţii de poduri.

A fost întrebuinţat după aceea la o serie de verificări şi construcţii de poduri pe diferite linii, între altele podul dela Bobolia pe valea Prahovei, un pod peste Argeş şi altele. Lucrând la consolidările podurilor pe linia Ploeşti-Predeal, s'a întâmplat odată ca trenul care aducea pe REGELE CAROL I şi care, prin definiţie nu putea avea niciun minut întârziere, să fie oprit la intrarea pe un pod. Ce se întâmplase ? Fără să se ţină seama de indicaţiile inginerului conducător al lucrărilor, adică ale lui ION IONSCU ca trenul regal sa fie reţinut într'o staţie anterioară, până ce se va fi terminat complet trecerea căii de pe un pod provizor pe cel definitiv, s'a dat drumul trenului după orar. Din ordinul lui ION IONESCU, trenul a fost oprit, în ultimul moment. Toţi l-au găsit vinovat, de o îndrăsneală fără seamăn, afară de REGELE CAROL însuşi, care l-a felicitat pentru conştiinciozitatea şi hotărîrea sa.

A trecut apoi împreună cu Inginerul ANGHEL SALIGNY la Dir. Generală a Porturilor, la Constanţa, lucrând aci, între altele la proectarea silozurilor,

De aci a venit în Capitală, ca inginer în Serviciul Hidraulic din M. L. P., unde în 1910 a ajuns subdirector, apoi director.

Aci a fost însărcinat cu un foarte vast studiu de a devia apele Siretului spre Prut în dreptul Iaşilor. Proectul prevedea o cădere de apă de 80 m. şi o uzină lângă Băile Strunga, unde apa ar fi fost adusă pe un tunel lung. Proectul mai prevedea legarea printr'un canal navigabil în lungul Prutului a Iaşilor cu Galaţii. El nu a fost însă executat cum nu a fost executat nici proectul pentru amenajarea lacului Razelm.

Ca şef al Direcţiei de Studii din acelaş serviciu, a făcut sau verificat aci toate proectele lucrărilor mai importante, în special a celor de poduri. A construit astfel podul curb de cale ferată dela Bazinul din Giurgiu, acela căruia îi spunea la cursul său: « cu pilă în formă de papuc », poduri pe linia Ploeşti-Văleni şi altele, executate în Şantierele Navale dela Turnu-Severin.

Spre a se evita accidentele de navigaţie pe Dunăre şi spre a se utiliza cât mai bine afluenţii ei, inginerul ION IONESCU a fost însărcinat cu executarea hărţii hidrografice a bazinului Dunării. Această importantă lucrare a fost completată cu studii asupra canalelor posibile pentru a se lega apele Ialomiţei cu oraşele Târgovişte, Ploeşti, Bucureşti şi Buzău.

In preajma războiului din 1916, Inginerul Ion Ionescu a lucrat la Direcţia Muniţiilor în Comisiile Tehnice pentru pregătirea materialelor şi muniţiilor necesare şi în echipele de repararea căilor ferate, şoselelor, podurilor şi tunelurilor.

După războiu a fost numit director, apoi director general pentru reconstruirea podurilor metalice distruse de războiu. In această calitate avea să se ocupe în special de podurile dintre Feteşti şi Cerna-Vodă, acelea unde îşi începuse cu 25 ani înainte cariera de inginer. Podul cel mare peste Dunăre, fusese mai puţin distrus, dar fusese distrus aproape complet cel de peste Borcea şi mare parte din viaducte. Inginerul Ion Ionescu a preconizat cu această ocazie înlăturarea inconvenientului ca legătura dintre Dobrogea şi restul ţării să fie făcută numai printr'o linie ferată simplă. Concepţia sa erà ca lucrările noui să conţină dublarea liniei ferate şi o şosea. Numai în lungul podului cel mare, linia urma să rămână încălcată, iar de o parte şi alta a grinzilor principale, utilizând aceleaşi pile, să se facă în consolă şosele într'un sens şi altul.

Pentru realizarea acestei concepţii a trimis 2 ingineri în America, de unde urma să se trimită grinzile şi materialul necesar. In interval însă, a căzut guvernul. Aceasta a însemnat evident şi schimbarea concepţiilor constructive de sub guvernul anterior. Pe motiv că lucrarea executată şi adusă din America ar durà câteva luni, iar Soc. Reşiţa, din ţară, îşi lua obligaţia să refacă întreaga lucrare în forma şi dimensiile iniţiale numai în 3 luni, s'a adoptat această ultimă soluţie. Lucrarea a fost gata cam peste 1 an şi jumătate şi legarea Dobrogei cu linie ferată dublă şi şosea a trecut în domeniul viselor ce nu aveau să se realizeze nici până azi.

Tot în cadrul activităţii sale ca inginer, trebue citată prezenţa lui Ion Ionescu în Consiliul Tehnic Superior. Vasta sa cultură generală şi de specialitate, intrasigenţa asupra principiilor de onestitate şi exactitate şi-au găsit aci o bogată aplicaţie. Toate marile lucrări technice ale Statului, făcute în acest timp, s'au resimţit de influenţa acestor principii călăuzitoare.

O scurtă perioadă, Inginerul Ion Ionescu a fost chemat şi în autoritatea comunală a oraşului Bucureşti. Primarul de atunci voia să pună ordine în administraţia cam compromisă a Primăriei Centrale, în special în legătură cu chestiunile tehnice. A regretat-o foarte curând. Toată clientela politică, cu influenţă profundă în

soluţionarea chestiunilor interesante, s'a găsit în faţa zidului intransigenţei lui Ion Ionescu. Se înţelege că situaţia erà intolerabilă. Intrasigenţă în afacerile comunale nu se mai pomenise şi Inginerul Ion Ionescu a trebuit să demisioneze, căci altfel s'ar fi primejduit poziţia însăşi a primarului care-l numise.

Ca Decan al colegiului inginerilor a căutat să menţină la treapta cea mai înaltă prestigiul acestui colegiu, organizaţie de elită intelectuală. Nu a tolerat nicio abatere dela legea lui de organizare şi aplicările ei. Şi când ministrul corespunzător i-a impus măsuri pe care el nu le vedea ca legale, a demisionat, lăsând altora răspunderea ilegalităţilor.

Aceasta a fost, redată în cuvinte reci, activitatea ca inginer a lui Ion Ionescu. Astăzi, când firul ei este rupt, pe zi ce trece perspectiva asupra ei se precizează, caracteristicile apar mai evidente. Când vremurile se vor statornici, recunoştinţa inginerilor şi a ţării se va preciza desigur într'un monument, o statue. Îmi puneam întrebarea cam cum va fi concepută aceasta şi vedeam chipul lui ieşind dintr'un masiv neclintit de granit, cu fruntea luminată de razele apostolatului.

Profesor Inginer George Borneanu.

PROFESORUL ION IONESCU

Nici când evocarea cu sinceritate a unei mari personalităţi trecute de curând în lumea umbrelor nu s'a putut întreprinde fără un simţământ de explicabilă sfială.

Incercarea de a readuce pentru câteva clipe între noi imaginea celui ce ne-a fost profesor, — cel mai de seamă profesor —, la atât de mulţi dintre inginerii constructori din ţară, îmi este îngreuiată însă nu numai de această nestăpânită sfială, ci şi de un noian de sentimente şi deprinderi vechi.

Sunt peste 35 de ani, de când, găsindu-mă pe băncile liceului, faima ştiinţei, subtilităţii spiritului matematic, puterii de muncă şi severităţii profesorului Ion Ionescu, îmi inspirase acea nelimitată admiraţie, comună — timp de peste 50 ani — la toţi corespondenţii *Gazetei Matematice*. Pe urmă, în anii de studii inginereşti şi cei de ucenicie dela începutul carierei, adică pe vremea

când pentru cei de seama mea profesorul Ion Ionescu era simplu «*Domnul*», în sens de «*Magistru*», am avut cu toţii pentru el un adevărat cult, amestecat ce e drept cu teamă; iar mai apoi, când la chemarea lui i-am devenit asistent şi modest colaborator, toate acestea s'au întregit cu sentimente trainice de devotament şi recunoştinţă; ca în sfârşit, când curgerea neîntreruptă a anilor şi obişnuinţa colaborării tot mai strânse i-au dat prilejuri să-mi acorde oarecare încredere şi să mă onoreze cu prietenia lui, cimentul unei respectuoase şi reale afecţiuni a venit să întărească mai mult legătura sufletească cu rădăcini atât de vechi.

Sunt sigur că toţi inginerii trecuţi cât de puţin prin şcoala lui Ion Ionescu au trebuit să parcurgă o parte din fazele acestea. Când însă ai trecut din plin prin toate, e greu să-ţi stăpâneşti strângerea de inimă, şi să păstrezi întreagă limpezimea de judecată obiectivă, apropiindu-te cu sfială de umbra celui căruia i-ai stat în preajmă, mereu, până la urmă.

Se va înţelege deci pentru ce mi-au trebuit mai multe luni de frământare, după ce mi s'a încredinţat această grea sarcină, — pe cât de preţuită onoare —, până să mă hotărăsc să-mi adun gândurile şi să încerc evocarea. De altfel, sunt convins că ar fi trebuit în orice caz s'o fac, nu atât pentru cei ce l-au cunoscut şi judecat, ci mai cu seamă pentru cei ce vin după noi.

Căci Ion Ionescu — ca toate personalităţile covârşitoare — pe lângă admiraţie, recunoştinţă şi slavă, a stârnit şi multe antagonisme şi adesea critici violente, deşi, ca un fapt caracteristic, cei mai mulţi din cei ce l-au ponegrit, au revenit cu timpul şi au recunoscut că au fost nedrepţi, sau cel puţin s'au deprins să-i pronunţe numele cu respectuoasă deferenţă. Tocmai de aceea, imaginea ce va să se perpetueze de aci înainte, trebue să fie limpezită şi îngrădită de toate ecourile ce-ar putea să mai persiste din vechi controverse, pentru ca toţi cei ce vor călca pragul acestei înalte şcoli, cât va dăinui ea, să poată venera fără vreo reticenţă icoana marelui profesor Ion Ionescu. Ei trebue să ştie cât de mult datorează din faima lor, atât vechea şcoală de Poduri şi Şosele, cât şi Facultatea de Construcţii din Politehnica actuală din Bucureşti, acestui epocal profesor şi cât de mult le-a dat el din mintea, inima şi viaţa lui. Astfel ei vor putea să le transmită din generaţie în generaţie, ceea ce socot indispensabil pentru inte-

resul permanent al şcolii noastre, cât şi pentru buna tradiţie a învăţământului tehnic superior românesc.

* * *

Domnilor, afirm dela început, cu toată convingerea, că Ion Ionescu s'a dedicat pe de-a'ntregul şi mai presus de toate, învăţământului din această şcoală de inginerie.

Analizându-i-se viaţa şi activitatea, apare limpede că temeiul cel mai adânc al gândurilor şi tuturor faptelor sale a fost dragostea pentru acest învăţământ. El n'a trăit decât pentru progresul acestuia.

Marea lui pasiune a fost însă Şcoala de Poduri şi Şosele în care s'a format şi în care a profesat primii 20 de ani — cei mai interesanţi — din glorioasa lui carieră didactică. Era atât de identificat cu viaţa acelei şcoli, încât până la transformarea ei în Politehnică, n'a avut alte griji, n'a trăit alt sbucium şi n'a resimţit alte bucurii, decât pe ale ei. Am avut totdeauna sentimentul că nu s'a împăcat niciodată, până la sfârşitul vieţii, cu dispariţia anumitor forme de viaţă şi de organizare din vechea Şcoală de Poduri şi Şosele, deşi s'a ostenit din răsputeri, neîncetat şi pentru progresul şi înălţarea Politehnicii, fixându-şi ca unic scop al vieţii formarea de ingineri constructori cât mai bine pregătiţi tehniceşte şi în acelaşi timp cât mai complect modelaţi în privinţa caracterului şi a disciplinei muncii.

Misiunea aceasta i-a stat la inimă încă din tinereţe. A spus-o în repetate rânduri şi-a precizat-o şi în cuvântarea dela banchetul ce i s'a dat la 5 Decembrie 1938 când, cu ocazia scoaterii la pensie, a fost sărbătorit de cele 36 serii de ingineri constructori ce-i fuseseră elevi. Spunea atunci că *necesitatea de a se schimba anumite stări de lucruri din învăţământul tehnic, pentru ca viitorii ingineri să fie mai bine pregătiţi, îl preocupa încă de pe când era în şcoală şi că principiile şi ideile călăuzitoare în învăţământul tehnic superior*, cărora le-a fost un servitor fidel şi neclintit, *au apărut clare încă de pe când era elev-inginer în fosta Şcoală Naţională de Poduri şi Şosele.* Iar talentul didactic şi-l manifestase tot de pe vremea aceea, dovadă că nu numai îşi îndruma şi ajuta colegii la înţelegerea cursurilor, cum vor fi făcut-o şi alţi mulţi şefi de promoţii, dar găsise şi mijlocul să-i oblige să se gândească mai bine

când vorbeau, — ca să nu le scape vreo enormitate —, şi aceasta cu ajutorul faimosului carnet publicat la absolvire, în vara 1894, sub titlul *Mărgăritare*. Redijarea câtorva din cursurile cele mai importante din şcoală, traducerea unui curs de poduri de lemn al lui WINKLER şi studiile strălucite din şcoală, i-au stabilit curând suficientă reputaţie ca îndată după obţinerea diplomei de inginer, — cu cea mai mare medie realizată până atunci —, să fie consultat chiar de ingineri mai vechi, pentru calcule mai delicate şi proiecte la care se iveau nelămuriri de ordin tehnic. Profesorii l-au remarcat de sigur şi ei, ca pe un element excepţional ce era. Astfel mărturia marelui inginer şi profesor ANGHEL SALIGNY, care mai târziu avea să şi-l aleagă ca urmaş la catedră, este categorică şi decisivă: « *Ca elev* » spune el, ION IONESCU « *era unul din cei mai disciplinaţi, din cei mai inteligenţi, şi de o stăruinţă fără seamăn. Examinarea lui îmi făcea adevărată plăcere şi eram mândru de elevul meu* ». Totuşi, prima însărcinare didactică nu i-a venit dela marele lui magistru, A. SALIGNY, ci dela un alt profesor, CONSTANTIN MĂNESCU, care, luându-şi un concediu de boală în Februarie şi Martie 1898, l-a însărcinat pe ION IONESCU să-l suplinească la cursul de *Mecanică aplicată la Rezistenţa Materialelor şi Stabilitatea Construcţiilor*. Aceste două luni de suplinire profesorală au contribuit de sigur la întărirea reputaţiei tânărului inginer, şi i-au fixat în secolul trecut începutul carierii didactice, întinsă astfel — până în 1938 — pe o durată de 40 ani, deşi o numire cu caracter de permanenţă n'a avut decât în 1902, când i s'a încredinţat suplinirea oficială a aceleiaşi catedre, după retragerea la pensie a lui C. MĂNESCU.

In toamna aceluiaşi an, 1902, i s'a propus însă un schimb de catedră, oferindu-i-se cea de *Lucrări grafice*, care cuprindea desenul şi toate proiectele din şcoală. ION IONESCU a refuzat, socotind că nu are o pregătire universală şi deci nu se poate angaja să facă ceea ce considera că nu se pricepe. Drept consecinţă, a urmat un aranjament în virtutea căruia i s'a atribuit, ca un fel de compensaţie, catedra de *Desen şi Caligrafie* la Şcoala de Conductori-Desenatori, pe care, se înţelege, a refuzat-o categoric. Cu humorul său caracteristic, marele profesor relatează undeva incidentul astfel: *Cum am văzut aceasta, am demisionat pe data numirii, arătând chiar în petiţie cam ce fel de caligrafie ştiu eu.* Cei

care au avut cât de puţin de-a-face cu manuscrisele lui, adesea indescifrabile, pot aprecia toată savoarea acestei butade.

După zadarnice insistenţe să renunţe la demisie, — «ca să nu supere pe ministrul care făcuse numirea» — a fost nevoie ca Anghel Saligny, în al cărui serviciu se găsea atunci Ion Ionescu, să-i încredinţeze o misiune în afară de Bucureşti, pe vreo două săptămâni, *în care timp s'a căutat să se dreagă lucrurile.*

Şi, într'adevăr, la întoarcere a găsit făcută numirea ca profesor pentru Lucrări de Statică grafică, Rezistenţa materialelor, Hidraulică şi Proiecte de poduri, catedră pe care a păstrat-o până în 1914.

Anii aceia, 1902—1914, îi putem caracteriza ca epoca eroică a carierii marelui profesor.

Din primul moment al activităţii sale didactice, Ion Ionescu a avut un ascendent asupra întregei şcoli, — studenţi ca şi profesori —, pe care nu ştim să-l mai fi obţinut altcineva până astăzi şi pe care l-a păstrat până la sfârşit. Adevărul este că, după cum spunea singur, *nu s'a urcat pe catedră ca un ilustru necunoscut.* Elevii îl ştiau dela *Gazeta Matematică* şi ştiau *la ce au să se aştepte*, avându-l ca profesor. De pe când fuseseră corespondenţi ai acelei reviste, ştiau că el *aruncă la coş lucrările greşite, rău redactate, rău scrise. Ştiau dar că trebue să lucreze la şcoală, pentru el, aşa cum lucrau la* Gazeta Matematică.

Pe de altă parte, activitatea lui ca profesor a fost, dela început, fenomenală. Iată cum o vedea Anghel Saligny, în 1914: *Ca profesor*, Ion Ionescu *consideră această misiune ca un adevărat apostolat, citind foarte mult şi ţinând cursul său la curent cu toate progresele ştiinţei. Plin de abnegaţie, el este de o activitate prodigioasă; în primii ani el făcea 22 de ore pe săptămână, iar când n'avea încă asistenţi, mai avea peste 1.000 foi de examinat, în afară de şedinţele dela şcoală. Fără a ţine seama de oboseala şi munca sa, deviza lui* Ion Ionescu *era ca elevul să profite cât se poate de mult.*

A spune însă că îşi ţinea cursul în curent cu progresul ştiinţei, — ca atâţia alţi profesori —, este mult prea puţin în cazul lui Ion Ionescu. Căci el a trăit viaţa de profesor cu intensitate nedesmințită şi a pus o pasiune cu totul exclusivă în misiunea ce-şi impusese de a forma temeinic tineretul destinat carierii tehnice. Astfel din dragostea adâncă pentru ştiinţele matematice şi

inginereşti, combinată cu preocuparea de a atrage pe elev şi a-i desvolta gustul pentru materia predată, el găsea la lucrările practice şi proiecte şi în special la epurele de Statică grafică, aplicaţii interesante şi mai ales probleme originale, ce prezentau totdeauna, pentru fruntaşii claselor, un farmec deosebit. S'a recunoscut de altfel, în mod public, că nu s'ar putea spune niciodată *câtă ingeniozitate, câtă fineţe şi câtă subtilitate cuprindeau problemele formulate de* Ion Ionescu la cursul de Statică grafică, din care reuşea să facă *un adevărat curs de logică inginerească.* Acelaşi fost elev a mai mărturisit că *de multe ori şi în domeniile cele mai diverse de activitate, cursul marelui profesor şi mai ales educaţia intelectuală pe care el i-a dat-o, i-au servit admirabil,* aşa că foloasele ce a avut, pe linia intelectuală, de pe urma lui Ion Ionescu, *nu s'ar putea niciodată îndeajuns preţui.*

Ori, *dacă în domenii depărtate de tehnică, şcoala de gândire a Profesorului* Ion Ionescu *a fost atât de utilă,* mărturia citată poate arăta *cât de utilă a trebuit să fie acea şcoală, celor care au rămas în domeniul propriu pentru care el i-a pregătit.*

De altfel nu se cunoaşte cazul vreunui fost elev al acestui incomparabil dascăl care — oricât ar fi simţit de greu în şcoală severitatea şi intransigenţele lui — să nu fi recunoscut mai târziu, în decursul carierii, cât de profitabilă şi de salutară i-a fost trecerea prin mâinile lui.

Şi totuşi, cine nu ştie cât de aspru a fost criticat, mai ales la începutul carierii, de mulţimea celor care nu vedeau decât severitatea şi exigenţele ce i se socoteau exagerate, făcându-se abstracţie de toate sforţările lui de a instrui temeinic şi de a educa în acelaşi timp, ca şi de toate rezultatele vizibil pozitive ale sistemului său didactic.

Ei da ! Teribilele exigenţe ale profesorului Ionescu ! Marea lui severitate ! Ireductibilele lui intransigenţe !

Au fost într'adevăr proverbiale şi au făcut epocă în viaţa şcolii noastre de inginerie de construcţii.

Spunea el singur: *In arhivele şcolii vor rămâne nenumărate petiţii, reclamaţii, memorii, contra activităţii mele profesorale, făcute de elevi şi de protectori ai lor.* Sau altă dată: *La câte vijelii nu a dat naştere îndârjirea de-a urmări până la fine linia trasată dela început. Mi se cerea cu insistenţă şi chiar cu ameninţare de moarte, să mă modernizez.*

El a continuat însă să combată, o viaţă întreagă, cu vigoare neînfrânată, *hatârul* şi *chiulul*, ignorând toate criticile — făţişe sau ascunse — parând toate loviturile, rezistând tuturor presiunilor, înlăturând toate obstacolele.

A dus din cauză aceasta o luptă necurmată, dar n'a cedat niciodată nimic din ceea ce el ştia că e drept, şi n'a admis niciodată vreun compromis, când era vorba de metoda şi exigenţele lui didactice, preferând, în câteva rânduri, să părăsească profesoratul decât să renunţe la principiile sale.

Ca elev în primii ani ai şcolii, am fost şi eu martor — în 1914 — la desfăşurarea unei memorabile furtuni din cariera didactică a neînduplecatului profesor, furtună ale cărei detalii nu le-am cunoscut însă decât mult mai târziu. Iată-le:

In perioada 1902—1914, de care am mai vorbit, de câte ori Anghel Snligny era reţinut de lucrările lui din toată ţara, telegrafia lui Ion Ionescu să-i ţină locul la curs. Cu trecerea vremii, aceasta se întâmpla din ce în ce mai des. Până în Ianuarie 1912, când, pe lângă catedra ce avea, i s'a mai dat să suplinească şi catedra de Poduri a lui Saligny. In 1914 însă, socotind dintr'o neînţelegere că Ion Ionescu a calomniat pe un fost eminent absolvent, întru cât se opusese la trimiterea lui cu o bursă a Academiei, la studii de specializare în Franţa, — elevii au cerut lui Saligny să-şi reia cursul şi mai ales să facă el examenele şi au refuzat să se mai prezinte la lecţiile suplinitorului. Ion Ionescu a cerut atunci Direcţiei Şcolii pedepsirea foarte severă a elevilor care n'au venit la curs. Cum n'a obţinut satisfacţia cerută, a demisionat şi dela catedra sa şi dela suplinirea catedrei lui Saligny, şi n'a revenit asupra demisiei, cu toate stăruinţele şi cu toate că Ministrul l-a chemat să-i spue că i-o respinge. Consiliul profesoral i-a trimis atunci o delegaţie formată din profesorii T. Dragu, David Emanuel, Elie Radu şi Anghel Saligny să-l roage să nu părăsească şcoala. Abia atunci a acceptat să-şi reia lecţiile, dar a cerut delegaţiei să-i garanteze păstrarea disciplinei printre elevi. La primul examen, însă, din nou elevii au refuzat să se prezinte. Abia atunci Consiliul profesoral a aplicat pedeapsa cerută iniţial de Ion Ionescu, închizând şcoala pentru clasele respective până în toamna următoare. Cu toate acestea, la 1 Septembrie Ion Ionescu a demisionat din nou, irevocabil. In Octombrie, la

reînceperea cursurilor, când SALIGNY a fost chemat să-şi reia cursul, acesta, obosit şi prea mult ocupat, a demisionat şi el, recomandând ca succesor tot pe ION IONESCU. Chemat atunci de ministru ca să-i încredinţeze definitiv catedra de *Poduri*, ION IONESCU a condiţionat acceptarea şi a cerut schimbarea Directorului Şcolii, care se dovedise, — după părerea sa —, că nu poate menţine disciplina. Şi, consecvent, n'a revenit în şcoală decât în anul următor, în 1915, după ce Directorul împlinind anii de pensie, fusese schimbat. Intre timp cursul a fost făcut de d-l Inginer NICOLAE GEORGESCU, ca suplinitor. Şi aşa s'a terminat furtuna datorită căreia puţin a lipsit ca ION IONESCU să se despartă de Şcoala de Poduri şi Şosele, ceea ce ar fi lipsit pe cele 22 de serii următoare de constructori, de însăşi temeiul educaţiei lor inginereşti.

După cum se vede, întâmplarea a făcut că tocmai la capătul acelei vijelii, care stârnise variate şi foarte pasionate ecouri în şcoală, ION IONESCU să se statornicească la catedra de *Poduri şi Construcţii metalice*, pe care avea s'o ilustreze aşa cum se ştie, până la sfârşitul magistralei sale cariere didactice.

Domnilor, cum am mai spus, schimbarea a coincis cu începutul uceniciei mele tehnice, în neuitata Şcoală de Poduri şi Şosele. Inregistrând ca orice elev din primii ani, tot ce se povestea pe atunci despre teribilul *Bizeţ*, vibrând cu toată intensitatea la toate ecourile frământărilor furtunoase de care am vorbit, luând contact direct, în sfârşit, cu metoda şi exigenţele neîntrecutului Dascăl, nu bănuiam că mai bine de 30 ani de atunci încolo, aproape neîntrerupt, urma să asist de aproape la întreaga desfăşurare a restului activităţii lui didactice, tehnice şi culturale.

Astăzi, la gândul sfredelitor şi veşnic treaz al ireparabilei lui pierderi, — de care nu se vor putea mângâia, oricât ar trece vremea, niciunul din foştii lui elevi, niciunul din foştii lui colaboratori, niciunul din cei ce i-au descifrat adevărata personalitate şi i-au cântărit neîntrecutele lui merite, — în perspectiva anilor care au trecut, figura lui ION IONESCU se conturează tot mai clară şi mai luminoasă.

Il revăd mereu, masiv şi integru; sever şi neînchipuit de drept; tare pe convingerile lui şi înţelept; cu o voinţă de fier şi o inflexibilitate proverbială; neînduplecat în impunerea princi-

piilor lui didactice şi neobosit în urmărirea idealurilor lui ştiinţifice, educative şi patriotice; entuziast şi neîntrecut în perseverenţă; aspru şi timid; cu aparenţe ursuze şi inimă caldă; căutând cu predilecţie subtilităţile ştiinţelor matematice şi tehnice şi ducând o viaţă mai mult decât modestă; cu calde şi afectuoase sentimente de familie şi lipsit de căldura unei căsnicii proprii; exigent la împlinirea datoriilor pentru toţi, dar mai ales pentru el însuşi şi lipsit de ambiţii personale; sgârcit la laude şi oricând gata să ajute tineretul şi cu învăţătura şi cu modestele lui mijloace băneşti; neobosit în muncă, desăvârşit în cinste, model de probitate şi înaltă ţinută etică; luptător neînfricat în câmpul profesional şi refractar oricăror contingenţe politice; desinteresat şi plin de abnegaţie; energic, de o autoritate morală neegalată printre ingineri, fervent patriot şi autentic idealist.

Îl revăd în orele de curs, explicând atât de limpede şi cu atâta precizie, simplu, fără emfază, convingător şi de o logică impecabilă; pasionat pentru tehnică şi secretele ei şi având darul să antreneze pe elevi în entuziasmele lui reţinute dar comunicative; desenând la tablă cu uimitoare îndemânare şi celeritate multiplele figuri ale cursului lui; veghind neadormit la disciplina şi punctualitatea elevilor; cu gesturi sobre, unele caracteristice, rămase permanent în amintirile foştilor elevi.

Îl revăd în sălile de proiecte, sever şi apropiat; laconic şi foarte explicit; tranşant, lămurind în câteva vorbe vechi nedumeriri şi lungi controverse; exigent, autoritar.

Îl revăd la Iaşi în 1917, în uniforma de maior de geniu care-i scotea în evidenţă masivitatea, mai mult chiar decât haina civilă; tot atât de conştiincios, neobosit şi hotărît ca şi la şcoală; unanim apreciat pentru marea lui competenţă tehnică şi neîncetatul lui aport la soluţionarea dificultăţilor de tot felul din cursul războiului.

Îl revăd tot acolo, în primăvara şi vara 1918, susţinând din toate puterile eforturile elevilor de a relua studiile şi de a recâştiga din timpul pierdut din cauza războiului; făcând ore nenumărate de curs; neschimbat în exigenţe, neobosit în muncă, nepreţuit în părinteşti îndemnuri şi încurajări.

Îl revăd apoi în iarna următoare, aci în şcoala neîncălzită, cu paltonul şi cu căciula tradiţional ascuţită în cap, ţinând zile

întregi examene severe, cu conştiinciozitatea-i proverbială şi cu imparţialitatea-i nedesmințită.

Il revăd la terminarea şcolii, în dimineaţa când, după o susţinere aproape dramatică a proiectului de pod metalic, urmată de o noapte albă la planşetă, mi-a întins pentru prima oară mâna, îmblânzit dintr'odată, consacrându-mă inginer, prin însăşi această simplă dar memorabilă formalitate, care a marcat mulţi ani de zile absolvirea şcolii şi obţinerea diplomei.

Il revăd — după ce-i devenisem asistent — la examene şi în sala de susţineri de proiecte, adesea mai exigent şi mai sever cu asistenţii decât chiar cu studenţii; atent şi competent, găsind dintr'o privire greşelile şi lipsurile proiectelor ce i se prezentau şi pe care le cântărea cu măestrită siguranţă şi cu totală imparţialitate.

Il revăd tot acolo, după o lungă şi aprigă discuţie, precizându-mi cu hotărîre că din principiu nu înţelege să revină asupra unei pedepse odată pronunţate, chiar dacă s'ar considera exagerată, pentrucă i-ar şterbi autoritatea.

Parcă-l văd în consiliile profesorale şi în Comitetele de direcţie, susţinându-şi cu tărie principiile didactice, până la ultima consecinţă, combătând cu înverşunare orice început de concesie în faţa presiunilor venite dela studenţi, sau din afara şcolii, pentru obţinerea de uşurări în obligaţiile regulamentare de învăţământ, sau de slăbiri în spiritul tradiţional de ordine şi disciplină din şcoală. Veşnic în minoritate, el rămânea neclintit pe poziţie, şi-şi consemna — cu regularitate — în procesele-verbale opinii separate, nu din spirit de opoziţie, ci, — cum a declarat-o în repetate rânduri, — pentrucă ţinea ca părerile să-i rămână scrise *pentru a fi văzute de viitorii istorici ai Şcoalei*, şi din *convingerea nestrămutată că atunci când cei copleşiţi de forţe exterioare vor putea judeca liber, vor vedea că o opoziţie desinteresată este mai folositoare decât un reptilism cu tendinţe.*

Il revăd în anualele excursii cu studenţii, pe Dunăre, la podul dela Cernavoda, bucuros de exuberanţele tinereşti, fericit de orice dovadă de interes pentru tehnică şi de spirit de observaţie, patern şi afectuos, fără a renunţa la disciplină şi la ţinuta compatibilă cu mediul universitar.

Îl revăd la Societatea Politecnică, la Secţia matematică a Societăţii de Ştiinţe, la Colegiul Inginerilor şi mai ales la *Gazeta Matematică*, creată şi hrănită zi de zi şi bucăţică cu bucăţică din sufletul lui.

Îl revăd înconjurat de cărţi şi manuscrise, în exagerat de modesta lui casă din strada Călugei, lipsită de cele mai elementare cerinţe de confort, în violent contrast cu situaţia lui de profesor şi decan al profesioniştilor a căror menire era tocmai să aplice cuceririle ştiinţei la satisfacerea nevoilor şi dorinţelor de confort ale omenirii.

Îl revăd la berărie, — tradiţional acelaşi —, prezidând un mare grup de ingineri de toate vârstele, aproape toţi foşti elevi, dintre ei nelipsind mult regretatul profesor de rezistenţa materialelor Gh. E. Filipescu. Simplu, sfătos, sociabil, luând parte cu bonomie la discuţii şi glume, totdeauna interesat mai presus de toate de mersul Şcolii Politecnice şi de progresele studenţilor lui.

Şi îl revăd în toate aceste ipostaze, repetate an după an până în pragul bătrâneţei, fără vreun semn de oboseală, sau de slăbire a indomptabilei lui energii, sau a uimitoarei lui puteri de muncă, sau a interesului lui veşnic viu pentru şcoală şi studenţi.

Îl revăd apoi la capătul carierei lui profesorale şi în toamna scoaterii lui la pensie, la repetatele sărbătoriri, primind unanimele recunoaşteri, expresiile de veneraţie şi dovezile de neobişnuită preţuire, cu emoţie şi gratitudine, dar şi cu tot calmul conştiinţei integral împăcate şi cu convingerea întărită a justeţii principiilor lui călăuzitoare din învăţământ.

Îl revăd în casa ultimilor lui ani, din strada Răsuri, — aceea pe care a lăsat-o prin testament *Gazetei Matematice* —, adunând, clasând şi redijând cu hărnicie şi pasiune, vast material pentru publicaţii matematice şi tehnice.

Îl revăd în sfârşit, tot acolo, în cei din urmă patru ani ai vieţii, în patul de boală pe care n'avea să-l mai părăsească, calm, resemnat, împăcat cu soarta, adesea optimist, interesându-se de tot ce se petrece pe lume, dar — se înţelege — mai ales de *Gazeta Matematică* şi de Şcoala Politehnică; judecând totul cu luciditate şi dând sfaturi pline de înţelepciune; iar toate clipele pe care le putea smulge suferinţelor fizice şi tratamentelor medicale, consa-

crându-le muncii neîntrerupte pentru aceeaşi *Gazetă Matematică*, sau pentru definitivarea manuscriselor cursului său de Poduri, în vederea tipăririi. Acolo, în patul de suferinţă, sau la masa de lucru la care cu greu putea ajunge, susţinut de alţii, îl regăsesc şi acum amintirile mele din dureroşii ani din urmă: de obiceiu clasând fişe, redijând probleme şi mai ales complectând texte pe care nu avea să mai aibă satisfacţia de a le vedea publicate; alteori, învins de boală, nesigur pe locul unde se găseşte, luptând cu îndârjire să-şi impue voinţa faţă de cei ce-l îngrijeau; de cele mai multe ori însă, cu deplină siguranţă, stăpân pe prodigioasa lui memorie rămasă uimitor de vie până la urmă, dictând sau dând directive şi preţioase indicaţii celor ce se oferiseră să-l ajute la mult aşteptata tipărire a cursului.

Astăzi, la un an de când liniştea eternă s'a coborît asupra acestui om care a cheltuit atâta energie, care a dominat cu atâta putere învăţământul din şcoala noastră de inginerie, şi a putut să-i imprime atâta vreme pecetea personalităţii lui, aveam speranţa să pot prezenta publicului tehnic românesc primul volum din principala lui operă — cursul lui — puţin amplificat de el şi cizelat în anii din urmă, pentru a deveni *Tratatul de Poduri* visat de el o viaţă întreagă. N'am reuşit, după cum n'am reuşit nici să luminez clipele din urmă ale bătrânului meu Dascăl, prezentându-i acest prim volum, proaspăt ieşit dela tipar. Căci am avut această mare speranţă şi voi avea cât voiu trăi imensul regret de a n'o fi putut împlini. Imprejurările vitrege au fost însă mai tari. De aproape trei ani, manuscrisul a fost predat tipografiei, corecturile au fost terminate, prima cred că datează de vreo 2 ani, însă Imprimeria Naţională a fost şi este mereu atât de copleşită de lucrări oficiale urgente, încât tipăritura noastră — ce se face sub egida Fundaţiilor Regale — rămâne mereu în urmă.

Lucrarea este totuşi aşteptată de atâta vreme, nu numai de foştii elevi ci, — sunt sigur —, de toată lumea tehnică din ţară. Despre valoarea ei indiscutabilă se va putea însă vorbi mai bine abia atunci când *Tratatul* va putea fi în mâna tuturor. Astăzi, nu-l cunosc decât — din amintire — cei ce au învăţat cursul în Şcoală, şi grupul restrâns de ingineri care au colaborat la definitivarea câte unei părţi din manuscrise.

Cu toate întârzierile apariţiei, datorită cărora se poate ivi teama explicabilă a învechirii şi poate chiar, pe alocuri, câte o

reală învechire în texte, — cei care-şi amintesc bogăţia informaţiilor, limpezimea expunerilor, siguranţa raţionamentelor, soliditatea gândirii tehnice, arhitectura clasică a sistematizărilor din vestitul curs al lui Ion Ionescu, — fost un lung şir de ani cel mai important şi cel mai folositor dintre cursurile de inginerie de construcţii din Şcoala noastră —, cei ce-şi amintesc toate acestea, şi-şi mai dau seama că partea cea mai bună din noţiunile constructive, practice şi teoretice, de care s'au servit ulterior în carieră, tot dela acest curs le-au rămas, nu pot avea vreo îndoială asupra importanţei deosebite ce-o va avea *Tratatul de Poduri*, odată tipărit.

Că folosul ar fi fost şi mai mare dacă Ion Ionescu şi-ar fi tipărit acest curs cu mulţi ani înainte, — încă de pe când profesa —, nimeni n'ar putea s'o nege. Lucrul i s'a cerut mereu şi adesea i s'a făcut o vină deschisă că nu-şi publică cursul. Chestiunea e însă ceva mai complicată decât ar părea la prima vedere. In orice caz, Ion Ionescu a explicat totdeauna că a fost în imposibilitate materială să tipărească, din cauza costului ridicat pe care nu-l putea suporta. Nu s'ar putea spune în ce măsură a mai contribuit însă şi metoda lui de predare, care comporta obligarea studenţilor să întocmească caiete de figuri după notele luate în orele de curs, — ceea ce n'ar mai fi fost posibil dacă ar fi existat cursul tipărit. Dovadă că la cele câteva ediţii, mai mult sau mai puţin complecte, ce s'au litografiat de diverse serii de studenţi, n'a permis să apară decât text, fără figuri. Vor fi influenţat apoi şi spiritul autocritic deosebit de viu, dorinţa lui de a perfecţiona mereu cursul, cu mereu înnoitele cuceriri ale tehnicei, precum şi lipsa de timp şi de linişte, necesare unei redijări definitive. Toate acestea îşi găsesc confirmare în faptul că abia după scoaterea la pensie s'a hotărît să tipărească. Şi atunci însă, cu toate stăruinţele, n'a mai acceptat să i se editeze cursul aşa cum îl ţinuse în ultimii ani de profesorat, ci a ţinut neapărat să dea la iveală un *Tratat de Poduri*, ceea ce-i cerea o muncă grea şi un timp mult mai îndelungat decât i-a permis sănătatea; de unde marile întârzieri pe care împrejurările atât de potrivnice din ultimii ani n'au putut decât să le multiplice. Imi propun de fapt să expun toate acestea pe larg, cu ocazia apropiatei apariţii a primului volum din cele 9 pregătite în manuscris.

Domnilor, marea majoritate a profesorilor noştri universitari, de ieri şi de azi, pot fi judecaţi în întregime după valoarea cursului, atunci când ajung să-l tipărească. Pentru profesoratul lui Ion Ionescu n'ar putea fi de ajuns, din cauza legăturii indestructibile ce-a păstrat în permanenţă cu Şcoala şi soarta ei, care-i stătea la inimă, cu studenţii şi progresele lor, pentru care-şi dădea toate ostenelile, ca şi cu toţi inginerii constructori formaţi la şcoala lui, faţă de care s'a bucurat toată viaţa de o imensă autoritate, întemeiată pe încredere, pe stimă, pe recunoştinţă şi pe admiraţie. In felul acesta, să vorbeşti despre profesoratul lui Ion Ionescu este să vorbeşti de însăşi viaţa Şcoalei noastre de inginerie de construcţii dela 1898 până la 1938; una se confundă cu cealaltă.

A avut în cel mai înalt grad *chemarea* pentru acest profesorat şi i-a păstrat focul sacru până la ultima clipă. In el găseai vocaţiunea unui apostol, nu calculul rece al unui ambiţios sau sufletul împietrit al unui *belfer* oarecare. Şi nu s'a mulţumit să facă lecţii şi să asculte la examene, ci s'a dăruit întreg învăţământului, călăuzindu-şi întreaga activitate didactică după principii imuabile. Citez dintr'o cuvântare a lui, care au fost acele principii şi corolariile lor:

« *Ajungând profesor . . . mă găseam angajat pe o linie trasată* « *şi construită dinainte; nu mai puteam asculta decât de conştiinţa* « *mea, nu mai puteam primi sugestiuni, abateri sau deraieri. Eram* « *hotărît: sau fac ce trebue, sau plec. Principiile care m'au condus* « *se pot rezuma în trei:*

« 1. *Profesorul este răspunzător de timpul pe care elevii îl pierd* « *în şcoală la cursurile şi lucrările pe care le fac.* Acolo trebue să « li se dea elevilor tot ce le este necesar pentru instrucţia şi edu- « caţia lor tehnică, în specialitatea pe care o predă profesorul. « In inginerie, profesorii sunt calfe care trebue să scoată ucenici; « elevul când iese din şcoală trebue să se simtă inginer, nu numai « absolvent.

« Profesorul trebue să fie un exemplu pentru elevi: el nu « le poate pretinde punctualitate dacă nu vine regulat la cursuri « şi la lucrări; nu poate pretinde ca elevii să vină pregătiţi, dacă « el nu vine pregătit la şcoală, cu cursul revizuit, reînoit şi pus « la zi cu progresele tehnice.

« Tot din principiul ca elevii să nu piardă timpul în şcoală « fără a profita, am fost un duşman neîmpăcat al fraudelor şi « falşurilor la examene şi lucrări. Am dus în această privinţă o « luptă îndârjită şi azi chiar, după ce am ieşit din şcoală, con- « tinuu în justiţie a apăra şcoala prin continuarea unui proces « contra unui inginer şi unui elev-inginer, falşificatori de proiecte.

« 2. *Al doilea principiu călăuzitor a fost de-a face ca elevii « să iasă din şcoală cu încredere deplină în ei înşăsi că sunt în stare « să facă faţă cerinţelor practicei, să aibă încredere în puterea lor « de-a concepe şi proiecta lucrări tehnice.*

« Pentru aceasta, elevii trebuiau deprinşi să facă proiecte « complecte, cu toate piesele cerute. Pentru atingerea acestui scop, « nu am luat în considerare proiecte incomplecte. Am tolerat de- « păşiri de termene de predare, dar nicio toleranţă de superficia- « litate la calcule şi la desene şi am introdus susţinerea proiectelor.

« 3. *Un al treilea principiu călăuzitor a fost seriozitatea în « îndeplinirea datoriilor.* Mi-am impus aceasta întâi mie, mi-am « impus să fiu sever cu mine şi apoi cu elevii. In schimb nu am « fost niciodată răzbunător, vindicativ, căci un profesor nu se « poate lua la luptă cu elevii săi fără a se înjosi. De aceea apoi, « nicio notă la examene sau la lucrări nu era influenţată de alt- « ceva decât de cunoştinţele arătate de elev ».

Aşa dar, iată omul excepţional şi profesorul eminent, cu strălucita lui carieră didactică, şi cursul, şi principiile lui călăuzitoare.

Mă opresc încă, o clipă, asupra unui fenomen pe care-l socot de cel mai mare interes: Urmărit în permanenţă de reputaţia că produce groază printre elevi, Ion Ionescu a provocat indiscutabilă dragoste, şi veneraţie nedesminţită, la întreaga generaţie de ingineri pe care i-a format.

E natural să te întrebi atunci: In ce a stat taina quasi-unanimei recunoaşteri şi nedesminţitului ataşament al tuturor seriilor de elevi ai acestui neobişnuit de sever profesor? Superioritatea culturii lui tehnice? Perspicacitatea deosebită în pătrunderea subtilităţilor matematice şi inginereşti? Talentul pedagogic? Atitudinea veşnic autoritară şi dârzenia în aplicarea legilor dictate de propria lui conştiinţă? Puterea de muncă şi conştiinciozitatea? Spiritul de dreptate, nedespărţit de severitatea lui inflexibilă?

Oricât de mari ar fi fost, singură niciuna din acestea n'ar fi putut constitui izvorul unei asemenea trainice legături.

Atunci ce? Voința neînduplecată? De sigur, era o trăsătură dominantă la Ion Ionescu, dar câți din profesorii repede uitați, din trecutul Politehnicei, n'au avut-o.

Înțelepciunea profundă a hotărîrilor, cu toată severitatea aparent excesivă? Căci dacă e adevărat că era aspru față de greșelile studenților, să nu se uite că era, cum am mai spus, tot atât de aspru cu el însuși, și că sub severitatea lui încruntată, se ascundea o deosebită bunătate, și înaltă și neînduplecată conștiință că este spre binele tineretului, a cărui educație în muncă o urmărea.

Știința și hărnicia lui de fiecare clipă în adunarea, pătrunderea și propagarea cunoștințelor noui din specialitatea lui?

De sigur, dar câți alți mari profesori ai Politehnicei n'au fost poate mai savanți ca el, în sensul strict al cuvântului.

Contrastul dintre ființa ursuză pe care o vedeau unii în el, și ceea ce era în realitate și comprima în adâncurile ființei lui: timiditate nebănuită, — atât de comună personalităților puternice —, adânc spirit de familie, bunătate, umor simplu și sănătos?

Cheia enigmei cred că nu trebue căutată în vreuna din aceste însușiri izolate, ci în sinteză, în prețioasa lor sinteză. Ion Ionescu a dominat Școala și Corpul profesoral, prin interesantul complex al însușirilor lui puțin comune. Această sinteză constitue, pe deasupra tuturor controverselor, adevăratul secret al devotamentelor pe care le-a inspirat acest profesor, îndreptățit să rămână una din cele mai legendare glorii ale Politehnicei noastre.

După cum se știe, Ion Ionescu, cu strălucita lui personalitate, și-a câștigat merite deosebite și în multe alte direcții, în afară de profesorat: matematician; inginer cu deosebită competență; creator în știință și tehnică; publicist cu o însemnată operă, atât pe ogorul istoriei matematicilor, al istoriei învățământului tehnic românesc și al istoricului societăților inginerești din România, cât și în câmpul popularizărilor științifice și tehnice; academician; conducător al asociațiilor de ingineri; creator și stâlp al *Gazetei Matematice*; caracter neasemuit; cetățean de elită; patriot înflăcărat.

Mai presus de toate se așează însă *profesoratul* în învățământul tehnic superior, cu desfășurarea lui în linia cea mai dreaptă,

cu metoda lui atât de personală, şi cu rezultatele minunate ce le-a dat, rezultate pe care le-a măsurat fiecare în parte din cei ce i-au trecut prin mână, ca şi ţara întreagă prin competenţa şi realizările generaţiei de ingineri constructori formată de el.

Ion Ionescu a servit Şcoala aceasta şi 36 de serii de studenţi ai ei, cu pasiune şi cu folos.

Foştii lui elevi l-au răsplătit constant, cu admiraţie şi cu dragoste, şi-i prăznuesc cu cinste şi cu recunoştinţă amintirea.

Rămâne ca şi Şcoala să-şi plătească, an de an, marea, imensa ei datorie de recunoştinţă.

I-a consacrat această sală, care-i poartă numele, şi în care catedra este dominată de efigia lui în bronz.

Mai trebue însă ca şi vastul curs pe care, peste 3 decenii, Ion Ionescu l-a menţinut la baza ingineriei de construcţii din această Politehnică, să-şi păstreze nivelul şi însemnătatea.

Se mai impune apoi ca şi proiectele cu care Ion Ionescu a format temeinic adevăraţi ingineri, siguri pe meseria lor, capabili să proiecteze şi să-şi ia răspunderea oricăror construcţii, să fie făcute în Şcoală cu aceeaşi conştiinciozitate şi cu acelaşi folos.

Şi mai este de datoria glorioasei noastre Politehnici să vegheze, ca, — evitându-se de a se cădea în vreo exagerare —, să se păstreze numeroasele părţi interesante şi care s'au dovedit utile din metoda lui de predare, din spiritul lui de disciplină şi din suflul lui de adâncă seriozitate şi punctualitate în împlinirea obligaţiilor de învăţământ, în efectuarea unei reale ucenicii inginereşti, ca şi în deprinderea la muncă ordonată şi cinstită.

Păstrându-se cu grijă toate acestea, ce de altfel sunt indisolubil legate de Politehnica noastră, aceasta va contribui mai mult ca orice la perpetuarea memoriei marelui profesor Ion Ionescu, care alături de Gh. Asachi, Gh. Lazăr, Ion Heliade Rădulescu, Leon Lalanne, Petrache Poenaru, Gh. Duca, urmează să fie numărat el însuşi printre ctitorii învăţământului tehnic românesc.

Ing. D. A. Stan

Profesor la Politehnica din Bucureşti.

ACTIVITATEA PROFESORULUI I. IONESCU CA OFIȚER DE REZERVĂ

Elevul «Sergent-major» al promoției 1894 a Școalei de Poduri și Șosele, Ion Ionescu, a cărui fotografie o redăm aici

a devenit ofițer de rezervă, ca sublocotenent de geniu, la absolvirea școalei și obținerea diplomei de inginer.

1. Prin legea din 31.XII.1885, sub directoratul lui Gh. Duca, se hotărîse introducerea de cursuri şi instrucţie militară în şcoală, pentru ca absolvenţii ei să poată avea pregătirea militară, necesară obţinerii gradului de sublocotenent în armata geniului.

Internii, purtau uniforma şcoalei de artilerie şi geniu, şefii anilor 1, 2 şi 3 (primii la clasificaţie) aveau gradul de sergent, iar şeful anului 4, gradul de sergent major.

I. Ionescu a avut ca profesori şi instructori militari câţiva din cei mai distinşi ofiţeri din acea vreme: Cpt. I. Culcer (Comandant de armată şi ministru mai târziu) la cursul de fortificaţii, Cpt. P. Vasiliu-Năsturel (absolvent al Şcoalei Politehnice din Paris şi Şc. de Artilerie din Fontainbleau, general mai târziu) la cursul de artilerie, Cpt. E. Pretorian (general mai târziu, C-tul Şc. Sup. de Război) la arta militară şi Cpt. C. Pârâianu, instructor.

Disciplina studiilor, alăturată disciplinei militare în pregătirea viitorului inginer, care se aplicau pe inteligenţa şi voinţa de fier a lui I. Ionescu, au avut o puternică influenţă asupra întregii desfăşurări a vieţii şi carierei sale.

Dragostea cu care directorii şcoalei din timpul său, Scarlat Vârnav şi C. Sturza priveau uniforma elevilor şcoalei şi uniforma militară în general, a lăsat urme adânci în sufletul lui I. Ionescu, care s'au manifestat tot timpul, mai târziu [1]).

Ieşit sublocotenent în 1894, este repartizat ca ofiţer de rezervă în Regimentul Nr. 1 Geniu.

In 1908 este înaintat *Locotenent* de rezervă şi mutat în Batalionul de Căi Ferate, nu de mult înfiinţat.

In intervalul 1900—1913, deşi nu a activat în domeniul armatei, a ţinut totuşi legătura cu şcoala de artilerie, geniu şi marină prin inginerul V. Cristescu, profesor de mecanică şi cu tineretul şcoalelor militare în general, prin *Gazeta Matematică*, la care activitatea acestui tineret era însemnată.

Una din fotografiile expuse la semicentenarul *Gazetei Matematice* este mărturia legăturii ce a păstrat în acel timp cu armata,

---

1) I. Ionescu. *Istoricul învăţământului ingineriei în România.*

când cu ocazia unei vizite la Şc. de Artilerie, Geniu şi Marină, au fost sărbătoriţi stâlpii «Gazetei», în cap cu I. Ionescu.

2. Activitatea sa practică, pe teren, în calitate de ofiţer de rezervă, deşi începută încă din 1913, se manifestă în toată amploarea ei, în războiul 1916—1918[1]). In perioada de pregătire 1914—16 premergătoare războiului pentru întregirea neamului. Ion Ionescu care între timp fusese înălţat la gradul de *căpitan* în rezervă, în Bat. de Căi Ferate — transformat în regiment — a fost consultat şi a dat preţioase îndrumări pentru crearea unor echipe volante specializate în diferite lucrări de căi ferate: poduri, tunele şi linii.

Utilajul şi materialele speciale necesare acestor lucrări au fost montate, respectiv aşezate pe vagoane, amenajate corespunzător şi echipele au fost încadrate cu ingineri şi specialişti ofiţeri şi subofiţeri de rezervă.

Tot în perioada de pregătire, 1914—1916, Ion Ionescu care era pe atunci Şef al Diviziei de studii din Direcţiunea Serv. Hidraulic din Ministerul Lucrărilor Publice, a condus diferite lucrări de interes militar la Dunăre: debarcadere, şi şosele de acces, amplasamente pentru artilerie antiaeriană în vederea apărării podului «Regele Carol I» peste Dunăre şi lucrări de fortificaţii la Turtucaia, care se executau sub conducerea multor ingineri din acea Direcţiune.

3. La 16 August 1916, Ion Ionescu a fost mobilizat la Marele Cartier General, Secţia II-a Comunicaţii cu însărcinări privind restabilirea căilor de comunicaţii.

In acest scop el a îndrumat lucrările de restabilire a liniilor ferąte din Transilvania, care suferiseră distrugeri din partea inamicului, în retragere.

S'a deplasat în timpul ofensivei române în Transilvania (August-Septembrie 1916) succesiv la Braşov—Sî. Gheorghe, Miercurea Ciuc, în regiunea Sibiu, la viaductul Caracău (linia Petru Rareş-Palanca) şi în regiunea Gheorghieni—Ditrău—Tulgheş—Piatra-Neamţ.

---

1) Datele ce urmează sunt culese dela d-nii ingineri I. Beleş, A. Beleş, foşti colaboratori ai lui I. Ionescu şi dela d-l avocat A. C. Ionescu fratele său.

La viaductul Caracău — de 265 m. lungime şi 62 m. înălţime deasupra văii — a cărei suprastructură metalică a fost aruncată în aer de inamic în retragere, Ion Ionescu a imaginat construcţia unei variante spre partea superioară a văii, întru cât restabilirea viaductului nu putea fi executată în timpul cerut de operaţiunile militare. Lucrările începute nu au putut fi însă terminate din cauza retragerii trupelor noastre.

Tot atunci, Ion Ionescu a examinat la faţa locului problema construirii unei linii ferate înguste menite să lege liniile normale: Bacău—Piatra-Neamţ şi aceea din văile superioare ale Oltului şi Mureşului, preconizând aşezarea unei linii ferate înguste pe şoseaua P.-Neamţ—Bicaz—Tulgheş—Ditrău.

Lucrările acestei linii ferate — începute la finele lunei Septembrie 1916 dinspre P.-Neamţ — au fost executate de diferite detaşamente din Reg. de Căi Ferate, conduse de ingineri mobilizaţi şi de ofiţeri activi, sub directa sa supraveghere.

In executarea acestei lucrări s'au construit unele variante şi câteva poduri şi viaducte de lemn în punctele unde linia ferată nu putea fi aşezată pe şosea.

Lucrările s'au desfăşurat cu toată febrilitatea, astfel încât în Decembrie 1916 linia a fost dată în exploatare până dincolo de comuna Bicaz, exploatarea făcându-se de unităţi din Reg. de Căi Ferate, utilizându-se în acest scop locomotive şi vagoane transferate de pe linia îngustă Crasna—Huşi şi dela unele linii forestiere.

La finele lunei Decembrie 1916 — conform planului de operaţiuni — trupe ruseşti au ocupat frontul din această regiune, astfel încât în Ianuarie 1917 linia ferată a fost predată spre exploatare acestor trupe şi Ion Ionescu a fost rechemat la Marele Cartier General.

4. La marele Cartier General *maiorul* în rezervă Ion Ionescu s'a ocupat — în perioada ce a urmat — cu diferite chestiuni privind poduri provizorii proiectate, în curs de construcţie peste Siret şi Prut.

In primăvara 1917 a fost trecut, în urma reorganizării serviciilor dela Secţia II-a Comunicaţii la Biroul Operaţiilor, din Marele Cartier General, cu aceleaşi însărcinări.

Calităţile sale de inginer şi militar, puterea neîntrecută de muncă, disciplina necesară în toată activitatea de război şi mai presus de toate, caracterul său, l-au impus atenţiei generale a Inaltului Comandament.

In vara 1917, Ion Ionescu s'a ocupat în special cu lucrările de poduri provizorii peste Siret şi peste Prut şi lucrările de şosele de acces, cerute de operaţiunile militare care au culminat prin luptele dela Mărăşeşti.

In 1918—19 conducea în Transilvania lucrările de refacerea comunicaţiilor şi podurilor, necesare ofensivei române.

In hârtiile sale, am găsit pe coperta unui caiet de «Căi Ferate» lista celor 38 poduri existente sau proiectate şi 11 vaduri peste Siret, necesare operaţiunilor şi a căror amenajare sau construcţie tehnică intrau în atribuţiunile sale.

5. Tot în cursul primului război mondial, deşi absorbit până la epuizare de însărcinările sale în legătură cu operaţiile, găsea totuşi momente în care să se ocupe de relaţiile dintre tehnică şi ştiinţa militară.

Trebue în acest sens să înregistrăm faptul că, fiind raportor al *Gazetei Matematice*, susţine cu cea mai puternică convingere înfiinţarea unui premiu pentru lucrări de matematici aplicate la cunoştinţe militare, premiu numit « G-l Sc. Panaitescu », făcând astfel dovada unui cunoscător în materie.

De asemenea scrie în legătură cu chestiunile militare, două articole în *Gazeta Matematică*: « *Relaţiile dintre matematici şi ştiinţele militare* » şi « *Determinarea punctului în care s'a produs detunătura* »[1]).

6. După primul război mondial, multiplele preocupări şi trecerea în elementul corespunzător vârstei din punct de vedere militar, nu au mai permis profesorului Ion Ionescu să se ocupe de chestiuni în legătură cu armata.

A rămas însă acelaşi dascăl al disciplinei intelectuale şi civice, pentru toţi militarii care au lucrat la « *Gazetă* » sau i-au fost elevi la Şcoala Politehnică, mai mult chiar decât pentru ceilalţi.

In timp de pace, ca şi în timpul războiului, Ion Ionescu a fost un mare patriot, dublat de un remarcabil tehnician şi un neînfricoşat apărător al muncii serioase şi cinstite.

---

1) G. M., Vol. XXIII, pag. 36, 56, 76, 104, 132 şi 151.

Dincolo de privirea sa de oţel, se ghicea un suflet înţelegător şi îndrumător pe linia muncii, onoarei şi disciplinei.

Aceste calităţi au făcut din ofiţerul de rezervă Ion Ionescu unul din cei mai «*activi*» ofiţeri.

Lt.-Colonel Mihail Focşeneanu.

ION IONESCU
OMUL

Greutatea de a zugrăvi un om, de a-i pune în lumină personalitatea, a-i scoate în evidenţă trăsăturile caracterului, de a-l face să fie cunoscut de alţii, este resimţită de oricine porneşte la această sarcină. Cei ce stau în apropierea sa nu-l văd, sau văd numai lucrurile comune, aspectele zilnice, şi viaţa de toate zilele ascunde esenţialul sub noianul faptelor mărunte. Cei ce stau departe de el şi nu-l văd, nu au contact cu el şi îşi creează o imagine, care poate nu corespunde.

Şi aci este greutatea cea mai mare. Având materialul strâns, se poate ca dând o importanţă mai mare sau mai mică unora din fapte, să facem balanţa să se aplece într'o parte sau în alta. Dar acest lucru se întâmplă şi cu memoriile scrise personal de cei în cauză, şi în care, pentru posteritate, ei sunt tentaţi să acorde mai multă atenţie unor lucruri, sau să treacă sub tăcere altele. Poate că zugrăvirea unei personalităţi se poate face mai imparţial de un altul, şi poate este şi mai folositoare, ea reprezentând imaginea unui suflet pe oglinda altui suflet. Şi cea mai importantă acţiune a unui om este urma pe care o poate lăsa în sufletul celorlalţi.

Cu cât mai mare este greutatea de a zugrăvi o personalitate mare. Părerile sunt aci împărţite, omul are admiratori şi duşmani, unii îl apreciază cu elogii, alţii îl denigrează. Cei ce au trăit în imediata sa vecinătate şi nu pot avea perspectiva, îl privesc cu simpatie, dar ca pe un om oarecare; acel pe care l-au văzut zilnic, în toate actele mărunte ale vieţii de toate zilele, nu poate să fie un om mare. Cei care sunt mai departe, sau mai străini de activitatea sa, nu pot prinde importanţa faptelor, privindu-le fiecare din punctul de lor vedere.

Sarcina pe care mi-a încredinţat-o *Gazeta Matematică* de a zugrăvi cu ocazia comemorării de un an latura omenească a lui Ion Ionescu, trebue privită în lumina celor de mai sus şi luând coeficientul de siguranţă necesar. Am cunoscut ca elev de liceu, la *Gazetă*, pe Ion Ionescu, în timpul când impresiile erau puternice şi lăsau urme, căci tineretul pune mult entuziasm în manifestările sufleteşti; am avut profesor pe Ion Ionescu la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele, unde relaţiile au fost întru câtva schimbate, căci şcoala liberă a *Gazetei* se deosebea de şcoala rigidă şi formală de mai târziu; am venit în contact mai strâns cu Ion Ionescu, cu alţii care erau foşti elevi şi admiratori ai lui; am ascultat pe alţii care erau critici. Şi fiind eu însumi profesor şi urmărind an de an cu studenţii aceleaşi probleme, am fost adus să mă gândesc zilnic la multe din aspectele acestea.

Iată deci câteva aspecte ale omului, cunoscute de unii din noi şi care pot fi scoase în evidenţă şi pentru cei care nu l-au cunoscut.

Ion Ionescu era un spirit matematic înăscut. Nu avea o formaţie teoretică la vreo şcoală matematică oarecare, nu urmărea a face combinaţii de numere şi de linii, de a diseca cu mintea. Agerimea şi ascuţimea sa sunt dovedite în colecţia anilor *Gazetei*, mai cu seamă în domeniul ingrat al aritmeticei, dar ceea ce nu se vede acolo, este plăcerea ce o resimţea la găsirea unei probleme şi satisfacţia ce avea de a pune, de a urmări încercările pentru rezolvare. Obiceiul acesta de a socoti îl avea în toate actele sale, urmărea fiecare chestiune cu ascuţime şi făcea din fiecare lucru o problemă.

In cancelaria profesorilor la Politehnică aştepta intrarea în clasă, şezând la locul său pe canapea. Intr'o zi un coleg îl întreabă de ce a venit aşa de vreme. La care a explicat că venirea de acasă o face schimbând două tramvaie şi, calculând întârzierile maxime ce se pot întâmpla pe cele două linii, pleacă totdeauna de acasă aşa fel ca să acopere întârzierea maximă şi să nu întârzie la lecţie. In acest fel era de multe ori înainte, aşteptând să sune intrarea în clasă, dar niciodată în întârziere.

La Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele a avut ani de zile lucrările de rezistenţa materialelor şi epurele de statica grafică. Problemele date de el elevilor sunt de o ingeniozitate şi de o va-

rietate care uimeşte. Modul cum stăruia în rezolvarea problemelor, cum căuta să îndrumeze spiritul elevilor săi spre disecarea chestiunii, plăcerea ce o simţea la discuţiile iscate de ele, sau la soluţiile reuşite date, sunt o dovadă de interesul matematic ce reprezentau pentru el.

Ion Ionescu era un cărturar. In lumea în care a trăit, acum 50 ani, care nu se deosebeşte chiar aşa de mult de acea de acum, în lumea în care foarte mulţi oameni nu au altă lectură decât jurnalul, unde ocupaţiile şi preocupările intelectuale sunt reduse la minimum, Ion Ionescu avea o bibliotecă, cunoştea cărţile şi era la curent cu ce se publica, cumpăra cărţi şi le citea.

Avea o cartotecă unde strângea pe capitole informaţiile referitoare la obiectele care-l preocupau. Mare parte din timp şi-o petrecea notând şi sistematizând notiţele sale. Câţi dintre noi acum avem asemenea preocupări, câţi dintre noi au acasă o cartotecă unde să strângă material, câţi urmăresc o temă, au o preocupare constantă intelectuală de acest fel?

Şi ceea ce este mai izbitor, este că Ion Ionescu nu învăţase acestea la vreun maestru. El îşi găsise singur calea. Poate că a avut unele exemple, unele modele care l-au inspirat, dar cine le ştie?

Om de ordine, muncitor, meticulos, punctual, Ion Ionscu a ţinut la toate aceste calităţi şi a căutat să le insufle tuturor acelor cu care lucra. O viaţă întreagă a impus, prin acţiunea sa zilnică şi nu prin vreo constrângere, aceste calităţi la *Gazeta Matematică*, încât ele au devenit o tradiţie, pe care urmaşii lui sunt mândri să o continue. La Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele aceste calităţi erau mai greu suportate, atât de mulţi elevi, cât şi de colegi. Căci firea tolerantă a românului cu greu se împacă cu rigiditatea principiilor. Şi atât elevii cât şi profesorii suportau câteodată cu greu regulile pe care le fixa rigiditatea lui Ion Ionescu.

Poate că şi dânsul, antrenat în direcţia ce şi-o fixase, a fost câteodată prea rigid. Este greu de a putea aprecia cu deplină obiectivitate acest fapt. Cert este însă că de multe ori rămânea în minoritate şi în timpul din urmă nu mai găsea sprijinitori pentru linia sa de conduită.

Această linie de conduită şi-a păstrat-o până la moarte. Era un neadaptabil, s'ar zice, dar de sigur fiind o personalitate nu se putea adapta întâmplător după alţii.

Invăţământul tehnic superior îl vedea sub forma Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele, care să pregătească ingineri pentru serviciile Statului. Când toată lumea pregătea etapa de desvoltare pentru încadrarea învăţământului tehnic superior, când se vorbea de învăţământ universitar, Ion Ionescu a fost hotărît contra, în vorbă şi în scris. Chiar după ce s'a realizat Politehnica, el a rămas la ideea sa şi a fost partizanul creării unei şcoli de ingineri pentru Ministerul Lucrărilor Publice.

La lecţiile şi şedinţele de proiecte dela şcoală, la consilii, la Comitetul Societăţii Politehnice, la şedinţele Consiliului Tehnic Superior, la şedinţele Academiei Române, unde era membru coresopndent, la şedinţele lunare ale *Gazetei*, punctualitatea lui Ion Ionescu era cunoscută. La ora exactă el intra pe uşă şi îşi ocupa locul; la toate lucra cu linişte, cu răbdare, cu punctualitate.

Cu toate aceste calităţi superioare Ion Ionescu era de o simplitate şi de o modestie deosebită. Cu nimic nu căuta să facă impresie, ba din contra poate exagera în direcţia contrară. S'ar putea spune, spre deosebire de aceea la care primează forma lipsită de fond, că la Ion Ionescu fondul nu se vedea decât de cei ce-l căutau şi mulţi, procedând uşor, se credeau îndreptăţiţi să-i impute lipsa de formă.

A înfiinţat, a condus imprimându-i mişcarea şi disciplina, o *Gazetă*, care acum este cea mai veche şi mai constantă publicaţie, cu cerc larg de cititori. Şi la serbarea celor patruzeci de ani ai *Gazetei*, care de fapt era sărbătorirea persoanei sale, el rosteşte cuvântul ce poate caracteriza simplitatea şi modestia sa: *căutând să găsească o proprietate a numărului patruzeci, care să justifice importanţa acestei sărbători nu a găsit decât că după el urmează patruzeci şi unu.*

Ion Ionescu a cultivat această floare rară, care este recunoştinţa. Toată viaţa sa a arătat meritele maestrului său, Anghel Saligny, nu lăudându-l pe el pentru a se înălţa pe sine, ci fără altă preocupare decât cea de ordin sufletesc. Terenul pe care înfloreşte recunoştinţa nu poate fi decât acel al modestiei.

Ion Ionescu a dominat o epocă de activitate tehnică, a format 36 serii de ingineri şi a contribuit puternic la formarea caracteristicelor de atunci ale corpului tehnic. A stăpânit mintea tineretului în Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele; la *Gazeta Ma-*

tematică, a fost o figură de care se vorbea, a avut admiratori şi duşmani.

A avut numeroase semne de admiraţie din partea elevilor şi colaboratorilor săi. A fost sărbătorit. La încheierea profesoratului foştii lui elevi au contribuit şi au donat Politehnicei o placă de onoare cu basorelieful său, au amenajat şi au înzestrat sala care poartă numele său. Este singurul semn de acest fel în şcoala unde numeroşi profesori s'au perindat.

Când s'a organizat Colegiul Inginerilor a fost primul decan, cu acceptarea subînţeleasă a tuturor inginerilor, căci încă de mult prin capacitatea sa era decanul recunoscut al inginerilor.

Nu a fost cruţat de decepţii. In serviciile Ministerului, unde prin rigiditatea lui nu-şi găsea soluţiile adoptate, se vedea nevoit să-şi păstreze punctul de vedere, renunţând la servicii.

Dar cea mai mare decepţie pe care a avut-o a fost nerecunoştinţa elevilor săi, care au declarat grevă. In această încercare, dureroasă pentru un profesor care a pus atâta inimă şi muncă pentru cursurile lui, se poate vedea măsura caracterului. Omul a primit această lovitură, a cerut pedepsirea grevişţilor şi s'a retras dela catedră, fiind suplinit atât timp cât greviştii au fost elevi ai şcolii. A ignorat aceste serii care fuseseră şterse din cataloagele lui, deşi pe urmă a avut legături mai mult sau mai puţin prietenoase cu unii ingineri din seriile acestea, despre care a spus că sunt numai ingineri de şosele, nu şi de poduri, căci nu făcuseră cursul de poduri cu dânsul.

Un om poate fi caracterizat prin unele trăsături, cu adevărat omeneşti, adică generale, ale caracterului său, indiferent de profesiunea sau de poziţia sa în societate. Ceea ce omul are mai aproape de sufletul lui, poate fi pentru ceilalţi, atât cât o pot vedea, o indicaţie asupra caracterului.

Unul este iubitor de arginţi, altul este iubitor de laudă şi de linguşire; unul iubeşte puterea şi autoritatea, altul iubeşte retragerea şi viaţa tihnită în familie; unul are inima deschisă pentru aproapele lui, altul nu vede decât egoista lui persoană.

Care ar fi trăsătura omenească a lui Ion Ionescu, care să ne dea o indicaţie a caracterului său?

Nu cred să greşesc dacă scot în evidenţă dragostea sa de tineret, reprezentat prin elevii de liceu dela *Gazetă*, prin elevii

săi dela Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele şi dela Politehnică, viitorii ingineri de mai târziu.

Nu este niciun vechiu corespondent al *Gazetei* care să nu fi avut, care să nu mai păstreze poate undeva, câte o carte poştală dela Ion Ionescu, în care să fie confirmarea soluţiei unei probleme, o discuţie sau vreo îndrumare la soluţia unei probleme, informaţii pentru concursul *Gazetei*. O legătură strânsă pe care tineretul o aprecia ca o cinste şi care pentru mulţi a fost principalul îndemn la lucru. Când atâţi alţii, răspunzând înclinaţiei lor sufleteşti, îşi întrebuinţează timpul în câştigarea unei bune stări materiale, sau în importante posturi de conducere, până la ministru, Ion Ionescu îşi avea în programul său zilnic urmărirea dela distanţă a atâtor tineri, risipiţi prin toate colţurile ţării.

Elevii săi dela Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele simţeau poate altfel atenţia deosebită ce li se acorda. Se spunea de unii din ei că Ion Ionescu era rău. Poate că era numai un aspect pe care el îl considera necesar; generaţia dinaintea sa a cunoscut nuiaua ca un principiu de învăţământ şi ca un mijloc pedagogic. Dar este fapt recunoscut că dintre toţi profesorii dela şcoală, personalităţi fiecare din ei, Ion Ionescu ocupa în atenţia elevilor un loc aparte. Pentru unele serii Ion Ionescu era şcoala, şi celelalte amintiri s'au estompat şi chiar s'au şters, rămânând numai figura sa.

Ca profesor aproape de încheierea carierei mele, abia acum pot să măsor întru câtva, câtă energie a desfăşurat Ion Ionescu, în orele pe care le făcea cu elevii şi în celelalte ore de pregătirea materialului, pentru a putea să obţie un asemenea rezultat, şi ne putem închipui puterea unui om care desfăşoară această energie cu 36 serii de elevi. Am cunoscut şi am avut legături sufleteşti cu Gh. Em. Filipescu, care se bucura de o autoritate tehnică nediscutată, şi m'a frapat admiraţia ce o avea pentru Ion Ionescu, căruia îi cerea cuvântul şi din cuvântul căruia nu ieşea, admiraţie care te câştiga când Filipescu, la o ocazie nimerită, o îmbrăca în cuvântul lui cald şi potolit.

Ion Ionescu a fost iubit şi admirat de elevii lui şi de tinerii ingineri, care veneau la practică pe Dunăre la Serviciul idraulic, sau în serviciile pe care el le-a condus. Ion Ionescu a avut cercul

lui, şi la *Gazetă*, la Societatea Politehnică sau la Căpitanul [1]) puteai auzi glasul lui autoritar sau râsul lui sănătos. Ani de zile a fost îndrumătorul şi sfătuitorul activităţii tehnice a numeroşi ingineri, care începuseră să-l cunoască din liceu, dela *Gazetă* şi îşi păstraseră această admiraţie. Şi lumea, lumea cealaltă, părinţi şi corespondenţi, mame şi mătuşi, socri şi soacre, aflau mai de vreme sau mai târziu, sub o formă favorabilă sau nefavorabilă, că este un profesor la şcoala de ingineri numit Ion Ionescu.

Ion Ionescu a fost criticat, pe drept şi pe nedrept, de alţii. In serviciile prin care a trecut nu era recunoscut ca un om comod, cu care poţi să iei atitudine. Dar aceste amănunte profesionale sunt mai puţin valoroase pentru caracterizarea omului.

Ion Ionescu ne-a părăsit. Şi totuşi ne strângem împreună ca să-i evocăm amintirea, ne considerăm datori să-l facem cunoscut şi altora, ne străduim să-l păstrăm între noi, în sufletele noastre.

Şi avem dreptate. Căci cea mai importantă acţiune a unui om este urma pe care o poate lăsa în sufletul celorlalţi.

Constantin C. Teodorescu.

CUVÂNTUL COLEGIULUI INGINERILOR

Colegiul Inginerilor care întruneşte într'un mănunchiu uriaş 14.000 de Ingineri din România, a ţinut să fie prezent la comemorarea de un an a morţii primului său fost Decan.

Matematicianul, savantul, inginerul, profesorul stimat, respectat şi iubit a mai multor zeci de generaţii, militarul şi omul, ne-a fost înfăţişat în mod magistral de antevorbitorii mei, colaboratori, foşti discipoli, admiratori şi prieteni ai defunctului profesor Ing. Ion Ionescu.

Acestui buchet de dragoste, daţi-mi voe să-i mai adaug şi eu în numele Colegiului Inginerilor o floare de pioasă amintire în legătură cu activitatea depusă la această Instituţie îndată după înfiinţarea ei din toamna anului 1938, când votul unanim al Inginerilor l-a pus în fruntea ei, pe care a organizat-o şi condus-o cu pri-

1) Era o berărie instalată la întâlnirea Străzei Poincaré cu Bulevardul Carol, în faţa Universităţii.

cepere, devotament şi în spirit de largă dreptate pentru colegii ingineri, până la 1 Decembrie 1941 când simţindu-se obosit şi bolnav şi-a dat demisia.

Dar timpul trece şi odată cu el şi generaţiile de oameni care se succed, şi noi, care ne-am adunat astăzi, să sărbătorim memoria celui ce a fost Profesorul Ing. Ion Ionescu, vom urma calea antecesorilor noştri, rămânând cu timpul toate numai o simplă amintire în sufletul urmaşilor noştri.

Privind tabla de bronz fixată în peretele acestei săli, ridicată din dragostea şi recunoştinţa celor 36 generaţii de ingineri, ieşiţi din şcoala acestui mare dascăl, îmi amintesc de cuvintele poetului latin: « Exegi monumentum erre perenius... »

Dragostea pentru ştiinţele matematice şi pozitive ce a sădit în sufletul atâtor generaţii, şcoala şi tradiţia ce a creat în această privinţă rămân un simbol veşnic, mai trainic decât bronzul, pentru care inginerimea română se închină cu smerenie memoriei defunctului ei decan, profesor şi îndrumător şi-i va păstra cu recunoştinţă amintirea.

Ing. Eneea Grapini.

SCRISOAREA D-LUI T. CONSTANTINESCU

Bucureşti, 23 Septembrie 1947

Onor.

Delegaţia Gazetei Matematice

L o c o

Domnilor Membri,

Am primit amabila d-voastră invitaţiune de a lua parte la comemorarea Profesorului Ing. Ion Ionescu.

Am ascultat cu multă mulţumire cuvântările ţinute cu această ocaziune.

Intru cât în programul serbării, nu eram prevăzut printre vorbitori, îmi permit, în calitatea mea de singurul în viaţă dintre cei 10 fondatori, de a spune pe această cale câteva cuvinte despre cel de care m'a legat o prietenie de peste 50 ani.

Ion Ionescu, cu marile lui calităţi, cu inteligenţa, energia şi neegalata lui putere de muncă, ar fi putut dobândi onoruri şi

averi; acestea însă nu-l interesau. Toată activitatea lui o punea, cu patima cunoscută, în serviciul Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele şi a iubitei sale *Gazete*.

In 1895, în cei nouă camarazi a găsit colaboratori şi tovarăşi pentru redactarea şi susţinerea *Gazetei Matematice* dar creatorul ei a fost fără îndoială, Ion Ionescu.

In cei peste 50 de ani de existenţă, *Gazeta Matematică* a trecut prin multe greutăţi; la un moment era să dispară. Ion Ionescu e acel care şi atunci a luptat printre primii pentru a o apăra; nu exagerez spunând că lui se datoreşte că a continuat să apară. Fără a micşora meritele lui V. Cristescu, A. Ioachimescu şi G. Ţiţeica, marii colaboratori ai *Gazetei*, e neîndoielnic că « Mama » *Gazetei Matematice* a fost Ion Ionescu.

Şi pe patul de moarte, ultimul lui gând a fost la Şcoala de Poduri şi Şosele şi la *Gazetă*, căreia i-a lăsat şi mica sa avere, agonisită printr'un trai modest şi — poate — prin privaţiuni.

In numele meu, şi de sigur şi în numele celor din mormânt, urez distinşilor conducători de astăzi şi celor din viitor, să ia pildă dela Ion Ionescu şi să ducă mai departe *Gazeta* pentru binele învăţământului în care scop a fost creată.

Primiţi, vă rog, Domnilor Membri, asigurarea sentimentelor mele cele mai alese.

Tancred Constantinescu.

SCRISOAREA D-LUI ING. I. VARDALA

16 Sept. 1947.

Scumpe Domnule General Buicliu

Sunt foarte mâhnit de a nu putea participa decât cu gândul, însă şi cu inima, la pioasa comemorare a zilei în care a dispărut dintre noi iubitul nostru coleg şi prieten Ion Ionescu, a cărui figură o venerăm cu toţii.

Dacă veţi avea bunăvoinţa a comunica şi celorlalţi colegi prezenţi la ceremonie cele de mai sus, vă voi rămânea îndatorat şi recunoscător.

Cele mai amicale sentimente pentru toţi

I. Vardala.

MEMORIU PENTRU ÎNSCRIEREA ÎN COLEGIUL INGINERILOR

I. ACTE CIVILE

1. Sunt născut din părinţi români la 22 Noembrie st. v. 1870 în comuna Creaţa-Leşile, judeţul Ilfov.

Actul de naştere mi s'a pierdut la Ministerul de Războiu. Posed însă o declaraţiune a trei locuitori din acea comună, mai vârstnici decât mine, care ţine loc de act de naştere, şi care a fost dată la 23 Mai 1927 la Judecătoria Ocolului V din Bucureşti.

II. STUDII TEHNICE

1. Studiile inginereşti le-am făcut în fosta Şcoală Naţională de Poduri şi Şosele, ce depindea de Ministerul Lucrărilor Publice, în anii 1889—1894. In Publicaţia pe care a făcut-o acest Minister în Monitorul Oficial Nr. 67 din 25/7 Iunie 1894 se arată că am obţinut în 1894 Diploma de Inginer fiind întâiul în clasificaţie cu media generală 18,42.

2. Sunt inginer hotarnic pe lângă Tribunalul Ilfov după cum se constată prin publicaţia făcută de Ministerul de Justiţie prin Monitorul Oficial din 8 Iulie 1894, pag. 2897.

III. ACTIVITATE TEHNICĂ

1. După terminarea Şclalei Naţionale de Poduri şi Şosele, la 16 Iulie 1894 st. n. am fost numit inginer asistent la Direcţiunea Generală a Căilor Ferate, Serviciul pentru legarea drumurilor de fier dintre Feteşti şi Cerna-Vodă, unde, în vara anului 1895, am ţinut locul şefului Secţiei I. Pe aceeaşi zi am fost numit în Cadrele Corpului Tehnic unde am fost până la 1921 în cadrul efectiv iar de atunci încoace în cadrul de neactivitate.

2. După terminarea lucrărilor acestor linii am fost trecut la Serviciul Podurilor din Direcţia Generală a Căilor Ferate Române. Acolo am făcut proiecte şi construcţiuni de Poduri şi alte lucrări pe liniile ferate, am făcut recepţiuni de poduri şase luni în Franţa şi şase luni în Germania şi am organizat atelierele de consolidare de poduri pe linia Ploeşti—Predeal în anii 1898—1899. Aci am fost înaintat Şef de Secţiune.

3. Pe timpul crizei financiare din 1900 am fost trecut la 1 Aprilie la Serviciul Portului Constanţa, dar nedându-se fonduri şi acolo, am fost trecut pe ziua de 1 Iulie 1900 la Serviciul Hidraulic, unde am stat până la 1 Ianuarie 1919, ajungând Subdirector al Serviciului. Acolo am făcut proiecte pentru acel Serviciu şi pentru Şantierul din Turnul-Severin, printre care podul combinat de şosea şi de cale ferată în curbă peste bazinul din Giurgiu. Tot acolo am fost Dirigintele lucrărilor pentru Harta Hidrografică a Dunării între Brăila şi Gruia. In perioada pregătirii războiului am fost însărcinat personal cu lucrări de comunicaţii în zona Turtucaia.

4. La 1 Ianuarie 1919 am fost numit Director al Serviciului de Poduri metalice, iar la 1 Aprilie 1921 Director General al acelui Serviciu. Din lipsă de fonduri suficiente pentru funcţionarea acelui Serviciu, la 1 August 1921 am demisionat, rămânând cu funcţiunea de Profesor la Şcoala Politehnică.

5. La 1 Noembrie fusesem înaintat Inginer Inspector General clasa II-a. Anularea actelor şi legilor Parlamentului dela Iaşi, ales sub ocupaţiunea inamică a unei părţi din ţară, a adus anularea Decretului. Inaintarea s'a făcut din nou pe 1 Aprilie 1919.

6. Din ordinul Ministerului Lucrărilor Publice am făcut parte din Comitetul de Direcţie de pe lângă Direcţiunea Generală a Poştelor, Telegrafelor şi Telefoanelor cu începere dela 1 Aprilie 1927.

7. Din ordinul Ministerului de Lucrări Publice am făcut parte din Comitetul Tehnic Special de Direcţiune de pe lângă Direcţiunea Generală a Construcţiilor de Căi Ferate, şi anume din primul Comitet înfiinţat în 1923 şi al doilea înfiinţat în 1927.

8. Ca Delegat al Ministerului de Lucrări Publice am făcut parte din Comisiunea centrală a despăgubirilor de război pe lângă Ministerul de Finanţe, pe tot timpul cât a funcţionat această Comisiune.

9. Ca Delegat al Ministerului Lucrărilor Publice am făcut parte din Comisiunea pentru executarea tratatelor de pace în anii 1920—1921.

10. Din 1919 am fost numit în patru rânduri membru în Consiliul Tehnic Superior unde am fost ales şi Vicepreşedinte şi unde funcţionez şi azi.

11. In anii 1923—1926 am fost numit Vicepreşedinte al Comisiunii interimare la Primăria Capitalei în calitate de tehnician. Acolo am avut sub conducerea şi controlul meu, Serviciile de drumuri, ape, canale şi arhitectură şi am prezidat tot timpul Comisiunea Tehnică a Primăriei Capitalei. Acolo am luat parte la alcătuirea Legii Uzinelor Comunale şi am fost membru în Comitetul de Direcţie al acestor Uzine. Ca delegat al Primăriei Capitalei am făcut parte din Comisiunea pentru încurajarea Construcţiunilor şi în Consiliul de administraţie a Tramvaielor Comunale Bucureşti.

12. Am fost timp de 5 ani membru în Consiliul Superior al avuţiilor şi întreprinderilor publice (1928—1933).

13. La 1 Noembrie 1936, cu ocaziunea sărbătorii ce mi-au făcut-o foştii mei elevi, Corpul Profesoral şi Elevii Şcoalei Politehnice, după propunerea d-lui Ministru al Lucrărilor Publice, *M. S. Regele*, a binevoit a mă onora cu decoraţiunea: Mare Ofiţer al Coroanei României.

IV. ACTIVITATEA MILITARĂ

1. Pe timpul războiului cu Bulgaria din 1913 am fost mobilizat la Regimentul de Căi Ferate unde am făcut reparaţiuni de linii, am pus în stare de funcţiune podul peste Vid la Plevna şi am organizat transporturi de locomotive şi vagoane peste Dunăre cu Ferry-boaturi improvizate.

2. In timpul războiului 1914—1918, am fost mai întâi în timpul pregătirilor membru în Comisiunea pentru organizarea restabilirii comunicaţiilor în urma frontului, alcătuind echipe de drumuri, căi ferate, poduri şi tunele făcând aprovizionări de materiale în diferite puncte ale ţării. Am făcut parte din Comisiunea consultativă industrială de pe lângă Direcţiunea Generală a Muniţiilor şi alte Comisiuni cu atribuţiuni limitate.

3. Pe timpul războiului am fost mobilizat la Marele Cartier General în prima perioadă, până la retragerea în Moldova, la Biroul Comunicaţiunilor în a doua parte la Biroul Operaţiunilor. Acolo m'am ocupat cu chestiuni de restabilirea comunicaţiunilor distruse de inamic în urma retragerii lor, cu construcţia liniei înguste Piatra—Prisăcani, cu lucrări de şosele, căi ferate, fortificaţii, etc.

V. ACTIVITATE DIDACTICĂ

1. In anul şcolar 1897—1898 am fost profesor de matematici la Şcoala de Telegrafie din Bucureşti.

2. In anii 1898 şi 1902 am suplinit catedra de mecanică aplicată la Stabilitatea construcţiilor şi Rezistenţa materialelor la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele din Bucureşti.

Dela 1 Noembrie 1903 până la 1 Septembrie 1914 am fost profesor de Lucrări grafice: Epure, Proiecte de poduri şi proiecte industriale şi aplicaţiuni ale calculului tehnic în care timp am înlocuit deseori pe profesorul de poduri ANGHEL SALIGNY.

3. La 1 Octombrie 1914 acesta demisionând, după recomandarea lui am fost numit succesorul său. Cursul de Poduri l-am predat la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele şi Şcoala Politehnică, până la 1 Octombrie 1938, când am fost pus în retragere din oficiu prin reducerea anilor de retragere dela 70 la 65. Cursul de Poduri a fost continuat în Şcoala Politehnică la Secţiunea Construcţiunilor. La înfiinţarea Şcoalei Politehnice am făcut cu toate Secţiunile un curs general de Construcţiuni metalice, care ulterior s'a trecut numai la secţiunea construcţiilor.

4. După războiu, în timpul cât Şcoala a funcţionat la Iaşi, am făcut la anul Preparator al ei un curs de Mecanică raţională.

5. In Şcoala Politehnică am fost ales în trei rânduri Preşedinte al Secţiunii Construcţiilor.

6. Din 1919 până în 1931 am făcut parte din Consiliul permanent al construcţiunii publice pentru partea industrială.

7. Am făcut parte din numeroase Comisiuni pentru reforma Invăţământului Tehnic Superior şi Mediu şi am scris la Istoricul Invăţământului Tehnic Superior în România, până la anul 1921.

VI. ACTIVITATEA ŞTIINŢIFICĂ

Am fost unul din iniţiatorii înfiinţării în 1895 a Revistei: *Gazeta Matematică* la care funcţionez ca redactor activ 44 ani.

2. Ca membru al Societăţii Române de Ştiinţe am fost în trei rânduri Preşedinte al Secţiunii Matematice şi în 1910 Preşedinte al Societăţii.

3. In anul 1911 am fost Preşedinte al Asociaţiunii Române pentru înaintarea şi răspândirea ştiinţelor, în care calitate am prezidat Congresul ţinut de acea Asociaţie la Târgovişte, în acel an.

4. Inainte de războiu am fost membru al Asociaţiei Matematice din Anglia de unde am demisionat din cauza diferenţei valutare dintre liră şi leu.

5. La Societatea Politehnică din Bucureşti am fost 9 ani Vicepreşedinte şi 3 ani (1932—1934) Preşedinte.

6. Din Mai 1919 sunt membru corespondent al Academiei Române, Secţiunea Ştiinţifică.

(ss) Ion Ionescu.

TESTAMENTUL [1] INGINERULUI ION IONESCU

Subsemnatul Ion Ionescu, *astăzi pensionar al Statului, declar prin aceasta, că acesta este testamentul meu, alcătuit şi scris de mine în întregime şi având semnătura mea proprie.*

1. Scurt istoric al vieţii mele.

Eu m'am născut în cătunul Stoienoaia, comuna Creaţa Leşile, Jud. Ilfov, la 22 Noembrie, stil vechiu, 1870. Tatăl meu, Nicolae Ionescu, *era pe atunci administrator al moşiei Stoienoaia, proprietatea fraţilor* Constantin *şi* Iosif Darvaris, *iar mama mea era fiica lui* N. Diamandescu, *fost arendaş în Jud. Prahova şi proprietar de vii în Valea Călugărească.*

Studiile primare le-am făcut la şcoala rurală din cătunul Petrecheoaia, comuna Creaţa Leşile şi în parte la şcoala primară din Cărbuneşti; iar clasele a II-a, a III-a şi a IV-a la şcoala primară nr. 1 de Roşii, din Bucureşti, str. Brâncoveanu, fiind întreţinut de fraţii Br. Gh. Darvaris *şi* Iosif Darvaris. *După terminarea şcoalei primare am urmat şcoala comerciată din str. Domniţei, la terminarea căreia m'am dus comptabil la moşia lui* Iosif Darvaris. *Acolo neavând ce face iarna, m'am pregătit de matematici, şi în toamnă am dat concurs pentru anul preparator al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele, iar în anul următor am intrat în această şcoală, primul clasificat, pe care am terminat-o în 1894 cu cea mai mare medie realizată până atunci. Ieşind inginer am funcţionat la Căile Ferate Române, linia Feteşti-Cernavodă. După terminarea acestei linii am intrat la Ser-*

1) Publicăm numai partea care are legătură cu istoricul propriu zis al lui Ion Ionescu şi cu testaţia lăsată *Gazetei Matematice.*

viciul Podurilor CFR, iar în 1900 la serviciul Portului Constanța unde am stat numai câteva luni, după care am trecut la Serviciul Hidraulic, unde am stat până în 1919 ajungând în postul de subdirector al acestui Serviciu. După aceea am fost numit director și apoi director general la Ministerul Lucrărilor Publice, pentru reconstrucția podurilor metalice de pe sosele și căile ferate, care au fost distruse din cauza războiului, de unde am ieșit ca director general.

Din anul 1901 am fost și profesor la Școala Națională de Poduri și Șosele, pentru calculele tehnice și proiecte, suplinind din când în când și pe Anghel Saligny, *în locul căruia am fost numit în 1916 definitiv. Dela acea școală am fost trecut la Școala Politehnică la aceiași catedră, de unde am ieșit la pensie la începutul anului școlar 1938. Intre timp, am mai fost și în diferite rânduri în Consiliul Tehnic Superior al Ministerului de Lucrări Publice, și membru în Consiliul Permanent al Ministerului Educației Naționale, pentru partea industrială.*

In anul 1909 am fost în mai multe rânduri președinte al Secției Matematice din Societatea de Științe, în 1910 am prezidat această societate, care mai avea secțiuni pentru Fizică, Chimie și Științe Naturale, înfine în 1911 am fost președinte al Asociației Române pentru înaintarea și Răspândirea Științelor, în care calitate am prezidat Congresul din Târgoviste. Din 1894 am luat cu mai mulți ingineri inițiativa înființării unei gazete matematice pe care am fondat-o în 1895, fiind de atunci și până la moarte redactor continuu al ei. Din anul 1919 am fost ales membru corespondent al Academiei Române, iar la înființarea Colegiului Inginerilor, am fost numit prin Decret Regal primul decan al acestui colegiu.

In timpul războiului cu Bulgaria, în 1913, am fost însărcinat cu transportarea materialului rulant de cale ferată, peste Dunăre, între Tr.-Măgurele și Samovit, după care am fost înaintat căpitan de rezervă.

In războiul 1916-1918 am fost mobilizat la Marele Cartier General, mai întâi la Biroul Transporturilor și apoi Biroul Operațiilor, fiind însărcinat cu restabilirea comunicațiitor în urma frontului.

In acest timp am fost înaintat maior de rezervă, în anul 1945 mi s'a dat titlul de veteran al războaielor la care am participat.

Ca medalii și decorații, în anul 1895 mi s'a aprobat medalia Jubiliară pentru inaugurarea podului peste Dunăre, la Cerna-Vodă,

fiindcă am fost inginer la acea lucrare, iar în 1912 pentru inaugurarea portului Constanța medalia pentru inaugurarea acelui port. In anul 1913, după terminarea războiului cu Bulgaria, mi s'a dat medalia « Bărbăție și credință » cl. I. După terminarea războiului din 1919 mi s'a dat decorația « Coroana României cu Spade », în gradul de ofițer. Pentru serviciile mele ca inginer și profesor mi s'au acordat o serie de decorații ale Stelei și Coroanei României până la gradul de mare ofițer, al ordinului Coroana României. Pentru meritele mele științifice și serviciile aduse învățăminântului tehnic superior mi s'a acordat medalia « Meritul Cultural » cl. I.

II. Moștenitorii mei.

.....

III. Averea mea.

Averea mea se compune din casete mele din București, str. Răsuri nr. 25, pe care le-am cumpărat dela moștenitorii colonelului Gh. Iordăchescu, *în 1938. Aceste case le las în plină proprietate și fără nicio sarcină Societății* Gazeta Matematică, *cu dorința expresă de a se înființa în ele o sală de lectură științifică, pentru elevii liceelor din București, care vor să urmeze mai departe cursuri științifice, tehnice, sau militare superioare. Această sală va cuprinde intrarea principală, cele două camere de pe strada Răsuri și camera dela colțul acestei străzi și strada* Prof. Ion Ursu. *Actualul dormitor cu dependințele casei, bucătăria, camera de servitori, baia, camera pentru alimente, o cămară sub scară pentru depozitare de unelte grele, o magazie, o pivniță pentru lemne sub curte, o pivniță mare și una mică sub dormitor, pentru conserve de alimente iarna și podul de deasupra dormitorului pentru depozitări și uscat rufele le las unui membru al* Gazetei Matematice, *care să se oblige a îngriji de sala de lectură și care să nu aibă copii, care să umble prin acele săli. Odăile dela etaj și eventual magazia transformată în garaj, cum era sub Col.* Iordăchescu *le las pentru închiriere, pentru ca din venitul lor să se poată scoate venituri cu care să se întâmpine cheltuelile de întreținere, de serviciu, de încălzit și luminat, de impozite și de taxe comunale.*

2. *Din sumele pe care le am depuse la Cassa de Depuneri și Consemnațiuni, sau eventual în alte părți, sau în casă, sume variabile din care iau parte pentru a face față necesităților vieții și boalelor de care sufăr. Ele vor servi pentru îndeplinirea prevederilor din acest testament.*

3. *Efecte publice, care se vor mai găsi în casă şi care servesc pentru nevoile mele actuale.*

4. *Venitul publicaţiilor mele, pentru cărţile tipărite în biblioteca* Gazeta Matematică (*culegeri de probleme, broşura Beton armat, tipărite în biblioteca tehnică* Anghel Saligny, *în biblioteca matematică* Gh. Ţiţeica, *broşura Maxime şi Minime Geometrice*) *se va urma în conformitate cu regulamentele respective ale* Gazetei Matematice.

Pentru cărţile tipărite în edituri se vor urma conform contractelor încheiate de mine cu acele edituri. Din venitul acelor publicaţii se vor da 10% Gazetei Matematice, *pentru cheltuielile ei de tipărire şi* 20% *Sălii de Lectură pentru cumpărare de cărţi, materiale de birou (hârtie, cerneală, etc.) pentru folosinţa exclusivă a elevilor de liceu. Restul de* 70% *se va distribui membrilor familiei mele care vor fi mai scăpătaţi şi cu greutăţi mai mari.*

5. *Mobilierul se va afecta sălii de lectură: Biroul mare şi cel mic al meu, biblioteca mare, cea veche şi cea trapezoidală, maşina de scris, canapeaua şi fotoliile de piele, canapelele şi scaunele de lux, care însă se pot înlocui de membrii familiei mele, înlocuindu-le cu altele obişnuite având rezemători. Pentru celelalte se vor împărţi de membrii familiei împreună cu îmbrăcămintea, care va rămâne dela mine. Se va proceda la fel cu restul inventarului.*

6. Serviciul.

.....

7. Inmormântarea.

Se va face cu cea mai mare simplitate şi cu cheltueli cât mai reduse. In caz de e posibil ţin ca eu să fiu înmormântat în cimitirul Şerban-Vodă, pe locul mamei mele, sau al mătuşei mele Sora, iar dacă din diferite împrejurări aceasta nu va fi posibil atunci ţin ca neapărat să fiu dus la cimitirul Bisericei din Petrecheoaia, lângă care biserică a fost înmormântat tatăl meu, în 1880, şi cu 8 zile înaintea lui fratele meu Dumitru.

Icoana Sf. Nicolae, din camera mea de culcare o las .....

La înmormântare nu se vor ţine discursuri, rămânând să se publice numai necroloage, după moartea mea, cum de altfel am făcut şi eu în cursul vieţii mele.

8. *Legatar universal şi executori testamentari pentru aducerea la îndeplinire: numesc legatar universal pe delegaţii Societăţii* Gazeta Matematică *aleşi conform Statutului şi pe fratele meu* Alex. Ionescu.

Delegații se vor schimba în fiecare an, conform Statutului, iar când fratele meu Alex. Ionescu *nu va mai putea îndeplini această însărcinare, delegația* Gazetei Matematice *va alege în locul lui pe un alt membru al familiei mele, cu o cultură mai înaltă și cu o situație bună. Rog pe delegații actuali și cei viitori să îndeplinească dorința mea exprimată aci, în vederea serviciilor pe care timp de mai bine de o jumătate de veac le-am adus eu* Gazetei Matematice. *Implor pe fratele meu* Alexandru Ionescu *să caute să îndeplinească aceste ultime dorinți ale mele.*

Țin să exprim în aceste ultime momente ale mele tuturor acelora care au fost în contact cu mine, că dacă uneori nu am corespuns dorințelor lor, cauza nu este altceva decât că în viața mea am urmărit numai adevărul și dreptatea, fără a face hatâruri, sau a urmări răzbunări personale.

Făcut azi 12 August una mie nouă sute patruzeci și șase.

(ss) I. Ionescu.

ASUPRA PROBLEMEI 5527

Foștii corespondenți ai *Gazetei Matematice* își reamintesc de stimulentul pe care îl crea specificul din problemele propuse de Profesorul Ion Ionescu, regretatul nostru stâlp. Erau, în general, probleme isvorîte din întrebări pe care spiritul său pătrunzător le formula pornind dela lucruri aparent simple, — pe lângă care superficialitatea trece neturburată, — și care se deosebeau complet de tipul învechit al celor care se găsesc în tratate sau culegeri clasice. Multe din aceste probleme au rămas, și vor rămâne multă vreme încă, nerezolvate. Altele au făcut mândria principală a corespondenților care le-au putut rezolva. Toate însă, țînteau să învingă inerția spiritului și să-l pună în fața unor cu totul noi probleme.

O clasă distinctă din problemele propuse de Ion Ionescu, o formau acele probleme de aritmetică în care principala dificultate nu consta atât din găsirea soluțiilor cât din determinarea numărului lor. O astfel de problemă este problema 5527, în care se cerea numărul fracțiunilor ireductibile care se pot forma cu

termeni de două cifre. In *Gazeta Matematică*, LII, p. 254, d-l P. P. Teodorescu i-a dat o foarte îngrijită soluție.

In cele ce urmează voi da o soluție care, sistematizând numărătoarea, ne va permite o generalizare a problemei. Voi urmări mai departe unele sugestii care se desprind din însăși rezolvarea problemei.

1°. Să ne propunem să găsim numărul perechilor de numere $((m, n)) = 1$, $m \leqslant M$, $n \leqslant N$, unde am notat cu $((x, y, .. z))$ cel mai mare codivizor al numerelor $x, y, .. z$.

Observăm că numărul perechilor (m, n) care au codivizorul a este $E\left(\frac{M}{a}\right) E\left(\frac{N}{a}\right)$, unde $E(x)$ este partea întreagă a lui x.

Notând cu $\mathfrak{I}(M, N)$ numărul căutat, printr'un raționament identic cu cel care ne conduce la formula numerilor prime cu A și care nu depășesc pe B, obținem

$$\mathfrak{I}(M, N) = MN - \Sigma_i E\left(\frac{M}{p_i}\right) E\left(\frac{N}{p_i}\right) + \Sigma_{ij} E\left(\frac{M}{p_i p_j}\right) E\left(\frac{N}{p_i p_j}\right) - \ldots \quad (1)$$

unde $p_1, p_2, \ldots$ reprezintă șirul numerilor prime care nu depășesc pe cel mai mic număr M, N, iar sumele se extind numai asupra combinărilor indicilor.

Notând cu $\mathfrak{I}(A, B; M, N)$ numărul perechilor $((m, n)) = 1$, $A < m \leqslant A + M$, $B < n \leqslant B + N$, vom avea:

$$\mathfrak{I}(A, B; M, N) = \mathfrak{I}(A + M, B + N) - \mathfrak{I}(A + M, B) - \mathfrak{I}(A, B + N) + \mathfrak{I}(A, B) \quad (2)$$

Numărul fracțiunilor ireductibile subunitare $\frac{m}{n}$, astfel ca $A < m \leqslant A + M$, $A < n \leqslant A + M$ va fi, după (2),

$$\frac{1}{2}[\mathfrak{I}(A + M, A + M) - 2\mathfrak{I}(A, A + M) + \mathfrak{I}(A, A)] \quad (3)$$

expresiune care constitue soluția primei generalizări a problemei 5527. In cazul acestei probleme, $A = 9$, $M = 90$ și după (1)

$$\mathfrak{I}(99, 99) = 6007 \ , \ \mathfrak{I}(9, 99) = 579 \ , \ \mathfrak{I}(9, 9) = 55$$

Deci soluţia problemei 5527 este *2452* [1]).

2°. Problema de mai sus ne sugerează o generalizare a indicatorilor în dimensiuni multiple. Astfel notând cu $I_A(M, N)$ numărul grupărilor $((m, n, A)) = 1$, $m \leqslant M$, $n \leqslant N$ obţinem indicatorul bidimensional analog cu $\mathfrak{I}_A(N)$, unde $\mathfrak{I}_A(N)$ este numărul numerilor prime cu A şi care nu depăşesc pe N, adică numărul grupurilor $((n, A))$, $n \leqslant N$.

Se obţine uşor formula

$$\mathfrak{I}_A(M_1, M_2 \ldots M_s) = M_1 M_2 \ldots M_s - \Sigma_i E\left(\frac{M_1}{a_i}\right) E\left(\frac{M_2}{a_i}\right) \ldots E\left(\frac{M_s}{a_i}\right)$$

$$+ \Sigma_{ij} E\left(\frac{M_1}{a_i a_j}\right) E\left(\frac{M_2}{a_i a_j}\right) \ldots E\left(\frac{M_s}{a_i a_j}\right) - \ldots \qquad (4)$$

pentru numărul grupurilor $((m_1, m_2, \ldots m_s, A)) = 1$, $m_i \leqslant M_i$, a_i fiind factorii primi ai lui A inferiori sau egali cu cel mai mic număr M_i.

Dacă $M_1 = M_2 = \ldots = M_s = A$, obţinem *indicatorul s-dimensional*

$$\varphi_s(A) = A^s - \Sigma_i\left(\frac{A}{a_i}\right)^s + \Sigma_{ij}\left(\frac{A}{a_i a_j}\right)^s - \ldots = A^s\left(1 - \frac{1}{a_1^s}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2^s}\right)\ldots \qquad (5)$$

care reprezintă numărul grupurilor $((m_1, m_2, \ldots m_s, A)) = 1$, $m_i \leqslant A$. Pentru $s = 1$ obţinem indicatorul clasic.

La fel, numărul grupurilor $((m_1, m_2, \ldots m_s)) = 1$, $m_i \leqslant M_i$ este dat de formula

$$\mathfrak{I}(M_1, M_2 \ldots M_s) = M_1 M_2 \ldots M_s - \Sigma_i E\left(\frac{M_1}{p_i}\right) E\left(\frac{M_2}{p_i}\right) \ldots E\left(\frac{M_s}{p_i}\right)$$

$$+ \Sigma_{ij} E\left(\frac{M_1}{p_i p_j}\right) E\left(\frac{M_2}{p_i p_j}\right) \ldots E\left(\frac{M_s}{p_i p_j}\right) - \ldots \qquad (6)$$

unde p_i reprezintă numerile prime care nu depăşesc pe cel mai mic M_k. Dacă $s = 1$, $\mathfrak{I}(M) = 1$, căci singurul număr $((m)) = 1$ este unitatea. Relaţia (6) este o generalizare a relaţiei (1).

---

1) In soluţia d-lui P. P. TEODORESCU s'au strecurat câteva erori de calcul care trebuesc corectate după cum urmează: $I_{10 \to 52}(52) = 19$, $I_{10}(55) = 8$, $I_{10 \to 55}(55) = 32$, $I_{10}(75) = 5$, $I_{10 \to 75}(75) = 35$, $I_{10 \to 84}(84) = 22$; totalul primei coloane din tabloul dela pag. 255 este 643, iar al celei de a doua, 1809.

3°. Să notăm cu $\mathfrak{I}_A^{(s)}(M)$ şi cu $I^{(s)}(M)$ expresiunile (4) şi (6) în cazul când $M_1 = M_2 = \ldots = M_s = M$. Se stabileşte imediat formula somatorie pentru $\mathfrak{I}_A^{(s)}(M)$:

$$\sum_1^M{}_i \mathfrak{I}_i^{(s)}(M) = \varphi_{s+1}(M) \tag{7}$$

Alte formule somatorii se stabilesc uşor prin consideraţii potrivite. In planul xoy, punctul P (m, n) va fi numit ireductibil dacă $((m, n)) = 1$. Punctele P (m, n) şi P' (n, m) sunt în acelaşi timp ireductibile sau nu. Punctele ireductibile sunt simetrice deci faţă de prima bisectoare, pe care nu se găseşte decât un singur punct ireductibil, (1, 1). Să considerăm patratul ale cărui vârfuri sunt S (1, 1), T (M, 1), U (M, M), V (I, M). Numărul punctelor ireductibile din patratul STUV este dat de $\mathfrak{I}^{(2)}(M)$. Insă în triunghiul STU avem acelaşi număr de puncte ireductibile ca în triunghiul SUV, singurul punct ireductibil comun fiind S (1, 1). In triunghiul STU avem $\sum_1^M \varphi(i)$ puncte ireductibile. Deci

$$\sum_1^M \varphi(i) = \frac{1}{2}[1 + \mathfrak{I}^{(2)}(M)] \tag{8}$$

Am stabilit astfel pe o cale simplă şi intuitivă o formulă somatoare pentru $\varphi(i)$. Formula (8) a fost găsită pe o cale mai lungă de J. Perott în *Bulletin des Sciences Mathématiques*, V, 1881, p. 37. O demonstraţie prin inducţie completă, datorită lui J. Harmmond, se găseşte în E. Lucas, *Théorie des Nombres*, I, p. 501.

Să notăm cu J (k, M) numărul numerilor prime cu k din şirul $k + 1$, $k + 2$,.. M. Din cauza simetriei punctelor ireductibile avem

$$\sum_1^{M-1}{}_k J(k, M) = \sum_2^M \varphi(k) \tag{9}$$

relaţie stabilită tot prin inducţie de E. Lucas, *op. cit.*, p. 403, Ex. IV.

Pe dreapta $x = k$, în triunghiul STU sunt $\varphi(k)$ puncte ireductibile $P_1(k, 1)$, $P_2(k, k_2), \ldots P_{\varphi k}(k, k_{\varphi k})$ unde $1, k_2, \ldots k_{\varphi k}$ sunt numerele prime şi inferioare lui k. Aceste puncte contribuesc în suma $\sum_2^M k\varphi(k)$ cu ponderea $k\varphi(k)$. Simetricele lor $P_1'(1, k)$,

$P'_2\ (k_2,\ k)\ldots\ P'_{\varphi k}\ (k_{\varphi k},\ k)$ contribuesc în suma $\sum_1^{M-1} k\,J\,(k, M)$ cu ponderea $\frac{1}{2} k\varphi\,(k)$ căci fiecare P'_i contribue cu ponderea k_i, iar $\Sigma_i\, k_i = \frac{1}{2} k\varphi\,(k)$. Deci

$$\sum_1^{M-1} k\,J\,(k, M) = \frac{1}{2} \sum_2^{M} k\varphi\,(k) \qquad (10)$$

o a doua relaţie stabilită de E. Lucas, *loc. cit.*

Relaţiile (9) şi (10) sunt susceptibile de generalizare. Să considerăm punctele P $(m,\ n)$ din patratul STUV pentru care $((m,\ n,\ A)) = 1$, şi să le numim ireductibile în raport cu A.

Să notăm cu $\varphi'_A\ (k)$ numărul punctelor ireductibile în raport cu A de pe dreapta $x = k$, pe porţiunea din triunghiul STU, dar nu pe diagonala SU. Să notăm cu $J'_A\ (k, M)$ numărul punctelor ireductibile în raport cu A de pe dreapta $x = k$, situate pe porţiunea din triunghiul SUV dar nu pe diagonala SU. Punctele ireductibile în raport cu A sunt simetrice faţă de SU, deci

$$\sum_{1k}^{M-1} J'_A\,(k, M) = \sum_{2k}^{M} \varphi'_A\ (k) \qquad (9\text{ bis})$$

Fie $P_1\,(k,\ 1)$, $P_2\ (k,\ k_2),\ldots\ P_{\varphi' k}\ (k,\ k_{\varphi' k})$ punctele ireductibile în raport cu A de pe dreapta $x - k$ cuprinse în triunghiul STU dar nu pe diagonala SU. Ponderea cu care aceste puncte contribuesc la suma $\Sigma k\varphi'_A\ (k)$ este $k\varphi'_A\ (k)$. Ponderea cu care simetricele $P_i\ (k_i,\ k)$ contribuesc la suma $\Sigma\, kJ'_A\ (k,\ M)$ va fi:

$$1 + k_2 + \ldots + k_{\varphi' k} = \frac{1}{2} k\varphi'_A\ (k)$$

In adevăr $k_{\varphi' k} = k - 1$, căci $((k,\ k-1,\ A)) = 1$, iar $k_s + k_{\varphi' k-s} = k$ căci dacă $((k_s, k, A)) = 1$, deducem $((k - k_s, k, A)) = 1$.

Deci

$$\sum_{1k}^{M-1} k\ J'_A\ (k, M) = \frac{1}{2} \sum_{2k}^{M} k\ \varphi'_A\ (k) \qquad (10\text{ bis})$$

4°. Trecând la trei dimensiuni, vom observa că punctele P $(m,\ n,\ l)$, P' $(l,\ m,\ n)$, P'' $(n,\ l,\ m)$ sunt în acelaşi timp ireduc-

tibile sau nu. La fel ca în cazul planului, ţinând seama de dublele numărători, se stabileşte relaţia

$$\mathfrak{J}^{(3)}(M) = 3\sum_{1}^{M}\varphi_2(k) - 3\sum_{1}^{M}\varphi_1(k) + 1 \qquad (11)$$

şi, în general,

$$\mathfrak{J}^{(s-1)}(M) = C_{s-1}^{1}\sum_{1}^{M}\varphi_s(k) - C_{s+2}^{2}\sum_{1}^{M}\varphi_{s-1}(k) + \ldots + (-1)^s \qquad (12)$$

Să însemnăm formal

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{1}^{\infty}{}_k\, \mathfrak{J}^{(k)}(M)\frac{t^k}{k!} \qquad (\mathfrak{J}^{(1)} = 1) \\ G(t) &= \sum_{0}^{\infty}{}_k \sum_{1}^{M}{}_i\, \varphi_k(i)\frac{t^k}{k!} \qquad (\Sigma\varphi_0 = 1) \end{aligned} \qquad (13)$$

Relaţia (12) ne conduce la

$$(1 - e^{-t})\,G(t) = F(t) \quad \therefore \quad G(t) = \frac{F(t)}{1 - e^{-t}} \qquad (14)$$

de unde identificând coeficienţii puterilor lui t, obţinem formule somatorii pentru $\varphi_k(i)$ în funcţie de $\mathfrak{J}^{(k+1)}$, $\mathfrak{J}^{(k)}, \ldots \mathfrak{J}^{(1)}$.

5°. Să determinăm acum limita densităţii punctelor ireductibile P (m, n) adică limita expresiunii $\frac{1}{MN}\mathfrak{J}(M, N)$ când M şi N tind către infinit.

Vom nota

$$E\left(\frac{M}{p_i p_j \ldots}\right) = \frac{M}{p_i p_j \ldots} - m_{ij}\ldots; \quad E\left(\frac{N}{p_i p_j \ldots}\right) = \frac{N}{p_i p_j \ldots} - n_{ij}\ldots$$

$$\alpha_{ij}\ldots = m_{ij}\ldots\left(1 - \frac{n_{ij}\ldots}{2N}\right); \quad \beta_{ij}\ldots = n_{ij}\ldots\left(1 - \frac{m_{ij}\ldots}{2M}\right) \qquad (15)$$

Evident

$$0 \leqslant m_{ij}\ldots < 1, \; 0 \leqslant n_{ij}\ldots < 1, \; 0 \leqslant \alpha_{ij}\ldots < 1, \; 0 \leqslant \beta_{ij}\ldots < 1 \qquad (16)$$

Cu aceste notaţiuni avem:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{J}(M, N)}{MN} &= 1 - \Sigma_i\frac{1}{p_i^2} + \Sigma_{ij}\frac{1}{p_i^2 p_j^2} - \Sigma_{ijk}\frac{1}{p_i^2 p_j^2 p_k^2} + \ldots \\ &+ \frac{1}{M}\left(\Sigma_i\frac{\alpha_i}{p_i} - \Sigma_{ij}\frac{\alpha_{ij}}{p_i p_j} + \ldots\right) + \frac{1}{N}\left(\Sigma_i\frac{\beta_i}{p_i} - \Sigma_{ij}\frac{\beta_{ij}}{p_i p_j} + \ldots\right) \end{aligned} \qquad (17)$$

Se ştie că media ponderată a unor cantităţi este cuprinsă între cea mai mare şi cea mai mică din aceste cantităţi. Deci

$$\begin{aligned}\Sigma_i \frac{\alpha_i}{p_i} - \Sigma_{ij} \frac{\alpha_{ij}}{p_i p_j} + \ldots &= \alpha\left(\Sigma_i \frac{1}{p_i} + \Sigma_{ij} \frac{1}{p_i p_j} + \ldots\right)\\ \Sigma_i \frac{\beta_i}{p_i} - \Sigma_{ij} \frac{\beta_{ij}}{p_i p_j} + \ldots &= \beta\left(\Sigma_i \frac{1}{p_i} + \Sigma_{ij} \frac{1}{p_i p_j} + \ldots\right)\end{aligned} \tag{18}$$

unde $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$. Fie L cel mai mic dintre numerile M şi N. Cum numitorii în rândul al doilea şi al treilea al relaţiei (17) sunt cel mult egali cu L, vom avea

$$\Sigma_i \frac{1}{p_i} + \Sigma_{ij} \frac{1}{p_i p_j} + \ldots = \theta\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{L}\right) \tag{19}$$

unde $0 < \theta < 1$. Putem însă pune

$$\frac{1}{L}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{L}\right) = \varepsilon$$

ε tinzând către zero odată cu $\frac{1}{L}$. Relaţia (17) se poate scrie

$$\frac{\mathfrak{I}(M, N)}{MN} = \theta\varepsilon\left(\alpha \frac{L}{M} + \beta \frac{L}{N}\right) + 1 - \Sigma_i \frac{1}{p_i^2} + \Sigma_{ij} \frac{1}{p_i^2 p_j^2} - \ldots \tag{20}$$

de unde

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{M=\infty \\ N=\infty}} \frac{\mathfrak{I}(M, N)}{MN} &= \lim_{s=\infty}\left(1 - \Sigma \frac{1}{p_i^2} + \Sigma \frac{1}{p_i^2 p_j^2} - \ldots\right)\\ &= \lim_{s=\infty} \Pi\left(1 - \frac{1}{p_s^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{3}{\pi^2}\end{aligned} \tag{21}$$

unde $p_1 < p_2, \ldots p_s, \ldots$ reprezintă şirul numerilor prime, iar $\zeta(x)$ este cunoscuta funcţiune *zeta* a lui RIEMANN

$$\zeta(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^x}$$

care, după cum a arătat EULER, conduce la relaţia

$$\prod_1^\infty \left(1 - \frac{1}{p_s^x}\right) = \frac{1}{\zeta(x)}$$

In cazul când M = N, din (21) deducem

$$\lim_{N=\infty} \frac{\sum_{1}^{N} \varphi(i)}{\sum_{1}^{N} i} = \frac{6}{\pi^2} \tag{22}$$

rezultat obţinut pe o cale similară de J. PEROTT, *loc. cit.*

La fel se obţine

$$\lim_{M_1=\infty, \ldots M_s=\infty} \frac{\Im(M_1, M_2 \ldots M_s)}{M_1 M_2 \ldots M_s} = \frac{1}{\zeta(s)} \tag{23}$$

Prezenţa funcţiunii $\zeta(s)$, atât de strâns legată de teoria numerilor prime, se explică dacă ne gândim că ireductibilitatea grupului $(m_1, m_2 \ldots m_s)$ echivalează cu lipsa oricărui codivizor altul decât unitatea, în timp ce numărul prim, şi el, n'are alţi divizori decât pe el însuşi şi unitatea.

N. GEORGESCU ROEGEN.

O CLASĂ DE FUNCŢIUNI TRANSCENDENTE ÎNTREGI

Se ştie cum se poate construi o funcţiune întreagă care să aibă zeruri date, în număr infinit, având ca punct de limită punctul dela infinit. Un exemplu foarte simplu de astfel de funcţie, şi pe care nu l-am văzut tratat, ne este dat de produsul infinit:

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{x}{\alpha^2}\right) \ldots \left(1 + \frac{x}{\alpha^n}\right) \ldots \tag{1}$$

în cazul $|\alpha| > 1$. Cum se vede $\varphi(x)$ este o funcţiune transcendentă întreagă de genul zero, şi de ea sunt legate anumite definiţii a funcţiei exponenţiale e^x, care cred că merită să fie menţionate.

Se vede uşor întâi că funcţiunea $\varphi(x)$ satisface la ecuaţia:

$$\varphi(\alpha x) = (1 + x)\,\varphi(x) \tag{2}$$

Graţie acestui fapt putem obţine uşor desvoltarea în serie a funcţiunei $\varphi(x)$.

In adevăr, fie:

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{\infty} \gamma_n x^n . \tag{3}$$

Inlocuind în (2) obţinem:

$$(\alpha^n - 1)\,\gamma_n = \gamma_{n-1}$$

de unde deducem imediat:

$$\gamma_n = \frac{\gamma_0}{(\alpha - 1)(\alpha^2 - 1)(\alpha^3 - 1)\ldots(\alpha^n - 1)} \tag{4}$$

γ_0 rămânând arbitrar.

Prin urmare, în afară de un factor arbitrar, avem:

$$\varphi(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\alpha - 1)(\alpha^2 - 1)(\alpha^3 - 1)\ldots(\alpha^n - 1)} . \tag{3'}$$

Scriind că $-\alpha^p$ sunt zerurile funcţiunii $\varphi(x)$, avem identităţile:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\alpha^{np}}{(\alpha - 1)(\alpha^2 - 1)\ldots(\alpha^n - 1)} = 1 \tag{5}$$

pentru $p = 1, 2, 3, \ldots$.

Să înlocuim în (3') pe x prin $(\alpha - 1)\,x$ şi să punem:

$$\varphi[(\alpha - 1)\,x] = l_\alpha(x) \tag{6}$$

obţinem atunci:

$$l_\alpha(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot (\alpha + 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)\ldots(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots + 1)} . \tag{6'}$$

Funcţiunea $l_\alpha(x)$ este, cum se vede uşor tot o transcendentă întreagă pentru $|\alpha| > 1$, dar care rămâne întreagă chiar pentru $\alpha = 1$, căci avem:

$$l_1(x) = e^x . \tag{7}$$

Rezultă atunci, din (1) şi din (7) că avem:

$$e^x = \lim_{\alpha \to 1+0} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha^n} x\right] \tag{8}$$

sau încă punând: $k = \frac{1}{\alpha}$:

$$e^x = \lim_{k \to 1-0} \prod_{n=1}^{\infty} [1 + (k^{n-1} - k^n)\,x]. \tag{8'}$$

Mai putem transforma această expresie dacă punem : $k = \cos^2\theta$, şi deci scrie:

$$\lim_{\theta \to 0} \prod_{n=0}^{\infty} (1 + x \sin^2\theta \cos^{2n}\theta) = e^x .$$

Iată o seamă de expresii care au ca limită pe e^x, şi care nu pot fi găsite prin aplicarea teoremelor ordinare asupra limitelor.

N. Ciorănescu.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1948

După cum am anunţat în numărul precedent, publicăm în cele ce urmează, programul concursului *Gazetei Matematice* şi materiile la care vor fi examinaţi candidaţii:

1. *Probele de examen.* Candidaţii la concurs vor da câte o probă scrisă şi o probă orală la două din materiile prevăzute mai jos pentru fiecare clasă:

Clasa IV-a: Algebra şi Geometria.

Clasa V-a: Algebra şi Geometria.

Clasa VI-a: Algebra, Geometria şi Trigonometria.

Clasa VII-a: Algebra şi Geometria descriptivă.

Clasa VIII-a: Algebra, Geometria analitică şi Mecanica.

2. Nu se admite candidaţilor nicio scuză pentru nepregătirea unora din capitolele trecute în programa analitică a concursului.

3. Programa analitică a materiei pentru concurs este după cum urmează:

La fiecare materie şi pentru fiecare clasă programa completă a clasei respective astfel cum este expusă în manualele anului şcolar curent.

In plus se cere:

Clasa V-a: *Algebra.* Regulile de divizibilitate cu: 2, 4, 8, 3, 9, 5 şi 11. Cel mai mare codivizor şi cel mai mic comultiplu al mai multor numere.

Geometria. Puncte remarcabile ale triunghiului: ortocentru, centrul cercului circumscris, centrele cercurilor înscrise şi exînscrise, centrul de greutate. Cercul celor nouă puncte. *Dreapta lui* SIMSON. Punctul lui MIQUEL. Teorema lui PTOLOMEU. Translaţii. Rotaţii. Simetrii. Omotetii. Figuri direct şi invers egale. Figuri direct şi invers asemenea.

Clasa VI-a: *Algebra.* Transformarea fracţiilor ordinare în fracţii zecimale. Fracţii periodice. Teoreme de divizibilitate. Numere prime. Indicatori. Teorema lui FERMAT, Teorema lui WILSON, Teorema lui EULER.

Geometria. Complemente de geometrie plană. Raport anarmonic. Transversale. Teoremele lui CEVA şi MENELAUS. Patrulater complect. Teorema lui PASCAL. Teorema lui DESARGUES. Pol şi polară la cerc. Ax radical. Fascicol liniar de cercuri. Cercuri octogonale. Proprietăţi generale ale transformării prin inversiune. Teorema lui FEUERBACH. Ortopol.

Clasa VII-a: *Geometria descriptivă.* Metode: Schimbarea planurilor de proiecţie. Rotaţie. Rabatere. Determinarea adevăratei mărimi a elementelor unei figuri geometrice.

Clasa VIII-a: *Algebra.* Numere complexe. Operaţiuni cu aceste numere. Formula lui MOIVRE. Ecuaţiuni binoame. Eliminare. Rezolvarea ecuaţiilor de gradul trei şi patru.

Geometria Analitică. Diametri conjugaţi. Teoremele lui APPOLONIUS. Teoremele asupra conicelor demonstrate geometric.

Mecanica: A) *Statică.* Echilibrul corpurilor supuse la legături: simplă rezemare, articulaţie, prindere cu fire. Frecarea de alunecare. Echilibrul corpurilor ţinând seama de frecare. Maşini simple: pârghii, plan înclinat, balanţe şi cântare, scripeţi, şurub.

B) *Cinematica.* Mişcarea oscilatorie armonică. Mişcare relativă şi absolută. Compunerea vitezelor.

C) *Dinamica.* Principiile mecanicei. Energia cinetică. Relaţia dintre energia cinetică şi lucru mecanic. Energie potenţială. Principiul conservării energiei. Unităţi de măsură: sistemul tehnic, sistemul *C.G.S.* Omogeneitate.

DELEGAŢIA GAZETEI MATEMATICE.

PREMIUL „INGINER H. CAPRIEL“

Reamintim corespondenților noștri că în anul 1949 *Gazeta Matematică* va acorda premiul Ing. H. Capriel pentru cea mai bună lucrare care se va trimite Delegației Societății până la 1 Mai 1949, asupra subiectului publicat la pag. 345, vol. L al acestei reviste.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII GAZETA MATEMATICĂ.

NOTE MATEMATICE

3. *Aritmetici diverse.* Regretatul Profesor Inginer I. IONESCU a dat în note matematice din volumele XXVII, XXVIII, XXIX, XXX și XXXI al *Gazetei Matematice* 110 nume de aritmetici diverse. In acest număr comemorativ al revistei noastre adaug încă un nume de aritmetică:

Parlamentară. A se vedea « *Aghiuță* ». Nr. 20 din 26 Martie 1864 B. P. HASDEU scrie despre *aritmetica și chimia parlamentară.*

GEORGE ENESCU.

4. *Patrate magice cu produse.* D-l A. MOESSNER a dat, în *G. M.*, vol. XLVIII, pag. 164, un exemplu de patrat magic în care produsele numerilor de pe aceeași linie sau de pe aceeași coloană sunt egale între ele. Iată un exemplu de patrat magic în care produsele elementelor de pe aceeași linie, de pe aceeași coloană sau de pe una oarecare din diagonale sunt egale între ele și egale cu $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8$.

$a_1\ a_2$	$a_3\ a_4$	$a_5\ a_6$	$a_7\ a_8$
$a_5\ a_7$	$a_6\ a_8$	$a_1\ a_3$	$a_2\ a_4$
$a_3\ a_8$	$a_2\ a_5$	$a_4\ a_7$	$a_1\ a_6$
$a_4\ a_6$	$a_1\ a_7$	$a_2\ a_8$	$a_3\ a_5$

(1)

Dacă în patratul magic (1) facem: $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$; $a_4 = 5$; $a_5 = 7$; $a_6 = 1$; $a_7 = 4$ și $a_8 = 6$, obținem:

2	15	7	24
28	6	3	10
18	14	20	1
5	4	21	12

(2)

adică un patrat magic în care produsul numerilor de pe o aceeași linie, coloană sau diagonală este egal cu 71. Cred, prin simplă intuiție, că este patratul magic cu elemente diferite în care produsul elementelor de pe aceeași linie, coloană sau diagonală este egal cu cel mai mic număr.

Problema patratelor magice cu produse nu este de altfel esențial diferită de problema patratelor magice cu sume, deoarece dintr'un patrat magic de sume $|S_{ij}|_n$ putem trece prin transformarea $P_{ij} = a^{S_{ij}}$ la patratul magic de produse $|P_{ij}|_n$, după cum dela un patrat magic cu produse $|P_{ij}|_n$ prin transformarea dată de $S_{ij} = \log P_{ij}$ se obține patratul magic cu sume $|S_{ij}|_n$.

Notația $|S_{ij}|_n$ arată că este vorba de un patrat magic în care elementele de pe aceeași linie sau coloană sunt n, iar elementul de pe coloană i și de pe linia j este S_{ij}.

Iată și un exemplu de patrat magic în aceleași timp și cu sume și cu produse:

a	c	d	b
d	b	a	c
b	d	c	a
c	a	b	d

(3)

Patratul magic (1) fiind obținut prin înmulțirea elementelor corespunzătoare ale unui patrat magic analog cu (3) și cel ce se obține din (3) schimbând coloana 1-a cu a 4-a și a 2-a cu a 3-a.

De altfel chiar patratul magic (3) nu este decât produsul elementelor corespunzătoare a 4 patrate magice (deduse unul din altul printr'o rotire de 90°) ce se obțin din (3) înlocuind 3 din cele 4 litere: a, b, c și d cu 1.

I. B. Florescu.

5. *Asupra problemei 3874.* Vom da o altă soluție problemei 3874 rezolvat în G. M., L, 470. Vom demonstra întâi propoziția: *în paralelogramul* ABCD *de centru* r *fie* Δ o *dreaptă dusă prin* A. *Paralelele din* r *la* AD, AB *taie pe* Δ *în* q', s'. *Paralela din* s' *la* AD *taie pe* BD *în* n. *Paralela din* q' *la* AB *taie paralela din* r *la* Δ *în* m. *Paralelele din* n *la* AB *și din* m la AD *se taie pe* AC.

Fie, pentru demonstrație, m', n' intersecțiile cu AC — presupuse distincte —, ale paralelelor din m la AD și din n la AB, apoi $u = (rs', \text{BC})$, $v = (mq', \text{AD})$. In paralelogramul $mrs'q'$ diagonala rq' este egal depărtată de dreptele paralele AD, BC deci $\overline{s'u} = \overline{mv}$. Avem atunci

$$\frac{\overline{m'\text{A}}}{\overline{\text{A}r}} = \frac{\overline{mv}}{\overline{vq'}} = \frac{\overline{s'u}}{\overline{ru}} = \frac{\overline{\text{B}n}}{\overline{\text{B}r}} = \frac{\overline{n\text{A}}}{\overline{\text{A}r}}$$

deci m' coincide cu n.

Dacă facem acuma o proiecție a figurii pe un plan oarecare, obținem problema 3874.

De altfel, pe aceeași cale, putem construi o soluție directă a problemei 3874. Păstrând notațiile, observăm în prealabil că ms', nv *se taie pe* rs [1]).

Notăm încă intersecțiile $t = (sq, \text{AC})$ și $w = (\text{BD}, sq)$, iar cu $\omega\,(\alpha\beta\gamma\delta)$ raportul anarmonic al fascicolului de vârf ω și cu razele trecând prin α, β, γ, δ pe o dreaptă. Avem atunci

$$s\,(\text{A}rm't) = s\,(vq'mq) = x\,(vq'mq) = x\,(urs'q) = s(urs'q)$$
$$= s\,(\text{B}rnw) = q\,(\text{B}rnw) = q\,(\text{A}rn't) = s\,(\text{A}rn't).$$

Deci m' coincide cu n'.

N. M.

1) In adevăr ms' este polara lui s în unghiul (Δ, rq) deci ms' taie pe rs în conjugatul x al lui s în raport cu rq'. Fie apoi $u' = (rq, \text{AD})$, $v' = (qq', \text{BC})$; uv, $u'v'$ se taie în y pe polara lui q în unghiul (AD, BC) și polara lui y în același unghiu este sq deci y este conjugatul lui s față de rq', adică x coincide cu y.

BIBLIOGRAFIE

Analele Româno-Sovietice. Caietul 6. Iulie-August 1947.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVII. Nr. 7. Septembrie 1947. D. POMPEIU: Un exerciţiu de algebră şi o problemă de analiză. GH. TH. GHEORGHIU: Articol de metodologie. V. ALACI: Câte va probleme de rezolvirea triunghiurilor în Trigonometria patratică. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

B. BARBĂLAT. Sur les espèces topologiques les plus généraux. (Extras din *Bulletin Mathématique de la Société roumaine de sciences.* Tome 45. 1945).

B. BARBĂLAT. Sur les fonctions monotones. (Extras din *Bulletin Mathématique de la Société roumaine de sciences.* Tome 47. 1945—46).

B. BARBĂLAT. Sur un groupe d'axiomes des espaces abstraits. (Extras din *Bulletin Mathématique dela Société roumaine de sciences*).

TIB. IONESCU, GH. D. SIMIONESCU şi C. IONESCU-BUJOR. Aritmetica pentru clasa I-a a gimnaziului unic. Editura „Remus Cioflec", 1947.

TIB. IONESCU, GH. D. SIMIONESCU şi C. IONESCU-BUJOR. Aritmetica pentru clasa III-a a gimnaziului unic. Editura „Remus Cioflec", 1947.

CERERI

344. In legătură cu rezolvarea problemei 3316 propusă de regretatul ION IONESCU şi rezolvată la pag. 144 din Vol. LIII, cerem celor care au cunoştinţă de următoarea problemă: « *Să se determine ecuaţia curbei plane, de lungime dată, având extremităţile în două puncte date, astfel încât volumul solidului produs prin rotirea acestei curbe în jurul unei drepte din planul său să fie maxim* » să ne comunice de cine a fost studiată precum şi rezultatele obţinute.

ALEXANDRU STOENESCU.

DIVERSE

Sporirea bibliotecii „Gazeta Matematică" [1]

A. MANNHEIM. Cours de géometrie descriptive comprenant les éléments de la géometrie cinématique. Paris. Gauthier Villars, 1880.

Donat de d-l G-l GH. I. LITEANU.

1) A se vedea apelul făcut de I. IONESCU în articolul *Biblioteca Gazeta Matematică* publicat la pag. 20, Vol. XL.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2302. *Se ştie că un corp greu pus pe un plan orizontal poate fi în echilibru stabil, instalabil sau indiferent. Există corpuri care să nu se poată aşeza decât numai în una din aceste stări de echilibru? Sunt corpuri care să poată fi puse în două stări de echilibru? Putem găsi un corp care să poată sta în cîteşitrei stări de echilibru?*

I. IONESCU.

La cele trei întrebări puse în enunţ răspunsul este acelaşi: *există asemenea corpuri.*

Astfel, *sfera* aşezată pe un plan orizontal nu are decât *o singură* stare de echilibru şi anume *echilibru indiferent.*

Corpuri, care aşezate pe un plan orizontal au *două stări de echilibru* sunt multe.

Spre exemplu, *cubul, paralelipipedul* şi *prizmele* pot fi aşezate în echilibru *stabil* (aşezate pe feţe) sau în echilibru *instalabil* (aşezate pe muchii sau în vârfuri astfel ca centrul de greutate respectiv să se găsească pe verticala trecând prin muchia sau vârful considerat).

Pentru ultima întrebare citäm ca exemplu *conul circular drept* cu *3 poziţii de echilibru:* poziţie de echilibru *stabil* când este aşezat pe bază, poziţia de echilibru *indiferent* când este aşezat pe o generatoare şi poziţie de echilibru *instalabil* când este aşezat pe vârf.

Asemenea exemple se pot da în număr mare atât printre corpurile cu forme regulate cât şi printre acelea cu forme neregulate.

ALEXANDRU STOENESCU.

PROBLEMA 2338. *Care este forma generală a ecuaţiilor de gradul II cu două variabile* x, y *care pot reprezenta elipse, iperbole şi drepte, dar nicidecum parabole?*

I. IONESCU.

Fie ecuaţia generală de gradul al doilea

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

După cum se ştie din teoria generală a conicelor, coordonatele centrului sunt date de sistemului de ecuaţii

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} f'_x &= Ax + By + D = 0 \\ \tfrac{1}{2} f'_y &= Bx + Cy + E = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

După cerinţele enunţului acest sistem trebue să fie 1) compatibil şi determinat sau 2) compatibil şi nedeterminat, iar cazul de incompatibilitate trebueşte eliminat.

In primul caz avem $\delta = AC - B^2 \neq 0$ când ecuţia $f(x, y) = 0$ reprezintă o conică de gen elipsă sau iperbolă.

In cazul când avem $\delta = 0$, sistemul (1) este necompatibil, caz care trebue eliminat. Vom face acest lucru scriind că sistemul este nedeterminat, adică ecuaţiile lui au coeficienţii proporţionali

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}.$$

De aci putem scoate unul din coeficienţi în funcţiune de ceilalţi.

Luăm $D = \frac{B.E}{C}$ şi atunci ecuaţia generală se scrie

$$Ax^2 + 2B.xy + Cy^2 + 2\frac{B.E}{C}x + 2Ey + F = 0. \qquad (2)$$

Această formă răspunde problemei. Intr'adevăr invarianţii care determină natura acestor conice (2), sunt acum

$$\delta = AC - B^2 \quad , \quad \Delta = (AC - B^2)\left(F - \frac{E^2}{C}\right).$$

Ei ne arată că sau avem $\delta \neq 0$ şi atunci ecuaţia (2) reprezintă elipse sau hiperbole, sau dacă avem $\delta = 0$, atunci avem neapărat şi $\Delta = 0$, iar ecuaţia (2) reprezintă drepte. In niciun caz nu putem avea deodată $\delta = 0$ şi $\Delta \neq 0$.

Ecuaţia (2) este deci forma generală care reprezintă elipse, hiperbole sau drepte dar nicidecum parabole.

Observare. In exprimarea coeficientului D am presupus pe C diferit de zero, cazul general. Dacă coeficienţii A sau C ar fi zero atunci având $\delta = -B^2 \neq 0$ ecuaţia particulară de gradul al doilea reprezintă numai conice cu centru, iar nicidecum parabole.

IOAN ST. TEODORESCU — Ploeşti.

PROBLEMA 3134 [1]). *Să se rezolve în numere întregi sistemul*

$$ax + b = by + c = cz + d = du + a.$$

I. IONESCU.

Să considerăm sistemul mai general

$$N = a_1x_1 + b_1 = a_2x_2 + b_2 = \ldots = a_n x_n + b_n \qquad (1)$$

care se reduce la

$$N \equiv b_i \pmod{a_i} \qquad i = 1, \ldots n. \qquad (2)$$

Se vede imediat că orice divizor comun a lui a_i, a_j trebue să dividă şi pe $b_i - b_j$, deci

$$b_i \equiv b_j \bmod \{a_i, a_j\} \qquad (3)$$

unde $\{a_i, a_j\}$ înseamnă cel mai mare comun divizor al lui a_i şi a_j.

Condiţia (3) este şi necesară şi suficientă pentru ca ecuaţia

$$a_i x_i + b_i = a_j x_j + b_j \qquad (4)$$

să admită soluţiuni în numere întregi (M. KRAÏTCHIK, *Théorie des nombres*, p. 24). Condiţiunea (3) este deci necesară şi suficientă pentru ca sistemul (1) sau, ceea ce este totuna, sistemul (2) să admită soluţiuni în numere întregi.

Fie $a_i = \alpha_{1,i}\, \alpha_{2,i} \ldots \alpha_{k,i}$, unde $\alpha_{k,i}$ sunt numere prime diferite între ele sau puteri ale unor astfel de numere. Congruenţa (2) se descompune în

$$N \equiv b_i \pmod{\alpha_{1,i}}, \ldots N \equiv b_i \pmod{\alpha_{k,i}} \qquad (5)$$

care se rezolvă după metode clasice. Vom elimina din sistemul (5) acele congruenţe care se mai găsesc în sistem sub forme echivalente. (Condiţia (3) garantează că nu vom da peste congruenţe incompatibile). După această operaţiune sistemul (5) se reduce la un sistem de forma

$$N \equiv c_i \pmod{p_i} \qquad i = 1, 2, \ldots m \qquad (6)$$

unde p_i sunt numere prime sau puteri de numere prime.

---

1) A se vedea soluţia acestei probleme în G. M., XLII, p. 254 şi nota dela p. 300, acelaşi volum.

A se vedea problema 3372 (Vol. XXXIII, p. 345) precum şi articolele G-l GH. BUICLIU (Vol. XXXIV, p. 161) şi Prof. GH. CONSTANTINESCU (Vol. XXXVI, pag. 281) care rezolvă o problemă analoagă cu problema 3134.

Să considerăm soluţia M a sistemului

$$M \equiv 1 \pmod{p_i} \quad M = 0 \quad (\text{Mod } p_1 p_2 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_m) \tag{7}$$

Soluţia sistemului (6) este

$$N \equiv \Sigma c_i M_i \quad (\text{mod. } p_1 p_2 \ldots p_m) \tag{8}$$

(KRAÏTCHIK, *loc. cit.*, p. 32), iar de aci

$$x_k = \frac{N - b_k}{a_k} \tag{9}$$

In cazul sistemului propus, presupunând că $\{a, b, c, d\} = 1$ condiţiile de compatibilitate sunt:

$$\{a, b\} = \{b, c\} = \{c, d\} = \{d, a\} = 1 \tag{10}$$

$b - d \equiv 0 \bmod \{a, c\}$; $a - c \equiv 0 \bmod \{b, d\}$.

Caz numeric. $a = 21$, $b = 34$, $c = 49$, $d = 20$. Se vede imediat că (10) sunt satisfăcute. Sistemul (2) se descompune în: $N \equiv 34 \pmod 3$; $N \equiv 34 \pmod 7$; $N \equiv 49 \pmod 2$; $N \equiv 49 \pmod{17}$; $N \equiv 20 \pmod{49}$; $N \equiv 21 \pmod 4$; $N \equiv 21 \pmod 5$

iar (6) devine

$$N \equiv 1 \pmod 3; \quad N \equiv 15 \pmod{17}; \quad N \equiv 20 \pmod{49}$$

$$N \equiv 1 \pmod 4; \quad N \equiv 1 \pmod 5;$$

$$\therefore \quad N = 49980t + 45541.$$

Deci:

$$x = 2380t + 2167 \; ; \; y = 1470t + 1338$$

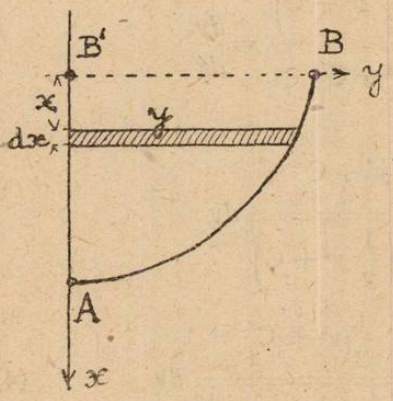
$$z = 1020t + 929 \; ; \; u = 2499t + 1276.$$

I. B. FLORESCU.

PROBLEMA 3316. *Se dă o dreaptă, un punct* A *pe dânsa şi un punct* B *afară din dreaptă. In* A *şi* B *se prinde un fir de lungime dată. Fie* B′ *proiecţia lui* B *pe dreapta dată. După ce curbă trebue aranjat firul între* A *şi* B, *aşa ca momentul static al suprafeţii* ABB′ *în raport cu* AB′ *să fie cel mai mare posibil?*

I. IONESCU.

Să alegem drept axe de coordonate $B'Ax$ și $B'By$. Ducând la distanțele x și $x+dx$ paralele la BB' se obține suprafața elementară haşurată, de mărime ydx, al cărei moment static în raport cu AB' este $\frac{1}{2}y^2\,dx$. Notând cu M momentul static al suprafeții ABB' avem:



$$M = \int \frac{1}{2} y^2\,dx. \qquad (1)$$

Fie l lungimea firului. Avem:

$$l = \int ds = \int \sqrt{1+y'^2}\,dx. \qquad (2)$$

Problema revine la determinarea unei *funcțiuni* $y = f(x)$ care să facă *maximă* expresia (1) și să *verifice* relația (2); pentru rezolvare vom aplica *formula lui* EULER din *calculul variațiilor*.

Să notăm:

$$F = \frac{1}{2}y^2;\ G = \sqrt{1+y'^2};\ \varphi = F - KG = \frac{1}{2}y^2 - K\sqrt{1+y'^2}$$

K fiind o constantă. Formula lui EULER este:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) = 0.$$

Dar:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = y;\ \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = -\frac{Ky'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Deci:

$$y = -\frac{d}{dx}\left(\frac{Ky'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)$$

Dar:

$$dx = \frac{dy}{y'}\ ;\quad y\,dy = -y'\,d\left(\frac{Ky'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)$$

Integrând avem:

$$\frac{1}{2}y^2 + C = K(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{K}{\sqrt{1+y'^2}} \qquad (3)$$

în care C este o constantă de integrare.

Scoţând din (3) valoarea lui y' obţinem:

$$y' = \pm \frac{\sqrt{K^2 - \left(\frac{1}{2}y^2 + C\right)^2}}{\frac{1}{2}y^2 + C} = \frac{dy}{dx}$$

Separând variabilile:

$$dx = \pm \frac{\frac{1}{2}y^2 + C}{\sqrt{K^2 - \left(\frac{1}{2}y^2 + C\right)^2}} dy$$

$$\therefore \quad x + C_1 = \pm \int \frac{\frac{1}{2}y^2 + C}{\sqrt{K^2 - \left(\frac{1}{2}y^2 + C\right)^2}} dy \qquad (4)$$

în care C_1 este o nouă constantă de integrare.

Ecuaţia curbei căutate este dată de relaţia (4); integrala din această ecuaţie este însă de formă *eliptică* şi nu poate fi rezolvată cu ajutorul funcţiunilor obişnuite.

Cele trei constante ce apar în cursul rezolvării problemei K, C şi C_1 se determină prin condiţiile ca firul să treacă prin punctele date A $(a, 0)$; B $(0, b)$ şi să aibe lungimea l (ecuaţia 2).

Această ecuaţie (2) se poate pune şi sub forma:

$$l = \int \frac{K dx}{\frac{1}{2}y^2 + C}$$

De unde se scoate valoarea lui K.

La o soluţie absolut analoagă se ajunge dacă împărţim suprafeţe ABB' în dreptunghiuri elementare paralele cu B'Ax; în acest caz:

$$M = \int xy\,dy$$

Aplicând formula lui EULER se ajunge deasemenea la ecuaţia (4).

Problema propusă se poate uşor transforma într'o foarte interesantă problemă de *geometrie*.

In adevăr, notând cu S mărimea suprafeţii ABB' şi cu y_G, ordonata centrului de greutate al suprafeţii, avem (teorema momentelor statice) :

$$M = Sy_G$$

Inmulţind în ambii termeni cu 2π şi ţinând seama de teorema lui GULDIN.

$$2\pi M = 2\pi y_G \cdot S = V$$

în care V reprezintă *volumul* solidului de revoluţie obţinut prin *rotirea suprafeţii* ABB' *în jurul axei* A'B'. Deci :

$$M = \frac{V}{2\pi}$$

şi prin urmare maximul lui M *coincide* cu cel al lui V.

Rezultă deci că problema propusă este echivalentă cu următoarea problemă de geometrie :

„Să se determine ecuaţia unei curbe plane, de lungime dată, trecând prin două puncte date A *şi* B *astfel încât volumul solidului obţinut prin rotirea curbei în jurul unei drepte trecând prin* A *şi situate în planul curbei, să fie maximă"*.

Având în vedere simplitatea acestui enunţ, cred că problema a fost studiată. In manualele avute la îndemână nu am găsit însă acest studiu ; deaceea în cererea Nr. 344, am rugat pe cei care ştiu ceva despre această problemă să ne comunice cercetările făcute şi rezultatele obţinute.

ALEXANDRU STOENESCU.

PROBLEMA 3405. *Se dau dreptele* OA *şi* OB *şi se duc arcele de cerc* AC *şi* BC *tangente în* C, *respectiv la cele două drepte în punctele* A *şi* B.

Problema admite o infinitate de soluţii ; care este aceea care face minimă diferenţa patratelor razelor celor două cercuri.

I. IONESCU.

In punctele A şi B se pot duce cercuri tangente la cele două drepte si tangente între ele, în următoarele poziţii.

1. Ambele cercuri sunt interioare unghiului AOB.
2. Un cerc este interior, altul exterior unghiului AOB.
3. Ambele cercuri sunt exterioare.

Vom examina fiecare din aceste cazuri, notând în prealabil:

$$OA = a \ , \ OB = b \ , \ AB = 2d.$$

1°. In prima situaţie notând cu P şi Q centrele celor două cercuri, cu x şi y respectiv razele lor şi punând

$$\sphericalangle AOP = u \ , \ \sphericalangle BOQ = v \ , \ \sphericalangle AOB = \theta$$

avem relaţiile (Fig. 1).

$$\sin u = \frac{x}{OP} \ , \ \cos v = \frac{a}{OP} \ , \ OP^2 = a^2 + x^2 \qquad (1$$

$$\sin v = \frac{y}{OQ} \ , \ \cos v = \frac{b}{OQ} \ , \ OQ^2 = b^2 + y^2$$

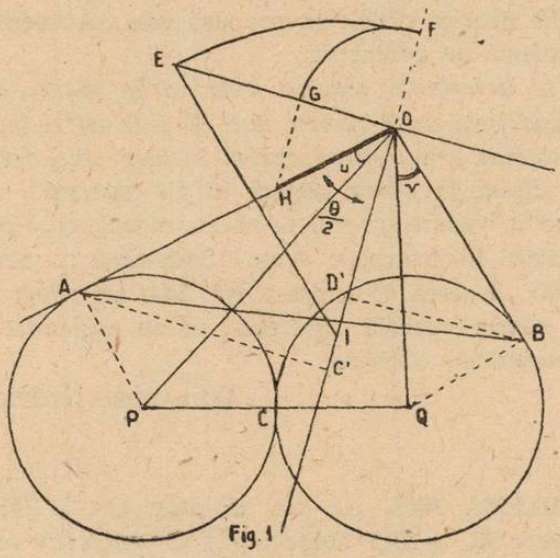


Fig. 1

Se observă că în această poziţie, centrele P şi Q fiind interioare unghiului AOB, avem $\sphericalangle POQ = \theta - (u + v)$ deci putem scrie

$$\cos POQ = \cos\theta \ . \ \cos(u + v) + \sin\theta \ . \ \sin(u + v).$$

Desvoltăm pe $\sin(u+v)$ și $\cos(u+v)$ și ținem seama de relațiile (1). Avem

$$\overline{OP}\,.\,\overline{OQ}\,.\cos POQ = (ab - xy)\cos\theta + (bx + ay)\,.\,\sin\theta. \quad (2)$$

Ținând seama de relațiile (1) și de

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = AB^2 = 4d^2$$

avem succesiv

$$2xy = a^2 + b^2 - 2(ab - xy)\cos\theta - 2(bx + ay)\sin\theta$$

$$2xy(1 - \cos\theta) = 4d^2 - 2(bx + ay)\sin\theta.$$

$$xy + (bx + ay)\,.\,\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \frac{d^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = 0 \quad (3)$$

Această ecuațiune cu necunoscutele x și y ne arată că problema are o infinitate de soluții, printre acestea trebue căutate acelea pentru care diferența $x^2 - y^2$ luată în valoare absolută, este minimă.

Aceasta va avea loc când razele x și y sunt egale.

Facem în (3) $y = x$ și găsim

$$x^2 + x(a + b)\,.\,\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \frac{d^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = 0$$

ecuație care are totdeauna soluții reale. Rădăcina pozitivă este aceea care corespunde problemei propuse

$$y = x = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + d^2} - \frac{a+b}{2}\,.\,\cos\frac{\theta}{2}\right) \quad (4)$$

minimul diferenței $x^2 - y^2$ fiind zero.

Construcție geometrică. Ducem bisectoarea OI a unghiului AOB, pe care proiectăm punctele A și B în C' și D'. Luăm mijlocul I al segmentului C'D' și avem (Fig. 1)

$$OI = \frac{OC' + OD'}{2} = \frac{a+b}{2}\,.\,\cos\frac{\theta}{2}\,.$$

Pe perpendiculara în O pe bisectoarea OI luăm $OE = \frac{AB}{2} = d$, astfel că în triunghiul dreptunghic OEI, avem

$$EI^2 = OI^2 + OE^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 . \cos^2 \frac{\theta}{2} + d^2.$$

Luăm apoi segmentul $OF = EI - OI$ și purtându-l în OG se formează triunghiul dreptunghic OGH unde OH este egal cu segmentul x căutat, căci avem

$$OH = \frac{OG}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{EI - OI}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

2°. Considerăm cazul când un cerc este interior, altul tangent în B este exterior unghiului AOB.

Avem atunci

$$\sphericalangle AOB + v = \sphericalangle POQ + u \quad \therefore \quad POQ = \theta - (u - v),$$

avem deci ținând seama de relațiile (1)

$$\cos POQ = \cos\theta \, . \cos(u - v) + \sin\theta \, . \sin(u - v).$$

$$\overline{OP} \, . \, \overline{OQ} \cos POQ = (ab + xy)\cos\theta + (bx - ay) \, . \sin\theta.$$

Apoi în triunghiul POQ avem relațiunea

$$(x + y)^2 = OP^2 + OQ^2 - 2\,\overline{OP} \, . \, \overline{OQ} \, . \cos POQ$$

unde ținând seama de relațiile (1) și cele precedente și făcând calcule analoage cu cele făcute mai înainte se găsește succesiv:

$$2xy(1 + \cos\theta) = 4d^2 - 2(bx - ay)\sin\theta.$$

$$xy + (bx - ay)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{d^2}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = 0 \qquad (5)$$

Soluțiile problemei fiind cantitățile pozitive x și y care satisfac această ecuație, vom avea o infinitate de soluții. Dintre acestea alegând pe acelea care fac expresiunea $x^2 - y^2$, luată în valoarea absolută, ca să fie minimă, vom lua $x = y$. In acest caz particular ecuația (5) devine

$$x^2 + x(b - a)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{d^2}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} =$$

ecuaţie care are totdeauna rădăcini reale, din care rădăcina pozitivă este

$$x = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\left(\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \cdot \sin^2\frac{\theta}{2} + d^2} - \frac{b-a}{2} \cdot \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

Construcţie geometrică. Pentru construcţia acestei formule ducem bisectoarea unghiului AOB, apoi perpendicularele pe ea

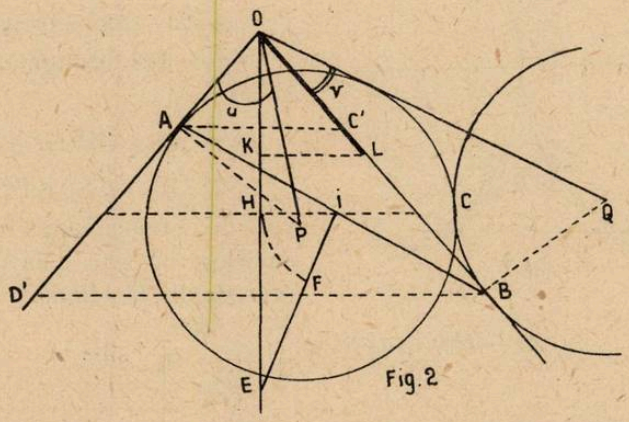


Fig. 2

AC' şi BD'. Ducem paralela la bazele AC' şi BD' şi echidistantă de aceste baze, paralelă care taie bisectoarea în H şi pe AB în mijlocul ei I. Avem (Fig. 2)

$$HI = \frac{b-a}{2} \cdot \sin\frac{\theta}{2}.$$

Pe bisectoare luăm $HE = \frac{AB}{2} = d$ şi din triunghiul dreptunghic HIE avem

$$EI^2 = HI^2 + HE^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + d^2$$

In sfârşit luăm diferenţa $EF = EI - HI$ şi construim triunghiul dreptunghic OKL având $OK = EF$.

Ipotenusa OL este segmentul x, deoarece avem

$$OL = \frac{OK}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{EI - HI}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

3°. Cercuri exterioare unghiului AOB. In această situație avem

$$\sphericalangle POQ + AOB + u + v = \pi$$

$$\therefore \quad \sphericalangle POQ = 2\pi - \theta - u - v$$

și deci deducem

$$\cos POQ = \cos(\theta + u + v) = \cos\theta \cdot \cos(u + v) - \sin\theta \cdot \sin(u + v)$$

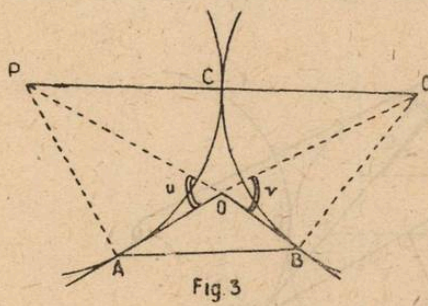


Fig. 3

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} \cdot \cos POQ = (ab - xy) \cdot \cos\theta - (bx + ay)\sin\theta.$$

Apoi din triunghiul POQ avem

$$(x + y)^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OQ} \cos POQ$$

care ne conduce, după înlocuiri analoage cu cele dela cazurile precedente, la relația

$$xy - (bx + ay)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \frac{d^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = 0.$$

Pentru cazul problemei trebue să luăm cercuri de raze egale, când diferența $x^2 - y^2$ este egală cu zero. Punem $y = x$ și avem ecuația

$$x^2 - x(a + b)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \frac{d^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = 0$$

care are rădăcini reale, aceea pozitivă fiind soluția căutată

$$x = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \cos^2\frac{\theta}{2} + d^2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

și care se construește ca la soluția 1°.

In rezumat problema are totdeauna soluții, anume trei perechi de cercuri egale, tangente în A și B dreptelor OA OB și tangente între ele.

IOAN ST. TEODORESCU — Ploești.

PROBLEMA 6021. *Un număr întreg se împarte exact prin numerele dela 1 la 10 inclusiv acestea. Pentru care număr suma câturilor este cea mai mică?*

Aceeaşi chestiune pentru suma produselor acelor câturi luate câte două?

I. IONESCU.

Fie N numărul căutat şi S_i suma produselor luate câte $i \leqslant 10$, a câturilor împărţirei lui exacte prin fiecare din numerele 1, 2,..., 10.

N fiind divizibil prin fiecare din cele 10 numere este un multiplu al celui m. m. c. al lor. Deci

$$N = k \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2570 \cdot k$$

$$\therefore \quad S_i = 2570^i \cdot k^i \left[\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots i} + \frac{1}{1 \cdot 3 \ldots (i+1)} + \ldots \frac{1}{(10-i+1)\,(10-i+2) \ldots 10} \right].$$

Se vede că pentru un i dat, S_i este minimă când $k = 1$, deci pentru

$$N = 2570$$

suma câturilor împărţirei lui N prin 1, 2,..., 10 luate câte 1, câte 2,... câte 10, este minimă.

In general dacă numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se împart exact prin un număr N, suma câturilor acestor împărţiri luate câte 1, câte 2,... sau câte n, este minimă atunci când N este c. m. m. c. al celor n numere date.

Au dat soluţii bune pentru cazul particular al primei părţi a problemei d-nii: P. P. TEODORESCU (Liceul Matei Basarab, Bucureşti); C. I. ZISSU (Liceul militar, Craiova); C. CORDUNEANU, I. T. MUNTEANU (Colegiul N. Filipescu); M. AL. LEON (Politehnica Bucureşti).

PROBLEMA 6106. *Latura unui pentagon regulat înscris este comensurabilă cu latura decagonului regulat înscris sau cu a pentagonului regulat stelat?*

I. IONESCU.

Soluție dată de d-l P. P. TEODORESCU (Liceul Matei Basarab, București).

R fiind raza cercului circumscris poligonului regulat, se știe că

$$L_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \quad , \quad L_5' = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \quad , \quad L_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

Pentru rapoartele cerute, avem

$$\frac{L_5}{L_5'} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{6+4}{2}} - \sqrt{\frac{6-4}{2}}\right] = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \qquad (1)$$

$$\frac{L_5}{L_{10}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}}. \qquad (2)$$

Ambele rapoarte (1) și (2) sunt *incomensurabile.*

Au rezolvat problema, punând rapoartele (1) și (2), sub alte forme d-nii: V. D. PĂLĂCEANU, ILIE N. CONSTANTINESCU și AL. GH. MORAITE.

PROBLEMA 6129. *Să se găsească trei numere întregi știind că suma inverselor a două din ele este egală cu inversul celui de al treilea. Generalizare.*

I. IONESCU.

Să considerăm cazul general și fie

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n} \qquad (1)$$

unde x și x_i sunt numere întregi. Din (1) se deduce

$$x = \frac{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}{x_2 x_3 \ldots x_n + x_1 x_3 \ldots x_n + \ldots + x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}. \qquad (2)$$

Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor x_i. Avem

$$x_1 = d\alpha_1 \quad , \quad x_2 = d\alpha_2, \ldots, x_n = d\alpha_n$$

așa că (2) devine, după simplificare cu d^{n-1}

$$x = \frac{d \cdot \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}{\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n + \alpha_1 \alpha_3 \ldots \alpha_n + \ldots + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}}.$$

Toate numerele α_i sunt prime cu suma dela numitor, căci dacă unul din ele, de exemplu α_1 ar avea un divizor comun δ cu acea sumă, δ care divide suma și toate părțile ei începând cu a doua, va trebui să dividă și prima poate $\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n$. Ori numerele α_i fiind prime între ele rezultă că α_i sunt prime cu numitorul lui x, așa că pentru ca x să fie întreg este necesar și suficient să avem

$$d = k[\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n + \alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_n + \ldots + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}]$$

ceea ce dă pentru x și x_i valorile

$$x = k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \quad ; \quad x_i = k\alpha_i[\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n + \alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_n + \ldots + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}]$$

unde în paranteză în fiecare parte a sumei lipsește câte un factor α.

Pentru cazul particular din prima parte a enunțului avem

$$x = k\alpha_1\alpha_2 \quad , \quad x_1 = k\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) \quad , \quad x = k\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Pentru cazul a 4 numere găsim

$$x = k\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \quad ; \quad x_1 = k\alpha_1(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1) = k\alpha_1 S;$$

$$x_2 = k\alpha_2 S \quad \text{și} \quad x_3 = k\alpha_3 S.$$

P. P. TEODORESCU

(Liceul Matei Basarab, București).

1°. D-nii ILIE N. CONSTANTINESCU, CONST. C. CORDUNEANU și I. MUNTEANU au rezolvat problema numai pentru cazul particular a 3 numere

2°. Cazul particular pentru $n = 3$ și 4 este tratat în *Culegere de probleme de aritmetică* ediția II de I. IONESCU la cap. XXX problemele 17 și 20.

GH. B.

PROBLEMA 6162. *Să se arate că numerele de forma*

$$N = 2^x(2^a A + 1)^\alpha(2^b B + 1)^\beta$$

unde parantezele înseamnă numere prime, nu pot reprezenta indicatori dacă $x < a + b$.

COMANDOR I. LINTEȘ.

Soluția acestei probleme este dată, de însuși propunătorul ei, în nota matematică dela pag. 239, Vol. XLIX, *Gazeta Matematică* precum și la pag. 13 *Teoria indicatorilor.*

D-nii M. R. CONSTANTINESCU, GH. A. GRIGORE și AL. N. PANTEA au dat soluții analoage cu cea din *Gazeta Matematică*, Vol. XLIX, pag. 239.

D-l GEORGE ENESCU (Elev particular, București) a arătat numai că problema este rezolvată în locurile citate.

EXERCIȚII

3. *Să se găsească un patrat de 4 cifre știind că numărul format de primele 2 cifre întrece cu 16 pe cel format de ultimele 2 cifre.*

T. STOICESCU.

R. Fie y^2 patratul căutat și x numărul format de ultimele 2 cifre. Avem

$$y^2 = 100\,(x+16) + x = 101x + 1600 \quad \therefore \quad (y-40)\,(y+40) = 101x.$$

Cum $10 \leqslant y \leqslant 99$, iar 101 este prim, rezultă

$$y + 40 = 101 \quad \therefore \quad y = 61.$$

In adevăr

$$61^2 = 3721 \quad \text{cu} \quad 37 - 21 = 16.$$

4. *Să se construiască intersecția unei elipse, netrasate, cu un cerc dat care trece prin focarele F, F' de asemenea date, cunoscând mărimea axei mari a elipsei.*

TIBERIU TURCULEȚ.

R. Fie F, F' focarele date pe cercul cu centrul în C și M un punct de intersecție al elipsei cu cercul C. Dacă $2a$ este axa mare a elipsei atunci în triunghiul FMF' se cunoaște latura FF' unghiul FMF' și suma celorlalte două laturi. Construcția triunghiului EMF' se face cu ușurință. Se prelungește FM cu o lungime MM' egală cu MF'. In triunghiul FM'F' avem

$$FM' = 2a \quad \text{și} \quad \sphericalangle\, FM'F' = \frac{1}{2} \sphericalangle\, FMF'.$$

Triunghiul FM'F' se construește imediat. Punctul M se găsește la intersecția lui FM' cu perpendiculara pe F'M' în mijlocul său. Se găsesc 2 puncte M, M' de intersecție.

5. *Să se arate că dacă*

$$f(x) = f_1(x) + f_1(x^{-1})$$

atunci funcția

$$F\{[f(x)]^m\} = \varphi(x)$$

ia aceleași valori pentru $x = a$ *sau* $\frac{1}{a}$, *ori care ar fi* m *și* a.

C. IONESCU-ȚIU.

R. Avem

$$f(x) = f(x^{-1}) \quad , \quad [f(x)]^m = [f(x^{-1})]^m$$

$$\therefore \quad F\{[f(x)]^m\} = F\{[f(x^{-1})]^m\} = \varphi(x)$$

6. *Dacă laturile triunghiului ortic al unui triunghiu sunt în progresie aritmetică, atunci*

$$\frac{2 \sin A \sin C}{\sin^2 B \cos B} = 1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C.$$

P. P. TEODORESCU.

R. Notând elementele triunghiului ortic cu litere cu accent avem prin ipoteză

$$\frac{2}{b'} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{c'} \qquad (1)$$

Dar $a' = R \sin 2A, \ldots$ şi înlocuind în (1) obţinem

$$\sin 2A \sin 2C = \sin 2B \sin B \cos (A - C)$$

de unde după desvoltarea lui cos (A—C) şi împărţirea prin cos A cos C se deduce relaţia din enunţ.

7. *Între elementele unui triunghiu avem*

$$8R\, r_a r_b r_c = abc\,(a + b + c).$$

P. P. TEODORESCU.

R. Se ţine seama de

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \ldots \text{ şi } S = pr = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{abc}{4R}.$$

PROBLEME PROPUSE

6401. Fără a folosi table numerice de puteri, să se găsească în ordinea naturală a numerelor întregi:

1°. Primul şir de zece mii numere consecutive care să nu cuprindă nicio putere întreagă.

2°. Primul şir de o mie numere consecutive care să nu cuprindă alte puteri decât patrate perfecte. (A se vedea şi problema 5592, propusă de I. IONESCU şi rezolvată la pag. 42, vol. XLVIII).

N. GEORGESCU-ROEGEN.

6402. Să se găsească *toate* progresiile aritmetice

$$\div\, abc.def\ldots.cba$$

cu termenii numere întregi de câte trei cifre ştiind că primul şi ultimul termen sunt numere inversate.

G-L GH. BUICLIU.

6403. Să se rezolve ecuaţiile:

$$x^5 + 10px^4 + 35p^2x^3 + 50p^3c^2 + 25p^4cx + q = 0$$

$$x^6 + 12px^5 + 54p^2x^4 + 112p^3x^3 + 105p^4x^2 + 36p^5x + q = 0.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6404. La unele cofetării prăjiturile ce se vând pentru acasă sunt puse în nişte tăviţe numite «cartoane» făcute din carton în felul următor:

Se ia o bucată dreptunghiulară ABCD ($\overline{AB} = a > b = \overline{BC}$). Se duce în interior paralelele la fiecare latură, toate la distanţa c de latura respectivă. La fiecare colţ al dreptunghiului se formează astfel câte un pătrat şi se duce fiecăruia diagonala care merge la colţ. Se dă cartonului patru tăieturi după aceste diagonale, se ridică marginile cartonului în sus, suprapunând fiecare jumătate a unui pătrat peste cealaltă şi tăind colţurile cari ies în afară astfel încât gura tăviţei să fie un octogon plan paralel cu planul fundului.

Se cere să se calculeze în funcţiune de a, b, c:

1°. Suprafaţa totală a cartonului folosit, tăviţa fiind considerată gata confecţionată.

2°. Volumul poliedrului ce a rezultat.

3°. Unghiurile distincte formate de diferitele feţe, când se taie două câte două după o muchie.

VIRGIL GHIŢESCU.

6405. 1°. Se consideră progresia aritmetică cu termeni pozitivi şi crescători:

$$\div a_0 . a_1 . a_2 \ldots a_n .$$

Să se arate că funcţiunile de forma:

$$y_i = \operatorname{arctg}(x - a_i) - \operatorname{arctg}(x - a_{i-1})$$

au maximele colineare.

Dacă M_i este maximul funcţiunii y_i, iar $n = 2p - 1$, să se calculeze:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{tg} \frac{M_i}{2} .$$

2°. Dacă $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, să se arate că funcţiunea:

$$y = \sum_{i=1}^{n}{}' \operatorname{arctg}(x - a_i)$$

îşi schimbă concavitatea, când x variază dela a_1 la a_n de un număr impar de ori.

C. IONESCU-BUJOR.

Până la sfârșitul lunii precedente, s'au primit și reținut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Diaconu C. Const. (P); *Gherastiu P. I.* (6290, 340); *Marinescu E. E.* (N, R); *Munteanu T. I.* (6129, 6271, 312, 22, 5, 31, 3, 40, 3, 50, 4); *Pantea N. Al.* (3620, 44, 5893, 907, 66, 6005, 53, 293, 350); *Petcu A. Valeriu* (4478, 520, 6271, 94, 312, 22, 3, 31, 50, 4, 78, 86); *Popa D. M.* (4275, 573, 5678, 6185, 283, 306, 48, 63, 5, 73, 87, 94, 5, 400, A., N, P); *Soare V. M.* (6395, N, E, P); *Stanciu Valeriu* (5451); *Teodorescu St. I.* (2955, 4085, 889, A, P); *Teodorescu P. P.* (E, P); *Vasiliu E. Dan* (6327, 95, E).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus, de* geometrie, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerație.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor redija în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela *« Gazeta Matematică »*.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenții cari cer informații sau diverse lămuriri în scris, sunt rugați a însoți cererea și de o carte poștală sau mărci poștale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ"

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate, cu preţul de 800 lei volumul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ"

Vol. I—X, XII, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

XI. Gazeta Matematică 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100

XIII. I. Ionescu, *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 500

XIX. V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 150

XX. I. I. Chiţulescu, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 180

XXI. M. Ghermănescu, *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . Lei 500

XXII. G. Ţiţeica, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . Lei 250

XXIII. Gazeta Matematică 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 100

XXIV. A. G. Ioachimescu, *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.500

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE"

I. *Elementele lui* Euclid. (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de V. Marian . . . . . Lei 320

II. *Elementele lui* Euclid. (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de V. Marian . . . . Lei 400

III. *Elementele lui* Euclid. (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de V. Marian . . . . . Lei 200

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 100

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* . . . Lei 250

PENTRU BIBLIOTECI ŞI AUTORITĂŢI TOATE PREŢURILE SE TRIPLEAZĂ

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LIII abonamentele sunt:

Pentru profesori, studenţi şi elevi. . . . . Lei 480

Pentru autorităţi şi biblioteci . . . . . Lei 1.500

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII" al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1947 la 1 Iunie 1948 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este:

Pentru profesori, studenţi şi elevi . . . . . Lei 180

Pentru autorităţi şi biblioteci . . . . . Lei 400

Abonamentele se pot plăti la cont CEC Nr. 26220 sau se pot trimite unde se trimite şi corespondenţa, pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 42.648.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIII

NUMĂRUL 3. — NOEMBRIE 1947

SUMARUL

1. † Profesorul Ioan Stamatescu . . . . *N. N. Mihăilescu.*
2. O problemă de construcție . . . . . *Șerban Gheorghiu.*
3. Raport pentru acordarea premiului „V. Conta" pe anul 1947 . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
4. Note matematice: 6—10.
5. Bibliografie.
6. Cereri.
7. Probleme rezolvate: 2055, 4450, 4458, 4992, 5848, 6200.
8. Exerciții: 8.
9. Probleme propuse: 6411—6420.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAȚIONALĂ

1947

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **N. Georgescu-Roegen**, Licenţiat în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier) şi Ing. **D. Stan** (Locţiitor de casier).

Următoarele şedinţe ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:
Marţi 25 Noembrie ora 17: Adunarea materiei pentru Nr. 4.
Marţi 9 Decembrie ora 17: Facerea copertei pentru Nr. 4.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1947 sunt indicate în tabla de materii a volumului LII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 6391, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 400, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *«Gazeta Matematică»* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . . „ 150
— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *«Gazetei Matematice»* . . . . . „ 500

† PROFESORUL IOAN STAMATESCU

In ziua de 5 Octombrie s'a stins din viaţă, pe neaşteptate, profesorul IOAN STAMATESCU, care a slujit învăţământul matematic, fără întrerupere dela catedră, peste 35 ani.

Născut la 8 Ianuarie 1886, I. STAMATESCU numit în tinereţe ROŞCA, a absolvit în 1905 liceul „Matei Basarab"; în 1909 a luat licenţa în matematici la Universitatea din Bucureşti şi în 1911 a susţinut examenul de capacitate, de când începe şi cariera de profesor secundar, care i-a fost atât de dragă, funcţionând multă vreme la liceul „Matei Basarab".

Prin meritele sale didactice a fost chemat să dea preţioase îndrumări şi exemplu, aproape douăzeci de ani, la Seminarul Pedagogic Universitar, tinerilor candidaţi la profesorat, despre felul cum trebue predate lecţiile, astfel ca elevii să gândească mereu asupra materialului studiului.

Ca pregătire profesională îi plăcea să fie totdeauna la curent cu cele mai recente cursuri ale Facultăţii şi se interesa cu ascuţită pricepere şi spirit critic de cele mai variate discipline matematice.

Deosebit de această aleasă preocupare de om cultivat, STAMATESCU era un entuziast, sprijinind toate manifestările ştiinţifice colegiale. Acest entuziasm l-a adus şi la *Gazeta Matematică* unde este membru dela 4 Iulie 1923 după ce câţiva ani înainte fusese cerespondent.

Ca fizic era potrivit de statură şi corpolent. Ca fire, blajin, uman, senin şi prietenos. Dispariţia lui, în prima lună de pensionare este regretată de toţi cunoscuţii.

N. N. MIHĂILEANU.

O PROBLEMĂ DE CONSTRUCŢIE

In cele ce urmează îmi propun a rezolva următoarea problemă de construcţie:

α, β, γ fiind trei coeficienţi daţi să se determine pe laturile AB *şi* AC *ale unui triunghiu, punctele* D *şi* E, *astfel încât să avem:*

$$\frac{BD}{\alpha} = \frac{DE}{\beta} = \frac{EC}{\gamma}.$$

Aceste relaţiuni trebuesc înţelese, în sensul că laturile AB şi AC fiind orientate, avem în *mărime şi sens* egalitatea :

$$\frac{\overline{BD}}{\alpha} = \frac{\overline{EC}}{\gamma}$$

iar, *numai în mărime* relaţiunile :

$$DE = \left|\frac{\beta}{\alpha} BD\right| = \left|\frac{\gamma}{\alpha} EC\right| .$$

Pentru : $\alpha = \beta = \pm \gamma$,

regăsim problema de construcţie ce formează obiectul articolelor cu acelaşi titlu, publicate de d-nii : G-l GH. BUICLIU, Prof. M. GHERMĂNESCU şi Prof. O. ŢINO în G. M., vol XLIV.

Acelaşi caz particular, este în legătură cu problema 585, a cărei soluţie a fost publicată în *Gazeta Matematică* vol. VII, dar lipsindu-i discuţia datelor, continuă să fie considerată printre problemele nerezolvate.

Reamintesc o proprietate binecunoscută de a parabolei.

Fie Ox şi Oy două tangente fixe ale unei parabole (π) având focarul în F. Se notează cu P şi Q punctele unde tangenta t întâlneşte pe Ox şi Oy. *Tangenta* t *variind, triunghiul* PFQ *rămâne asemenea cu el însuşi.*

Demonstraţia este imediată, fiind suficient să se observe că cercul circumscris triunghiului PFQ trece şi prin punctul O comun tangentelor fixe, astfel că unghiurile triunghiului PFQ rămân constante.

2. Consider punctele P şi Q pe laturile AB şi AC astfel ca între segmentele orientate $\overline{BP}$ şi $\overline{QC}$ să avem relaţiunea

$$\frac{\overline{BP}}{\alpha} = \frac{\overline{QC}}{\gamma} .$$

Este evident că punctele P şi Q determină pe laturile respective diviziuni asemenea iar dreapta PQ învălue o parabola (π), tangentă laturilor AB şi AC. Fie F focarul acestei parabole.

Potrivit, proprietăţei reamintite, avem :

$$\frac{FP}{PQ} = k_1 \quad , \quad \frac{FQ}{PQ} = k_2$$

k_1 şi k_2 fiind constante ce pot fi efectiv determinate cunoscând parabola (π) şi tangentele AB şi AC. Rezultă că punctele D sau E ce rezolvă problema de construcţie propusă sunt punctele de intersecţie ale dreptei AB sau AC cu cercul, loc geometric al punctelor pentru care avem:

$$\frac{DF}{DB} = k_1 \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|, \quad \text{sau} \quad \frac{EF}{EC} = k_2 \left| \frac{\gamma}{\alpha} \right|.$$

Prin urmare problema admite sau nu soluţiuni după cum latura AB sau AC întâlneşte sau nu cercul respectiv.

3. B *şi* F *fiind două puncte fixe, iar* D *un punct mobil pe o dreaptă ce trece prin* B *şi face unghiul* α *cu* BF ($\alpha < \pi$), *avem*

$$\sin\alpha \leqq \frac{DF}{DB}.$$

Intr'adevăr din triunghiul DBF deducem:

$$\frac{DF}{DB} = \frac{\sin\alpha}{\sin \sphericalangle DFB}$$

iar inegalitatea enunţată rezultă imediat observând că $\sin \sphericalangle DFB \leqq 1$.

Reciproc, fiind dat k astfel ca $\sin\alpha \leqq k$ există pe dreaptă considerată două puncte D distincte sau confundate pentru care:

$$\frac{DF}{DB} = h.$$

4. Aplicăm generalităţile ce preced, la cazul particular

$$\alpha = \beta = \pm\gamma.$$

Definim pe AB sensul pozitiv dela B spre A iar pe AC dela A spre C. Admitem deasemeni, că $c \leqq h$ ceeace evident nu restrânge generalitatea expunerei.

Cazul particular considerat, îl subdividem în două altele şi anume:

1. $\alpha = \beta = \gamma$, pe care îl numim cazul pozitiv şi
2. $\alpha = \beta = -\gamma$, pe care îl numim cazul negativ.

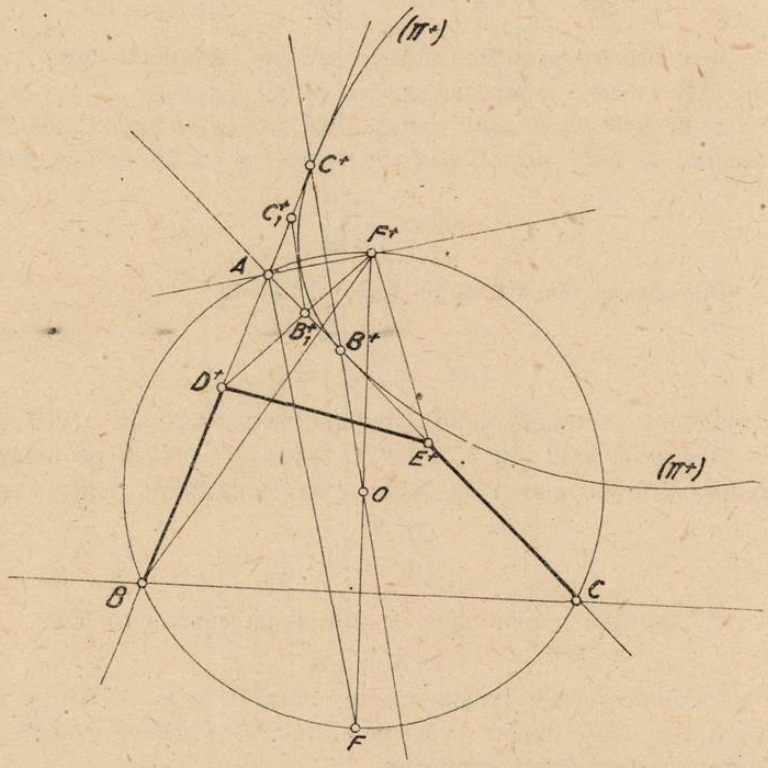
Examinăm, mai întâi cazul pozitiv.

Determin pe AC punctul B^+ iar pe AB punctul C^+, pentru care avem:

$$\overline{BC^+} = \overline{AC} \quad \text{şi} \quad \overline{CB^+} = \overline{AB}.$$

Triunghiul $B^+ AC^+$ este isoscel, baza $B^+ C^+$ fiind paralelă cu bisectoarea interioară a unghiului A.

Punctele P^+ şi Q^+ variind pe AB şi AC, astfel ca să avem $\overline{BP^+} = \overline{Q^+C}$ determină acum diviziuni egale, iar dreapta $P^+ Q^+$ învălue parabola (π^+) ce este tangentă în B^+ lui AC şi C^+ lui AB. Axa parabolei (π^+) este paralelă cu mediana vârfului A, din triunghiul $AB^+ C^+$.



Această axă este deci paralelă cu bisectoarea exterioară a unghiului BAC. B_1^+ şi C_1^+, fiind respectiv mijloacele lui AB^+ şi AC^+, parabola (π^+) este tangentă dreptei $B_1^+ C_1^+$. Dar această tangentă fiind perpendiculară pe axă, urmează că este chiar tangenta la vârf a parabolei (π^+). Se deduce, că focarul F^+ al parabolei (π^+) coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului $AB^+ C^+$. Insă, parabola (π^+) este înscrisă şi în triunghiul ABC. Urmează că F^+ se găseşte pe cercul (O) circumscris triunghiului ABC.

Focarul F^+ coincide deci cu punctul unde bisectoarea exterioară a unghiului B întâlneşte a doua oară cercul circumscris.

Este de adăugat că rotaţia Σ_A cu centrul în F^+ de amplitudine ung. A şi de sens convenabil face să coincidă pe AB cu AC astfel ca punctele P^+ să se suprapună pe punctele omoloage Q^+. Perpendicularele pe mijloacele segmentelor omoloage P^+Q^+, trec prin centrul de rotaţie F^+, iar triunghiul isoscel P^+FQ^+, rămâne asemenea cu el însăşi. In acest triunghiu avem:

$$\sphericalangle P^+ = \sphericalangle Q^+ = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \quad , \quad \sphericalangle F^+ = A.$$

Rezultă:

$$\frac{P^+F^+}{P^+Q^+} = \frac{Q^+F^+}{Q^+P^+} = k_1^+ = k_2^+ = \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}.$$

Punctul D^+, ce rezolvă problema noastră de construcţie — pentru cazul pozitiv — coincide cu fiecare din intersecţiile laturei AB cu cercul (γ_d^+), loc geometric al punctelor D^+ pentru care avem:

$$\frac{D^+F^+}{D^+B} = \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}.$$

Deoarece, avem:

$$\frac{CF^+}{CB} = \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}$$

rezultă că cercul (γ_d^+) trece prin vârful C şi prin picioarele bisectoarelor unghiului C din triunghiul BF^+C. In triunghiul BF^+C cercul (γ_d^+) este deci cercul lui APOLLONIUS relativ la vârful C.

Analog, punctul E^+, din soluţia problemei noastre de construcţie coincide cu fiecare din intersecţiile lui AC cu cercul lui APOLLONIUS (γ_e^+) relativ vârfului B, din triunghiul AF^+C. Dealtminteri, prin rotaţia Σ_A definită mai sus — punctul D^+ devine punctul E^+.

Pentru a afla dacă soluţiunile ce se obţin pe această cale sunt sau nu reale, ne folosim de inegalitatea dela § 3. In acest caz unghiul α devine:

$$\alpha = \sphericalangle ABF^+ = \frac{B - C}{2}$$

iar, inegalitatea în chestiune

$$\sin\frac{B-C}{2} \leqq \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}} \quad \therefore \quad \sin B - \sin C \leqq 1$$

ceea ce este evident, $\sin C$ fiind pozitiv. Rezultă în definitiv că problema noastră de construcție admite în cazul pozitiv, două soluțiuni reale.

Pentru $A = 60^0$ triunghiul $P^+F^+Q^+$ este echilateral. Cercurile (γ_d^+) și (γ_e^+) devin drepte — diametrii OB și OC ai vârfurilor B și C, O fiind centrul cercului ABC.

Problema noastră de construcție nu admite în acest caz decât o singură soluțiune la distanță finită.

Pentru $b = c$, parabola (Π^+) degenerează și focarul F^+, coincide cu A. Punctele D^+, ce rezolvă problema noastră de construcție sunt acum picioarele bisectoarelor unghiului C din triunghiul BF^+C. Deasemeni, punctele E^+, căutate, sunt picioarele bisectoarelor unghiului B din acelaș triunghiu.

5. Trecem acum la cazul negativ, sau

$$\alpha = \beta = -\gamma.$$

Punctele P^- și Q^- variind pe AB și BC astfel ca să avem $\overline{BP^-} = \overline{CQ^-}$, dreapta P^-Q^- înfășoară o parabolă (Π^-) având focarul în punctul F^- diametral opus lui F^+ pe cercul ABC.

Determinăm punctul B^- pe AC și C^- pe AB astfel că

$$\overline{CB^-} = \overline{BA} \text{ și } \overline{BC^-} = \overline{CA}$$

Focarul F^- este centrul cercului AB^-C^-. Deasemeni, rotația $\Sigma_{\pi-A}$ de centru F^-, de amplitudine $\Pi - A$ și de sens convenabil, face ca punctele P^- de pe AB să coincidă cu punctele Q^- de pe AC. Triunghiul P^-FQ^- este și de data aceasta isoscel și avem:

$$\sphericalangle P^- = \sphericalangle Q^- = \frac{A}{2}, \quad \sphericalangle F^- = \Pi - A,$$

$$\therefore \quad \frac{P^-F^-}{P^-Q^-} = \frac{Q^-F^-}{Q^-P^-} = k_1^- = k_2^- = \frac{1}{2\cos\frac{A}{2}}.$$

Punctele D^-, soluțiuni ale problemei de construcție sunt acum intersecția lui AB cu cercul lui APOLLONIUS (γ_d^-) relativ la vârful C din triunghiul BF^-C. Iar punctele E^- sunt intersecțiile lui AC cu cercul lui APOLLONIUS (γ_e^-) relativ vârfului B^-, tot din triunghiul BFC.

Unghiul α — definit la § 3 — fiind acum

$$\alpha = \sphericalangle ABF^- = \frac{A}{2} + B$$

pentru ca punctele D^- să fie reale este necesar și suficient să avem:

$$\sin\left(\frac{A}{2} + B\right) \leqq \frac{1}{2\cos\frac{A}{2}} \quad \therefore \quad \sin B + \sin C \leqslant 1^{1)}$$

Prin urmare dacă această ultimă condițiune este împlinită problema noastră de construcție — cazul negativ — admite două soluțiuni. Aceste două soluțiuni se confundă dacă $\sin B + \sin C = 1$ fiindcă în acel caz, latura AB este tangentă cercului (γ_d^-), iar AC cercului (γ_e^-).

In particular, pentru $A > 120^0$, relațiunea de condiție este verificată fiindcă avem evident:

$$\sin B < \frac{1}{2} \text{ și } \sin C < \frac{1}{2}.$$

Problema admite deci două soluțiuni reale, oricare ar fi B și C.

Pentru $A = 120^0$ triunghiul $P^-F^-Q^-$ este echilateral, iar cercurile (γ_d^-) și (γ_e^-) se reduc la drepte, aceste drepte fiind ca și în cazul pozitiv, pentru $A = 60^0$, diametrii OB și OC. Una din cele două soluțiuni D^- este aruncată la infinit, astfel că problema nu admite decât o singură soluțiune la distanță finită.

In sfârșit pentru $A = 90^0$ relațiunea de condiție devine:

$$\sin B + \cos B = \sin C + \cos C \leqq 1,$$

ceea ce este imposibil. Problema — cazul negativ — nu admite deci nicio soluțiune reală.

---

1) Această condițiune se găsește stabilită și în articolele d-lui General GH. BUICLIU, la pag. 406, Vol. XLIV.

6. Considerațiunile ce preced duc la soluțiunea complectă a problemei 585, propusă de regretatul Inginer AL. ROȘU, problemă al cărei enunț îl reproducem.

Un triunghiu ABC *are baza* AC *fixă și unghiul* A *constant. Se iau pe laturile* AB, AC *două puncte* D *și* E *astfel ca* BD = DE = EC. *Să se determine când* A *variază*: 1) *locul intersecției* M *a dreptelor* BE *și* CD; 2) *locul punctelor de întâlnire al medianelor triunghiului* BMC.

In cele ce urmează ne vom ocupa exclusiv de prima parte a acestei probleme, locul geometric al centrului de greutate al triunghiului BMC fiind evident omotetic, locului geometric al punctului M.

Reluând notațiile noastre, punem $M_A^+ \equiv (BE^+, CD^+)$, $M_A^- \equiv (BE^-, CD^-)$. Vârfurile B și C rămânând fixe, iar unghiul A constant, rezultă că cercurile $(\gamma_d^+), (\gamma_e^+), (\gamma_d^-), (\gamma_e^-)$ rămân deasemenea fixe. In condițiunile problemei 585 punctele D^+, E^+, D^- și E^- descriu, prin urmare cercuri.

Pentru mai multă claritate observ că cercurile (γ_d^+) și (γ_e^-) sunt cercuri (γ_d^-) și $\gamma_e^-)$ relativ la triunghiurile ABC, pentru care B și C sunt fixe iar A mobil pe arcul BF^-C în loc de BF^+C. Deasemeni, cercurile (γ_d^-) și (γ_e^-) sunt cercuri (γ_d^+) și (γ_e^+) pentru aceste din urmă triunghiuri.

Dreptele CD^+ și BE^+ se corespund în omografie. In adevăr, cercul (γ_d^+) trecând prin C, pe o dreaptă ce trece prin C există un singur punct D^+, căruia prin rotația Σ_A i se asociază un singur punct E^+. Deci, unei drepte CD^+ îi corespunde o singură dreaptă BE^+ și reciproc. Locul geometric al punctului M_A^+ este deci o conică ce trece prin vârfurile B și C. In particular când punctul D^+ coincide cu unul din punctele ciclice ale planului, punctul E^+ corespunzător este același punct ciclic, fiindcă pentru ori ce rotație punctele ciclice rămân invariante. Conica descrisă de punctul M este prin urmare un cerc ce trece prin B și C. Notăm cu (Ω_A) acest cerc.

Cercul $\Omega_A)$ se determină efectiv, considerând pentru vârful A o poziție particulară oarecare. Astfel, pentru A confundat cu F^+, punctele D^+ și E^+ am văzut că sunt fie picioarele bisectoarelor interioare, fie picioarele bisectoarelor exterioare ale vârfurilor B și C din triunghiurlle BF^+C. Pentru această poziție a vârfului

A, punctele M_A^+ corespunzătoare sunt sau centrul cercului înscris I_A sau centrul cercului exînscris I_A' relative vârfului F^+ al triunghiului BF^+C. Rezultă, în definitiv că cercul (Ω_A) este cercul cu centrul în F^+ şi care trece prin B şi C.

In acelaşi mod se obţine că locul geometric al punctelor M_A^- este cercul $(\Omega_{\pi-A})$ având centrul în F^- şi trecând prin B şi C.

Observ — ca mai sus — că cercul (Ω_A) în raport cu triunghiul BF^+C este analog cercului $(\Omega_{\pi-A})$ în raport cu triunghiul BF^-C.

Pe cercul (Ω_A) există evident puncte M_A^+ astfel centrele I_A şi I_A'. *Sunt însă toate punctele cercului* (Ω_A) *puncte* M_A^+? Pentru a răspunde la această întrebare facem ca punctul A să se deplaseze pe arcul BF^+C, al cercului circumscris (O).

Presupun, mai întâi $A < 90^0$, deci centrul O şi F^+ sunt de aceeaşi parte a lui BC. Fac să varieze pe A din F^+ spre B. Cele două puncte D^+ corespunzătoare fiecărei poziţiuni ale laturei BA, variază pe anumite arce ale cercului (γ_d^+) având originea primul în piciorul bisectoarei interioare iar cel de al doilea în piciorul bisectoarei exterioare a vârfului C din triunghiul BF^+C. Punctele M_A^+ corespunzătoare fiind intersecţia dreptelor CD^+ cu cercul (Ω_A) urmează că descriu arce având ca origine, primul centrul I_A iar cel de al doilea, centrul I_A'. Când vârful A se confundă cu vârful B, latura AB devine tangenta în B la cercul (O). Punctele D^+ corespunzătoare sunt deci punctele comune acestei tangente şi cercului (γ_d^+). Unul din aceste puncte comune este simetricul lui C în raport cu BF^+. Aceasta arată în primul rând, că tangenta în B la cercul (O) şi cercul (γ_d^+) au *în totdeauna* două puncte comune reale. Regăsim astfel, că problema de construcţie — cazul pozitiv — admite în totdeauna două soluţiuni reale.

Pe de altă parte, cel de al doilea punct comun al cercului (γ_d^+) cu tangenta în B la cercul circumscris se găseşte pe CF^+, adică pe tangenta în C la cercul (Ω_A). Rezultă în definitiv, că cele două poziţiuni ale punctului M_A^+, relative la tangenta în B la cercul circumscris, sunt intersecţia cercului (Ω_A) cu diametrul OB şi punctul C.

Făcând apoi pe A să varieze pe arcul F^+C dela F^+ spre C, se găseşte că punctele M_A^+ corespunzătoare variază pe arce simetrice, în raport cu diametrul F^+F^-.

In definitiv, pentru $A < 90^0$ punctele M_A^+ se găsesc pe cercul (Ω_A) și anume, sau pe arcul cuprins între diametrii OB și OC și pe care se găsește I_A sau pe arcul cuprins între B și C și pe care se găsește I_A'.

Analog pentru $A > 90^0$ punctele M_A^+ sunt situate sau pe arcul BC, ce conține pe I_A sau pe arcul dintre diametrii OB și BC, ce conține pe I_A'.

Când $A = 90^0$, tangenta în B la cercul circumscris este tangentă și cercului (γ_d^+), astfel că punctele M acoperă întreg cercul (Ω_A).

Când punctul A variază pe arcul BF C, intersecțiile laturei AB cu cercul (γ_d^+) sunt puncte D , la care conduce cazul negativ, relativ la triunghiurile pentru care vârful A se găsește pe arcul B F C, în loc de BF$^+$ C, ca până acum.

Pe porțiunile din cercul (Ω_A) pe care nu se găsesc puncte M_A^+ sunt situate punctele $M_{\pi-A}^-$ relative la cazul negativ și la unghiul suplimentar.

Cercurile (Ω_A) și $(\Omega_{\pi-A})$ fiind permutabile între ele, atunci, când și triunghiurile BF$^+$ C și BF C se permută între ele, punctele M_A^- sunt situate pe porțiunile din cercul $(\Omega_{\pi-A})$ pe care nu se găsesc punctele $M_{\pi-A}^+$.

In particular, când $A = \frac{\pi}{3}$, am văzut că punctele D$^+$ și E$^+$ se găsesc sau pe diametrii CO și BO sau la infinit. Punctul $M_{\frac{\pi}{3}}^+$ coincide sau cu centrul cercului (O) sau este intersecția paralelelor duse din B și C laturilor AC și AB. Ceea ce confirmă rezultatul ce precede. Fiindcă în acest caz arcul de pe cercul $\left(\Omega_{\frac{\pi}{3}}\right)$ cuprins între diametri OB și BC se reduce la punctul O, iar arcul cercului $\left(\Omega_{\frac{\pi}{3}}\right)$ dintre B și C și pe care se găsește centrul $I'_{\frac{\pi}{4}}$ este locul punctelor comune paralelelor duse din B și C laturilor AC și AB.

Analog, pentru $A = \frac{2\pi}{3}$ punctele D și E se găsesc sau pe diametrii CO și BO astfel că $M_{\frac{2\pi}{3}}^-$ coicide cu O sau este la in-

finit. Porțiunea din cercul $\left(\Omega_{\frac{\pi}{3}}\right)$ pe care nu se găsesc puncte $M^{+}_{\frac{\pi}{3}}$, este deci segmentul capabil de 120° descris pe BC.

Insfârșit, pentru A = 90° problema de construcție, cazul negativ, nu admite soluțiuni reale fiindcă cele două cercuri (Ω) sunt epuizate exclusiv cu puncte M^{+}.

Pentru a complecta considerațiunile ce preced, enunț — fără a demonstra — următoarele proprietăți valabile pentru triunghiurile ABC, variind în condițiunile problemei 585.

Locul geometric al mijlocului segmentului $D^{+}E^{+}$ *este un cerc. Pentru* A = 60° *acest cerc se reduce la o dreaptă.*

Învăluitoarea dreptei $D^{+}E^{+}$ *este o conică cu centru, având focarul în* F^{+}. *Pentru* A = 60° *această conică devine o parabolă cu focarul în* F^{+}.

Analog, locul mijlocului segmentului $D^{-}E^{-}$ *este un cerc, iar învăluitoarea lui* $D^{-}E^{-}$ *o conică cu centru. Caz particular,* A = 120°.

Cu acestea, problema 585 se consideră ca fiind rezolvată.

ȘERBAN GHEORGHIU.

RAPORT PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „V. CONTA“ PE ANUL 1947

Comisiunea nu a primit nicio lucrare tipărită sau manuscris pentru premiul „V. CONTA“ în cursul anului 1946—47.

De sigur că greutățile de tipar și de viață au stânjenit activitatea intelectuală. Propunem deci ca premiul să nu fie acordat în 1947.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „VASILE CONTA“

Ing. I. S. ANTONIU, Prof. PETRE SERGESCU și Prof. ȘERBAN ȚIȚEICA.

Acest raport a fost aprobat în Adunarea Generală dela 26 August 1947.

NOTE MATEMATICE

6. *In loc de erată la multiperfectele şi amiqbilele d-lui* P. POULET. In articolul *Multiperfecte şi amiabile inedite* publicat de d-l P. POULET la pag. 654, Vol. XLIX al acestei reviste s'au strecurat unele erori care nu se pot preciza dacă sunt de tipar sau dacă sunt datorite din transcrierea autorului. De şi cu întârziere cred că este bine să atragem atenţia asupra acelor erori cu speranţa că se vor putea face rectificările necesare acolo unde nu le-am putut face în cele ce urmează:

1°. Numerele date ca sexaperfecte sub 1) şi 2) la pag. 655, Vol. XLIX *nu sunt sexapefeete.* In adevăr pentru ca primul număr, de exemplu, pe care-l notez cu N să fie sexaperfect trebue ca

$$6\times N = \frac{(2^{30}-1)(3^8-1)(5^5-1)\ldots(1723^2-1)}{(2-1)(3-1)\ldots(1723-1)} \qquad (1)$$
$$= 2^{29}.3^7.5^4\ldots 1723.$$

Ori se observă că $2^{30}-1 = 3^2.7.11.31.151.331$ conţine factorul 151 pe care nu-l conţine membrul II din (1). Deci numărul 1) dela pag. 655, Vol. XLIX nu este sexaperfect. La fel nici numărul 2) nu este sexaperfect.

2°. La sexaperfectul 3) se înlocueşte factorul 331 prin 313.
3°. „ „ 5) „ „ „ 27969 „ 27919.
4°. „ „ 10) „ „ „ 391191 „ 391151.
5°. „ „ 13) „ „ „ 37^3 „ 37^2.
6°. La ultimele 4 sexaperfecte se înlocueşte 898443 prin 898423.
7°. La ultimul octoperfect se adaugă factorii 853 şi 877.
8°. La amiabilele 32° în prima paranteză se înlocueşte 24 prin 29.
9°. La amiabilele 33° primul număr 2609581692850 se înlocueşte prin 2609581197850.
10°. La amiabilele 35° primul număr este 13285246282550, iar nu 13285746282550.
11°. La amiabilele 38° în prima paranteză se introduce şi factorul 11.
12°. La amiabilele 46° primul număr este 608720910392650.
13°. La amiabilele 42 produsul 30584.287271 se înlocueşte prin numărul 30584287271.

P. P. DRĂGHICESCU.

7. *O problemă de construcție.* Problema de care s'au ocupat d-nii Prof. O. N. ȚINO și M. GHERMĂNESCU și de care m'am ocupat și eu în *Gazeta Matematică,* Vol. XLIX este reluată sub o formă mai generală și pe o cale generală în interesantul articol al d-lui ȘERBAN GHEORGHIU din acest număr. După ce d-sa demonstrează că triunghiul P^+FQ^+ rămâne asemeni cu el însuși deduce că punctul D^+ se obține la intersecțiile unui cerc cu latura AB.

Vreau să observ în aceste rânduri că folosind proprietatea stabilită de d-l ȘERBAN GHEORGHIU că triunghiul P^+FQ^+ rămâne asemeni cu el însuși, punctul F^+ fiind fix, construcția punctelor D^+ și E^+ se poate face și prin intersecții de drepte. In adevăr triunghiul $D^+F^+E^+$ fiind asemeni cu el însuși, punctul F^+ fiind fix, iar vârful E^+ găsindu-se pe AC, *punctul* D^+ *va descrie două drepte* Δ_1, Δ_2, *una pentru triunghiul direct asemenea și cealaltă pentru triunghiul invers asemeni.* Intersecțiile acestor drepte cu AB dau punctul D^+.

Pentru ușurință se va urmări figura dela pagina 164 din acest număr.

G-L GH. BUICLIU.

8. *Asupra unor identități algebrice.* In membrul II al identităților stabilite de d-l E. WEGENER în exercițiul 45 dela pag. 762 *Gazeta Matematică,* Vol. XLIX strecurându-se erori le rectificăm în felul următor:

Plecând dela identitatea

$$(1+x)^n\,dx = [1 + x\,C_n^1 + x^2\,C_n^2 + \ldots + x^n\,C_n^n]\,dx$$

și integrând între limitele $0 - x$ se găsește

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} C_n^i = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \quad \text{și} \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i+1} C_n^i = \frac{1}{n+1}.$$

P. P. TEODORESCU.

9. *Generalizarea unei relații de trigonometrie.* Folosind metoda de iterare sugerată de d-l V. ALACI, în articolul publicat în *Gazeta Matematică,* Vol. LI, pag. 59 și plecând dela relația

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{3},$$

se ajunge succesiv la relațiile:

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2^2}=\frac{b\cos\frac{C}{2}-c\cos\frac{B}{2}}{b\cos\frac{C}{2}+c\cos\frac{B}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\left(45^0+\frac{A}{2^2}\right)^{1)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2^3}=\frac{b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2^2}-c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2^2}}{b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2^2}+c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2^2}}\cdot\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2^3}+\frac{A}{2^3}\right)$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2^4}=\frac{b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2^2}\cos\frac{C}{2^3}-c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2^2}\cos\frac{B}{2^3}}{b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2^2}\cos\frac{C}{2^3}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2^2}\cos\frac{B}{2^3}}$$

$$\cdot\operatorname{cotg}\frac{(2^3-1)\pi+A}{2^4}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2^n}=\frac{b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2^2}\ldots\cos\frac{C}{2^{n-1}}-c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2^2}\ldots\cos\frac{B}{2^{n-1}}}{b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2^2}\ldots\cos\frac{C}{2^{n-1}}-c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2^2}\ldots\cos\frac{B}{2^{n-1}}}$$

$$\cdot\operatorname{cotg}\frac{(2^{n-1}-1)\pi+1}{2^n}\cdot$$

MARCEL D. COTARIU.

10. *Asupra problemei 1959.* Problema cere un mecanism care să realizeze pentru pânza unui steag o mișcare ca a unui proiectil. Soluția dela pag. 435, Vol. XLIX, a fost rectificată printr'o notă publicată în Vol. LI, pag. 177.

In acea notă s'a studiat și mișcarea arcului care pune în mișcare greutatea cu steguleț.

---

1) Dată în art. cit. sub Nr. 5'.

Menţinând ipoteza de calcul şi notaţiile din acea notă, ecuaţia mişcării arcului este:

$$\frac{p}{g} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = -ks - f$$

în locul celei indicate sub (1) din nota din Vol. LI.

Semnul — din faţa termenului ks modifică complet rezultatul, soluţia ecuaţiei diferenţiale fiind:

$$s = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t - \frac{f}{k} \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{kg}{p}}$$

în locul soluţiei cu exponenţiale găsite în nota citată.

Mai menţionăm că studiul necesar determinării constantelor şi cel al modului cum greutatea p părăseşte resortul este mult mai complicat decât a fost tratat.

ALEXANDRU STOENESCU.

BIBLIOGRAFIE

Časopis pro pěstováni Matematiky a Fisiky. Ročnik 72. Praha 1947. E. R. van KAMPEN & AUREL WINTNER: On the asymptotic distribution of geodesics on surfaces of revolution. ED. ČECH & J. NOVÁK: On regular and combinatorial imbedding. M. KATĚTOV: On H-closed extensions of topological spaces. VÁCLAV ELZNIC: Transformance geodetickych zeměpisnych souradnic na mezinárodni elipsoid. (Transformarea coordonatelor geografice pe elipsoidul internaţional).

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVII. Nr. 8. Octombrie 1947. GH. TH. GHEORGHIU: Articol de metodologie. E. ARGHIRIADE: Asupra regulei lui HOSPITAL. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

Universidad Nacional de La Plata. Publicaciones de la facultad de ciencias Fisicomatemateos. Vol. II Noembrie 1941, Decembrie 1942, Iunie 1943, Martie 1947. Vol. III Decembrie 1942, Iulie şi Decembrie 1944.

M. ST. BOTEZ. Metode de rezolvire a ecuaţiilor trigonometrice. Ediţia II. Iaşi 1947. Atelierele grafice A. ŢEREK.

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 325 [1]. Etimologia cuvântului *aritmologie* își are origina în limba greacă în *arithmos* (număr) și *logos* (cuvânt). In limba franceză, în dicționarul LAROUSSE se dă următoarea explicație cuvântului *aritmologie*: « *Science générale des nombres, de la mesure des grandeurs* ».

Se deduce că această ramură se ocupă cu studiul măsurării mărimilor.

LT. COL. E. ST. IACOB.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2055. *Se dau două grupuri de câte trei cercuri* C_1, C_2, C_3 *și* C_1', C_2', C_3'. *Plecând dela primul se consideră cercul* Γ_1 *din fascicolul definit de cercurile* C_2 *și* C_3 *și care e ortogonal cercului* C_1'; *avem la fel cercurile* Γ_2 *și* Γ_3 *ortogonale cercurilor* C_2' *și* C_3' *și făcând parte din fascicolele definite de* C_3 *și* C_1 *de* C_1 *și* C_2. *Se presupune că cercurile* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ *fac parte dintr'un fascicol. Să se demonstreze că de aceeași proprietate se bucură cercurile* $\Gamma_1', \Gamma_2', \Gamma_3'$ *obținute plecând dela al doilea din grupurile date și definindu-le în chip analog ca pe cele de mai înainte.*

G. TIȚEICA.

Utilizăm în soluțiunea acestei probleme coordonatele tetraciclice, de care regretatul profesor G. TIȚEICA se folosea adesea, în cursul său.

Astfel,

$$\alpha(x^2 + y^2) + 2\beta x + 2\gamma y + \delta = 0$$

fiind un cerc oarecare din plan, numim punct imagine al acestui cerc punctul M ale cărui coordonate în raport cu un tetraedru de referință sunt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Punctele imagine ale punctelor din plan — sau cercuri de rază nulă — sunt o cuadrică (Q) ce se numește cuadrica absolut. Cercurile unui fascicol au ca puncte imagine, punctele unei drepte, iar imaginele a două cercuri ortogonale sunt două puncte conjugate în raport cu cuadrica absolut (Q).

1) A se vedea și răspunsul dat la pag. 35 din acest volum.

Aceste generalităţi fiind reamintite, fie A_1, A_2, A_3 punctele imagine ale cercurilor din primul grup şi A_1', A_2', A_3' cele relative la cercurile celui de al doilea grup. Fie de asemeni, A' polul în raport cu (Q) al planului definit de punctele A_1', A_2', A_3'. Punctul A' este evident punctul imagine al cercului ortogonal comun cercurilor C_1', C_2', C_3'. Insemnăm respectiv cu $\delta_1', \delta_2', \delta_3'$ dreptele de intersecţie ale planului definit de punctele A_1, A_2, A_3 cu planurile polare în raport cu (Q) ale punctelor A_1', A_2', A_3'. Punctul imagine al cercului Γ_1 este punctul comun dreptelor $A_2 A_3$ şi δ_1'. Punem $\alpha_1 \equiv (\delta_2', \delta_3')$, $\alpha_2 \equiv (\delta_3', \delta_1')$ şi $\alpha_3 \equiv (\delta_1', \delta_2')$. Prin ipoteză admiţând că cercurile $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ fac parte dintr'un fascicol, rezultă că triunghiurile $A_1 A_2 A_3$ şi $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ sunt omologice. Rezultă de asemeni, că planele $(A' A_1 \alpha_1)$, $(A' A_2 \alpha_2)$, $(A' A_3 \alpha_3)$ au o dreaptă comună, Δ.

Δ' fiind dreapta conjugată în raport cu (Q) a dreptei Δ', punctul comun dreptei $A_2' A_3'$ cu Δ' este punctul imagine al cercului Γ_1'. In adevăr dreapta Δ trecând prin A' conjugata sa Δ' se găseşte în planul polar, deci în planul $A_1' A_2' A_3'$. Dreptele $A_2' A_3'$ şi Δ' au prin urmare un punct comun, γ_1'. Pe de altă parte, planul polar — în raport cu (Q) — al punctului α_1 conţine dreapta $A_2' A_3'$. Punctul γ_1' este deci polul planului $(A' A_1 \alpha_1)$ iar punctele γ_1' şi A_1 sunt conjugate în raport cu (Q).

Punctele imagine ale cercurilor $\Gamma_1', \Gamma_2', \Gamma_3'$ fiind pe aceeaşi dreaptă Δ' rezultă că şi aceste cercuri fac parte dintr'un fascicol linear, ceea ce demonstrează propoziţiunea enunţată.

Cazuri particulare. 1. Admitem că cercurile C_1, C_2, C_3 şi C_1', C_2', C_3' sunt ortogonale unui aceluiaşi cerc. In acest caz imaginele lor A_1, A_2, A_3 şi A_1', A_2', A_3' sunt în acelaşi plan (Σ) fiind secţiunea lui (Q) prin acest plan suntem conduşi la următoarea propoziţie.

Se consideră două triunghiuri (T) *şi* (T') *în acelaşi plan. Dacă triunghiul format de polarele vârfurilor triunghiul* (T) *în raport cu conica* (Σ) *este omologic cu* (T') *şi triunghiul format de polarele vârfurilor lui* (T'), *în raport cu aceeaşi conică este omologic cu* (T).

Demonstraţia este imediată fiindcă prin dualitate două triunghiuri omologice se transformă în triunghiuri omologice.

Mai particular încă, dacă presupunem că cele şase cercuri considerate au un punct comun şi transformând figura prin inver-

siune luând punctul comun ca pol obținem teorema triunghiurilor omologice.

2. Dacă cele două grupuri de cercuri coincid, propoziţiunea noastră devine:

Se consideră trei cercuri C_1, C_2, C_3 *în acelaşi plan. Fie* Γ_1 *cercul fascicolului definit de* C_2 *şi* C_3 *şi ortogonal lui* C_1. *Cercul* Γ_1 *şi analoagele sale* Γ_2 *şi* Γ_3 *aparţin unui fascicol linear.*

Relativ la punctele lor imagine această propoziţiune revine la aceea bine cunoscută:

Ori ce triunghiu este omologic cu triunghiul ce are ca vârfuri polurile laturilor sale în raport cu o conică.

In particular, dacă cele trei cercuri C_1, C_2, C_3 au un punct comun şi transformăm figura prin inversiune luând ca pol punctul comun, rezultă că înălţimile unui triunghiu sunt concurente.

Ş. G.

S'au primit soluţiuni analitice dela d-nii C. ROIBĂNESCU (Prof.) şi N. ŢUHAI.

PROBLEMA 4450. *Cât ar cântări pe Neptun un corp care pe Marte cântăreşte 50 kg?*

AL. A. ROŞU.

Soluţie dată de d-l EMILIAN G. CRISTEA (Liceul Militar Ştefan cel Mare).

Să notăm cu:

G_m greutatea corpului pe *Marte*.
G_n „ „ „ *Neptun*
G „ „ „ *Pământ*
M_m massa planetei *Marte*
M_n „ „ *Neptun*
M „ „ *Pământului*
R_m raza planetei *Marte*
R_n „ „ *Neptun*
R „ *Pământului*
m massa corpului şi f coeficientul de atracţie NEWTONIANĂ.

Avem, conform legii de atracţie a lui NEWTON:

$$G_m = \frac{f_m M_m}{R_m^2} \; ; \; G_n = \frac{f_m M_n}{R_n^2} \; ; \; G = \frac{f_m M}{R^2}.$$

De unde:

$$G_n = G_m \frac{M_n}{M_m} \cdot \left(\frac{R_m}{R_n}\right)^2 \quad ; \quad G = G_m \cdot \frac{M}{M_m} \cdot \left(\frac{R_m}{R}\right)^2.$$

In tabelele de logaritmi J. DUPUIS, găsim:

$$M_m = 0{,}105\,M \quad ; \quad M_n = 16\,M$$
$$R_m = 0{,}528\,R \quad ; \quad R_n = 3{,}8\,R.$$

Rezultă:

$$G_n = 50 \times \frac{10}{0{,}105} \times \left(\frac{0{,}528}{3{,}8}\right)^2 \leqq 147 \text{ kg.}$$

Iar:

$$G = 50 \times \frac{1}{0{,}105} \times \overline{0{,}528^2} \leqq 132{,}7 \text{ kg.}$$

S'au mai primit soluții foarte bune dela d-nii: MARIN F. VĂDUVA (bacalaureat Giurgiu), M. CEPLEANU, VAL. MIH. I. STANCIU (liceul Militar, Craiova), ION GH. SABAC (Colegiul militar Filipescu) și OCTAVIAN S. IANCULESCU.

AL. ST.

PROBLEMA 4458. *Fără a se desvolta determinantul, să se deducă identitatea.*

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ a & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b & c \end{vmatrix} \equiv a^2 c^2 (a+b+c)(a-b+c).$$

Generalizare. AL. A. ROȘU.

Notând cu Δ_6 determinantul din enunț, egalitatea

$$\Delta_6 = 0 \qquad (1)$$

exprimă după SYLVESTER [1], condiția *necesară* și *suficientă*, ca ecuațiile

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad ax^4 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

1) TH. ANGHELUȚĂ. *Algebra superioară*, Vol. II. pag. 237.

să aibă o rădăcină comună. Această rădăcină verifică, evident, și sistemul

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad ax^4 - ax^2 = 0$$

și *reciproc*. Determinantul

$$\Delta_6' = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ a & 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & -a & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^2 c^2 \Delta_2 = a^2 c^2 \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

egalat cu zero este o condiție echivalentă cu (1). Rezultă dar

$$\Delta_6 = A\Delta_6'$$

unde A este un coeficient numeric. Avem $A = 1$, căci termenul de gradul cel mai mare în raport cu a din Δ_6 și Δ_6' este $a^4 c^2$ iar în Δ_2 este a^2.

Se observă că Δ_2 are divizorii $a + b + c$ și $a - b + c$, care se pun în evidență scriind că 1 și -1 verifică prima ecuație din (2). Acești divizori se mai află adunând la ultima coloană a lui Δ_2 pe celelalte înmulțite cu 1 sau cu -1, 1, -1.

Urmează deci că

$$\Delta_2 = B\,(a + b + c)\,(a - b + c)$$

Făcând $b = c = 0$ se găsește $B = 1$ deci

$$\Delta_6 = a^2 c^2\,(a + b + c)\,(a - b + c)$$

Este instructiv de a verifica egalitatea

$$\Delta_6 = \Delta_6'$$

și direct. Pentru aceasta se scad elementele ultimei linii din Δ_6 din acelea ale liniei a 4-a și se desvoltă determinantul obținut după ultima coloană. Cu determinantul obținut se procedează la fel, scăzând elementele ultimei linii din ale liniei a 3-a și desvoltând după elementele ultimei coloane. Se obține

$$\Delta_6 = a^2 c^2 \Delta_2 \quad \text{adică} \quad = \Delta_6' .$$

Generalizare. Se procedează întocmai ca în cazul particular, înlocuind pe Δ_2 prin un determinant de ordinul $n + 2$ și de gradul 2 în raport cu $A_0, A_1, \ldots A_n$.

Determinantul are divizorii

$A_0 + A_1 + \ldots + A_n$ şi $A_0 - A_1 + \ldots + (-1)^n A_n$.

Făcând $A_1 = A_2 = \ldots + A_n = 0$

se găseşte coeficientul numeric $(-1)^n$.

Se poate lărgi generalizarea luând determinantul SYLVESTER al sistemului:

$P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0$; $A_0 x^{n+p} + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0$

Se găseşte, în mod analog, pentru acest determinant, valoarea

$$(-1)^n A_0^n A_n^n P(\alpha_1) \ldots P(\alpha_p)$$

unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x^p - 1 = 0$$

Aici Δ_2 este înlocuit cu un determinant de ordinul $n+p$ şi de gradul p în raport cu $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Acest determinant este egal cu produsul

$$(-1)^n P(\alpha_1) P(\alpha_2) \ldots P(\alpha_p).$$

Notă. 1°. D-nii: P. P. DRĂGHICESCU, I. A. ILIE şi VINTILĂ GRIGORESCU au dat soluţii bune la cazul particular, pe alte căi, însă n'au dat rezultate exacte la generalizare.

2°. Au găsit valoarea lui Δ_6, *dezvoltând* determinantul, şi fără a da o generalizare riguroasă d-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU, EM. BLAGA, I. GR. BOGDAN, C C. CHIRIAC, P. P. COJOCARU, AUREL I. CORNĂŢEANU, C. COTESCU şi CĂLIN I. C. DUMITRU.

3°. D-nii: I. I. BUZINCU şi VICTOR L. FLORESCU au *dezvoltat* pe Δ_6, fără a se ocupa de generalizare.

4°. La fel se rezolvă şi problema 4287 propusă la pag. 480, Vol. XXXVIII.

PROBLEMA 4992. *Se consideră trei plane paralele* P_1, P_2, P_3; *punctele* A,B,C, *situate în fiecare din aceste plane*; *o dreaptă* D *în spaţiu, care înţeapă cele trei plane în* α, β, γ *şi un punct* M *pe dreapta* D. *Să se demonstreze că planele duse prin* α, β, γ *paralele la planele* MBC, MCA, MAB *se taie într'un punct din planul* ABC.

V. THÉBAULT.

Considerăm cazul ceva mai general când punctele α, β, γ sunt *oricum* pe dreapta D. Cu alte cuvinte renunţăm, la ipoteza din enunţ, că dreptele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sunt paralele cu un acelaşi plan.

Fie P planul definit de punctele A, B, C iar P_α, P_β, P_γ planele duse prin α, β, γ paralele respectiv planelor MBC, MCA, MAB. Punctul M variind pe dreapta D, planele P_α, P_β, P_γ trec fiecare prin câte o dreaptă fixă d_α, d_β, d_γ. Dreapta d_α trece prin punctul α și este paralelă cu BC. Analog dreptele d_β și d_γ trec respectiv prin β și γ și sunt paralele lui AC și AB. Când punctul M se deplasează pe D, planele P_α, P_β, P_γ se corespund în omografie, unui plan P_α dat corespunzându-i, un singur punct M și deci câte un singur plan P_β sau P_γ. Rezultă că dreptele de intersecție ale perechilor de plane (P_β, P_γ), (P_γ, P_α), (P_α, P_β) sunt generatoare rectilinii ale câte unei cuadrice. Fie Q_α, Q_β, Q_γ aceste cuadrice.

Cuadrica Q_α, conține evident dreptele d_β, și d_γ. Numim sistemul de generatoare definit prin d_β, sau d_γ, primul sistem de generatoare al lui Q_α. Când punctul M coincide cu punctul O, unde dreapta D înțeapă planul P, planele P_α, P_β, P_γ devin paralele cu P. Deci dreapta dela infinit a planului P este pe Q_α, o generatoare din sistemul al doilea. Notăm cu P* această dreaptă dela infinit a planului P. Deasemeni, pentru M la infinit pe dreapta D sau $M \equiv D^*$, planele P_α, P_β, P_γ corespunzătoare, conțin dreapta D. Deducem că dreapta D este pe Q_α, tot o generatoare din sistemul al doilea. Insfârșit, planele P_β și P_γ fiind ambele paralele cu MA, rezultă că dreapta dela infinit a planului determinat de punctul A și de dreapta D este deasemeni, o generatoare rectilinie de a lui Q_α. Această generatoare fiind în același plan cu P* rezultă că aparține primului sistem. Pe deasupra, rezultă că planul dela infinit este tangent lui Q_α în punctul A*, A* fiind punctul dela infinit al dreptei OA. Putem adăuga, deși aceasta nu este în legătură directă cu problema noastră, că cuadrica Q_α, este un paraboloid iperbolic ale cărui generatoare din primul sistem sunt paralele cu planul P, iar cele din al doilea cu planul definit de punctul A și de dreapta D.

Deasemeni, Q_β, conține dreptele d_γ, d_α, D, P* și este tangentă planului dela infinit în punctul B*, depe dreapta OB.

Analog Q_γ conține dreptele d_α, d_β, D, P* și este tangentă planului dela infinit în punctul C*, în direcțiunea OC.

Cuadricele Q_β și Q_γ au deci în comun trei generatoare rectilinii d_α, din primul sistem și D și P* din cel de al doilea

sistem. Rezultă că mai au în comun o a patra generatoare G, din primul sistem.

Deoarece, toate punctele de pe generatoarea comună C sunt puncte comune ale planelor P_α, P_β, P_γ rezultă că și cuadrica Q_α conține generatoarea G. Sau în definitiv:

Locul geometric al punctului comun planelor P_α, P_β, P_γ *este o dreaptă* G. *Această dreaptă se sprijină pe* D *și este paralelă planului* P.

Ne propunem acum să determinăm efectiv generatoare a G adică să determinăm direcțiunea sau punctul său dela infinit G*, și punctul δ unde întâlnește pe D. In acest scop folosim două teoreme bine cunoscute relativ la cuadrice, și anume:

I. Raportul armonic al planelor tangente în patru puncte ale unei generatoare rectilinii este egal cu acela al punctelor de contact.

II. Dacă două cuadrice au o generatoare rectilinie comună punctelor de contact ale unui plan trecând prin generatoarea comună se corespund în omografie.

Determinăm mai întâi generatoarea din primul sistem al lui Q, trecând prin α. Notăm că α*, punctul dela infinit al acestei generatoare și cu a^*, b^*, c^* punctele dela infinit ale dreptelor d_α, d_β, d_γ sau ceea ce este tot una, ale paralelelor lor BC, CA, AB. Din prima teoremă reamintită rezultă că avem:

$$\frac{\overline{\alpha\beta}}{\overline{\alpha\gamma}} = (b^* c^* \alpha^* A^*). \qquad (1)$$

Analog β* și γ* fiind punctele dela infinit ale generatoarelor din primul sistem ale lui Q_β și Q_γ și trecând prin β și γ avem:

$$\frac{\overline{\beta\gamma}}{\overline{\beta\alpha}} = (c^* a^* \beta^* B^*), \qquad (2)$$

$$\frac{\overline{\gamma\alpha}}{\overline{\beta\alpha}} = (a^* b^* \gamma^* C^*). \qquad (3)$$

Fie acum π_α, π_β, π_γ planele paralelele cu P duse respectiv prin α, β, γ și π* planul dela infinit, iar π_δ planul paralel cu P

dus prin G. Punctele de contact ale acestor plane cu cuadricele Q_α, Q_β, Q_γ, sunt cele arătate în următorul tablou:

	Q_α	Q_β	Q_γ
π_α	α^*	a^*	a^*
π_β	b^*	β^*	b^*
π_γ	c^*	c^*	γ^*
π^*	A*	B*	C*
π_δ	G*	G*	G*

unde sunt trecute pe aceiaşi linie punctele de contact ale aceluiaşi plan cu cele trei cuadrice.

Rezultă, din cea de a doua teoremă reamintită că punctele din două coloane diferite — de exemplu Q_β şi Q_γ — şi din aceeaşi linie se corespund în omografie. Punctul G* este punct dublu pentru fiecare din aceste omografii.

Consideraţiunile ce preced pot fi dealtminteri transpuse cu multă uşurinţă pentru elemente la distanţă finită. Astfel ducem din A paralelele cu direcţiunile din coloana Q_α, din B cu cele din coloana Q_β iar din C, cu cele din coloana Q_γ. Cele trei paralele corespunzătoare direcţiunilor depe aceiaşi linie sunt concurente, punctele comune fiind situate pe paralela dusă din O generatoarei G. Pentru mai multă claritate punem

$$Ag \equiv (A\alpha,\ BC).\ Bg \equiv (B\beta^*,\ CA),\ Cg \equiv (C\gamma^*,\ AB).$$

Deoarece, avem:

$$(\alpha^*\ b^*\ c^*\ A^*) = (a^*\ \beta^*\ c^*\ B^*) = (a^*\ b^*\ \gamma^*\ c^*)$$

rezultă că punctele A_g, B_g, B_g, şi O sunt colineare, iar dreapta respectivă este paralelă cu generatoarea G. Putem afirma chiar mai mult. Paralelele duse prin A, B şi C generatoarelor lui Q_α, Q_β şi Q_γ conţinute în acelaşi plan paralel cu P, se întâlnesc într'un punct al dreptei $A_g B_g C_g$. In particular, când aceste paralele au aceiaşi direcţiune G*, punctul lor comun este punctul dela infinit al dreptei $A_g B_g C_g$.

Punctul δ, unde se întâlnesc generatoarele D și G poate fi găsit cu ușurință. Astfel, din prima teoremă, deducem:

$$(\pi_\beta \pi_\gamma \pi_\delta \pi^*) = (b^* c^* G^* A^*)$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{\delta\beta}}{\overline{\delta\gamma}} = 1 : \frac{\overline{OB_g}}{\overline{OC_g}} = \frac{\overline{OC_g}}{\overline{OB_g}}. \tag{4}$$

Punctele B_g și C_g fiind determinate prin egalitățile (2) și (3), rezultă că egalitatea (4) determină punctul δ.

Cu aceasta problema propusă se reduce la a arăta că în cazul când dreptele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sunt paralele cu același plan, generatoarea G se găsește în planul P sau $\delta \equiv 0$.

Ducem prin A, B și C câte un plan paralel cu dreptele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ presupuse de data această că sunt paralele cu același plan. Fie A_1, B_1, C_1, punctele unde aceste plane întâlnesc pe BC, CA și AB. Egalitățile (1), (2) și (3) ce definesc punctele A_g, B_g, C_g, devin în acect caz:

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{\overline{A_gC}}{\overline{A_gB}} : \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}, \tag{1'}$$

$$\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} = \frac{\overline{B_gA}}{\overline{B_gC}} : \frac{\overline{C'A}}{\overline{B'C}}, \tag{2'}$$

$$\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = \frac{\overline{C_gB}}{\overline{C_gA}} : \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}, \tag{3'}$$

unde $A' \equiv (AO, BC)$, $B' \equiv (BO, CA)$, $C' \equiv (CO, AB)$

O fiind punctul comun dreptei BC și planului dus prin O paralel cu $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, din (4) rezultă că trebue să arătăm că avem:

$$\frac{\overline{O\beta}}{\overline{O\gamma}} = \frac{\overline{O_aB}}{\overline{O_aC}} = \frac{\overline{OC_g}}{\overline{OB_g}}, \tag{5}$$

punctele B_g și C_g fiind definite în acest caz, prin relațiunile (2') și (3').

Considerăm pentru aceasta pe BC punctul ω astfel ca să avem:

$$\frac{\overline{\omega B}}{\overline{\omega C}} = \frac{\overline{OC_g}}{\overline{OB_g}}. \tag{6}$$

Vom arăta că $\omega \equiv Oa$. Observăm că punctele A_1 şi ω se corespund pe BC în omografie. Unui punct A_1 îi corespunde prin (1') un singur punct A_g şi deci câte un singur punct B_g sau C_g intersecţii ale dreptei $A_g O$ cu AC sau AB. Din (6) rezultă că punctelor B_g şi C_g le corespunde un punct ω sau unui punct A_1 un singur punct ω. Reciproc punctele O, B_g, C_g fiind coliniare rezultă din (6) că pentru ω dat se obţine în mod univoc punctele B_g şi C_g şi avem prin urmare un singur A_1. Pe de altă parte, pentru $A_1 \equiv A'$ avem $A_g \equiv a^*$ deci:

$$\frac{\overline{OC_g}}{\overline{OB_g}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$$

$$\therefore \qquad (\omega)_{A_1 \equiv A'} \equiv A'.$$

Obţinem că razele AA_1 şi $O\omega$ se corespund în omografie, raza AO fiind propria sa omoloagă în cele două fascicole. Punctul comun dreptelor AA_1 şi $O\omega$ descrie deci o dreaptă.

In particular, pentru $A_1 \equiv B$ avem $A_g \equiv C$, $B_g \equiv C$, $C_g \equiv C'$ şi

$$\left(\frac{\overline{OC_g}}{\overline{OB_g}}\right)_{A_1 \equiv B} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}.$$

Punctul ω corespunzător se găseşte pe paralela dusă din O laturei AB. In fine pentru $A_1 \equiv C$ avem $A_g \equiv B$, $B_g \equiv B'$, $C_g \equiv B$ şi

$$\left(\frac{\overline{OC_g}}{\overline{OB_g}}\right)_{A_1 \equiv C} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}.$$

Prin urmare şi în acest caz punctul comun dreptelor AA_1 şi $O\omega$ este la infinit. Rezultă că dreptele AA_1 şi $O\omega$ sunt paralele deci $\omega \equiv Oa$ şi prin urmare egalitatea (5) este demonstrată. Cu aceasta propoziţiunea enunţată este deasemeni demonstrată.

Ş. G.

S'a primit dela d-nul P. P. DRĂGHICESCU (Şc. Of. Geniu) o foarte bună soluţiune vectorială a problemei propuse. Deasemenea s'a primit o foarte bună soluţie geometrică dela d-nul M. D. POPA (student Politehnica Bucureşti).

PROBLEMA 5848. *Dintr'un autobuz, care merge cu o viteză convenabilă, sare o persoană şi în acelaşi timp se urcă altă persoană. Admiţând că cele două persoane au greutăţi egale şi că şoferul nu schimbă cu nimic mersul autobuzului se întreabă: Se va modifica viteza autobuzului?*

COMANDOR I. LINTEŞ.

Să notăm cu M, *massa autobuzului* şi cu V *viteza* lui.

A) Să presupunem că din autobuz *sare* o persoană de *massă m*, cu *viteza* v_1 (viteza v_1 se consideră *pozitivă* dacă are *acelaşi sens* cu V şi *negativă* dacă are *sensul contrar*).

Fie V' *viteza autobuzului după ce persoana a sărit jos din autobuz.*

Aplicând proecţia *cantităţilor de mişcare* pe direcţia de mişcare a autobuzului obţinem:

$$MV = (M - m)\, V' + mv_1 \qquad (1)$$

(cantitatea de mişcare dinainte de săritură este egală cu aceia după săritură).

Din (1):

$$V' = \frac{M}{M-m} \cdot V - \frac{m}{M-m} \cdot v_1 \qquad (2)$$

Din studiul relaţiei (2) rezultă:

Pentru $v_1 = V \quad ; \quad V' = V$

„ $v_1 = \frac{M}{m} \cdot V \quad ; \quad V' = 0$

„ $v_1 > V \quad ; \quad V' < V$

„ $v_1 < V \quad ; \quad V' > V.$

Adică, în cazul când *viteza cu care persoana sare din autobuz este mai mare decât viteza autobuzului, viteza autobuzului scade după săritură.*

In cazul când persoana sare cu o viteză mai mică decât a autobuzului, viteza autobuzului se măreşte după săritură.

Dacă ar fi posibil ca persoana să sară cu viteza $\frac{M}{m} \cdot V$, autobuzul s'ar opri pe loc.

Presupunând că persoana ar putea sări cu o viteză *superioară* mărimii $\frac{M}{m}V$, după săritură automobilul ar fi dat înapoi ($V' < 0$).

B) Să studiem acum cazul *urcării* în autobuz a unei persoane de *massă* m cu *viteza* v_2.

Fie V'' *viteza autobuzului după urcare.*

Aplicând teorema proecției *cantităților de mișcare* avem în acest caz:

$$MV + mv_2 = (M + m)\, V''. \qquad (3)$$

De unde:

$$V'' = \frac{M}{M+m} \cdot V + \frac{m}{M+m} \cdot v_2 \qquad (4)$$

Rezultă:

Pentru $v_2 = V$; $V'' = V$

„ $v_2 > V$; $V'' > V$

„ $v_2 < V$; $V'' < V$

„ $v_2 = -\frac{M}{m}V$; $V'' = 0.$

Adică, *în cazul când o persoană se urcă cu o viteză mai mare decât aceia a autobuzului, după urcare viteza autobuzului crește.*

In cazul când o persoană se urcă cu o viteză mai mică decât aceia a autobuzului, după urcare viteza autobuzului se micșorează.

Presupunând că persoana s'ar urca în autobuz cu o viteză contrară ca sens aceleia a autobuzului și suficient de mare ar putea opri autobuzul, sau chiar l-ar putea da înapoi.

C) Să considerăm acum cazul problemei propuse, presupunând *că în același timp o persoană de massă* m *sare cu viteza* v_1 *și o altă persoană de aceiași massă* m *se urcă cu viteza* v_2.

Fie V_1 *viteza* ulterioară a autobuzului.

Avem, analog cazurilor precedente:

$$MV + mv_2 = MV_1 + mv_1 \qquad (5)$$

De unde: $$V_1 = V + \frac{m}{M}(v_2 - v_1) \qquad (6)$$

Rezultă:

Pentru $v_2 = v_1$; $V_1 = V$ autobuzul își *păstrează* viteza

„ $v_2 > v_1$; $V_1 > V$ „ „ *mărește* „

„ $v_2 < v_1$; $V_1 < V$ „ „ *micșorează* „

„ $v_1 - v_2 = \frac{M}{m} V$; $V_1 = 0$ „ *se oprește*

„ $v_1 - v_2 > \frac{M}{m} V$; $V_1 < 0$ „ *merge înapoi.*

Închei această interesantă problemă prin închinarea unui gând pios autorului ei, regretatul COMANDOR I. LINTEȘ dispărut atât de timpuriu dintre noi.

ALEXANDRU STOENESCU.

La această problemă s'au primit bune soluții parțiale dela d-nii: MIHAI R. CONSTANTINESCU (Politehnica București), TIGRAN DIMITRIU, EMIL I. CONSTANTINESCU și D. CIOC.

PROBLEMA 6200. *Să se rezolve în numere întregi ecuația*

$$x^2(x+1) = 3z - y.$$

MAIOR C. IONESCU-ȚIU.

Soluții bune date de d-rele FRANCESCA D. RALLET (Școala Centrală, București), SANDA M. HANGAN (Lic. „I. H. Rădulescu", București) și d-nii I. C. UDREA (Lic. militar Craiova), D. I. CRĂCEA, VIRGIL G. CONSTANTINESCU, VAL. STANCIU, AD. EFTODE, GEORGE M. NICOLAE și IULIAN CĂPRARU (Lic. militar Craiova), A. DONEAUD (Lic. Titu Maiorescu, București), ION T. MUNTEANU, CONST. CORDUNEANU (Colegiul militar „N. Filipescu", Predeal), P. P. TEODORESCU (Lic. „Matei Basarab", București), SOFRONIE I. ȘTEFĂNESCU (Lic. Armatei, Timișoara) și S. M. PUȘCAȘU (Timișoara).

Ecuația se mai poate scrie $y = 3z - x^2(x+1)$ care dă expresia valorilor lui y în numere întregi, x și z fiind întregi oarecare.

Dacă exprimăm pe z în funcție de x și y avem:

$$z = \frac{x^3 + x^2 + y}{3}.$$

şi considerând pe x de formele $3n$, $3n+1$ şi $3n-1$ pentru ca z să fie întreg, rezultă pentru y formele $3m$, $3m+1$ şi $3m$, iar pentru z valorile respective:

$$x_1 = 3n \quad ; \quad y_1 = 3m \quad ; \quad z_1 = 9n^3 + 3n^2 + m$$

$$x_2 = 3n+1 \quad ; \quad y_2 = 3m+1 \quad ; \quad z_2 = 9n^3 + 12n^2 + 5n + m + 1$$

$$x_3 = 3n-1 \quad ; \quad y_3 = 3m \quad ; \quad z_3 = 9n^3 - 6n^2 + n + m$$

n şi m fiind întregi oarecare.

C. I. Ţ.

EXERCIŢII

8. *Să se găsească*

$$E = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1 - x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n}}{1 + y \operatorname{tg} \frac{\beta}{n}} \right]^n .$$

MIRCEA D. POPA.

R. Avem

$$E = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n} + y \operatorname{tg} \frac{\beta}{n}}{1 + y \operatorname{tg} \frac{\beta}{n}} \right]^n = e^{-\lim\limits_{n\to\infty} n \frac{x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n} + y \operatorname{tg} \frac{\beta}{n}}{1 + y \operatorname{tg} \frac{\beta}{n}}}$$

$$= e^{-\frac{x \lim\limits_{n\to\infty} n \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n} + y \lim\limits_{n\to\infty} n \operatorname{tg} \frac{\beta}{n}}{1 + y \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg} \frac{\beta}{n}}} .$$

Însă

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n} = \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{n}}{\frac{\alpha}{n}} = \alpha .$$

$$\therefore \quad E = e^{-(\alpha x + \beta y)} .$$

Exerciţiul este generalizarea problemei 11 din *Probleme de Analiză Matematică* de GH. TH. GHEORGHIU.

PROBLEME PROPUSE

6411. Să se arate că expresiunea

$$E = 5^{5n+10} + 2 \cdot 7^{5n+5} + 5^{3n+5} \cdot 7^{4n+5} + 2 \cdot 5^{2n+5} \cdot 7^{n}$$

se divide prin 1947, oricare ar fi valoarea întreagă și pozitivă a lui n.

M. SARIAN.

6412. Să se taie laturile AB și AC ale unui triunghiu ABC în punctele D și E, cu o paralelă la BC așa încât

$$BD + EC = m \cdot DE.$$

G-L GH. BUICLIU.

6413. Punctele A, B, C, D fiind situate pe același cerc, să se construiască patrulaterul complet ABCDEF când se dau cercurile circumscrise triunghiurilor AED și AFB, și unul din vârfurile E, F.

ALEXANDRU MORAITE.

6414. Fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor triunghiului ABC înscris în cercul (O), iar K punctul lui LEMOINE. Dreptele A_1K, B_1K, C_1K întâlnesc razele OA, OB, OC în punctele H_a, H_b, H_c. Să se arate că:

1°. Paralelele duse prin H_a, H_b, H_c la BC, CA, AB determină pe laturile triunghiului ABC șase puncte situate pe un cerc (ω).

2°. Cercul (ω) este ortogonal cercurilor exînscrise triunghiului $H_a H_b H_c$.

EMIL E. MARINESCU.

6415. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$u + v + w = a_0,\ ux + vy + wz = a_1,\ ux^2 + vy^2 + wz^2 = a_2,$$
$$ux^3 + vy^3 + wz^3 = a_3,\ ux^4 + vy^4 + wz^4 = a_4,\ ux^5 + vy^5 + wz^5 = a_5.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6416. Să se rezolve ecuația

$$\sin 3x + \cos 3x = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

I. ST. TEODORESCU, Ploești.

6417. Să se arate că dacă $0 < r < 1$, avem:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) r^k \cos k\varphi = \frac{1 - 2r\cos\varphi + r^2\cos 2\varphi}{(1 - 2r\cos\varphi + r^2)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) r^k \sin k\varphi = \frac{2r\sin\varphi(1 - r\cos\varphi)}{(1 - 2r\cos\varphi + r^2)^2}.$$

EUGEN WEGENER.

6418. P fiind un punct mobil pe cercul de diametru AA', se notează cu M şi N intersecţiile cercului de diametru $\overline{AP}$ cu tangenta în P la primul cerc şi cu AA'. Să se arate că M şi N sunt simetrice faţă de AP şi că locul lui N este o cardioidă tangentă tot timpul cercului de diametru $\overline{AP}$.

CEZAR N. BOERESCU.

6419. Se dă o dreaptă (Δ) în planul axelor perpendiculare Ox, Oy şi se consideră parabolele care au pe (Δ) ca axă şi trec prin origină. Fiecare din aceste parabole mai taie axele de coordonate în câte un punct. Să se determine înfăşurătoarea dreptei care trece prin aceste două puncte.

CONSTANTIN CORDUNEANU.

6420. Să se calculeze integralele:

$$I_{1,2} = \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 \pm \sin 2x}}$$

$$I_{3,4} = \int \frac{dx}{\cos x \sqrt{1 \pm \sin 2x}}.$$

A. I. VARGĂ.

ERATĂ. 1°. In enunţul exerciţiului 25 publicat la pag. 324, Vol. LII se înlocueşte « *... k este o constantă cuprinsă între* -1 *şi* $+1$ » prin « *k fiind* > 1 *sau* < -1 ».

De asemeni se şterge dublul semn $\pm$ dela acelaşi exerciţiu atât la pag. 324 cât şi la pag. 325.

2°. Ultimii 3 termeni ai primei ecuaţii din problema 6403, propusă în numărul precedent se rectifică înlocuindu-i prin: $50p^3x^2 + 25p^4x + q$.

3°. Erata dela pag. 160, numărul precedent se anulează.

Până la sfârșitul lunii precedente, s'au primit și reținut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Andronescu N. L. (6074, 88, 296, 315, 31, 78, 94); *Boerescu I. N. C.* (5129, 6308, 10, 1, 22, 33, 43, 9, 78, P); *Columbeanu D. P.* (6332, 40, 71, P); *Constantinescu R. M.* (6254, 310, 23, 7, 86, 8, 94, N, E); *Constantinescu G. Virgil* (5765, 6074, 88, 287, 315, 43, 59, 61, 78, 86, 94, N, P); *Crăciunescu E.* (P); *Dănilă T.* Ing. (N); *Diaconu C. C.* (P); *Dodu A. E.* (6281); *Eftode M. Ad.* (6372, 8, 80); *Enescu G.* (6322); *Filimon Fl. I.* (6271, 90, 314, 31, 40, 50, 4, 62, 5, 72, 8, 86, E, P); *Marinescu E. E.* (P); *Neguț A. I.* (E, P); *Popa D. M.* (3681, 844, 4866, 928, 40, 9, 5111; 77, 448, 521, 664, 707, 9, 864, 952, 6014, 58, 81, 388, 405, P, C); *Pușcașu M. Silviu* (6176, 200, 33, 87, 331, 50, 4, 78, 86); *Soare V. M.* (5598, 624, 87); *Teodorescu P. P.* (5764, 839, 46, 951, 88, 6012, 135, 245, 325, 88, E, P, N); *Théboult V.* (P); *Udrea C. I.* (6378, 80).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus, de **geometrie**, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerație.*

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor redija în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela «*Gazeta Matematică*».

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenții cari cer informații sau diverse lămuriri în scris, sunt rugați a însoți cererea și de o carte poștală sau mărci poștale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate, cu preţul de 800 lei volumul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—X, XII, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

XI. Gazeta Matematică 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100

XIII. I. Ionescu, *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 500

XIX. V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 150

XX. I. I. Chiţulescu. *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 180

XXI. M. Ghermănescu, *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . Lei 500

XXII. G. Ţiţeica, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* Lei 250

XXIII. Gazeta Matematică 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 100

XXIV. A. G. Ioachimescu, *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.500

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* Euclid. (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de V. Marian . Lei 320

II. *Elementele lui* Euclid. (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de V. Marian . . . . . Lei 400

III. *Elementele lui* Euclid. (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de V. Marian . Lei 200

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 100

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* Lei 250

PENTRU BIBLIOTECI ŞI AUTORITĂŢI TOATE PREŢURILE SE TRIPLEAZĂ

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LIII abonamentele sunt:

Pentru profesori, studenţi şi elevi. . . . . Lei 480

Pentru autorităţi şi biblioteci . . . . . Lei 1.500

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1947 la 1 Iunie 1948 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este:

Pentru profesori, studenţi şi elevi . . . . . Lei 180

Pentru autorităţi şi biblioteci . . . . . Lei 400

Abonamentele se pot plăti la cont CEC Nr. 26220 sau se pot trimite unde se trimite şi corespondenţa, pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 42.916.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIII

NUMĂRUL 4. — DECEMBRIE 1947

SUMARUL

1. Asupra unor noui funcțiuni transcendente. *V. Vâlcovici.*
2. Asupra curbelor anarmonice plane . . . *N. N. Mihăileanu.*
3. Raport pentru acordarea premiului de „Istoria Matematicii" în 1947 . . . *Comisiunea pentru premii.*
4. Note matematice: 11—13.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2586, 4928, 4969, 5110, 5127, 6043, 6148, 6176.
10. Exerciții: 9—15.
11. Probleme propuse: 4393, 6421—6430.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAȚIONALA

1947

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti, (Casa „*Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **N. Georgescu-Roegen**, Licenţiat în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier) şi Ing. **D. Stan** (Locţiitor de casier).

Următoarele şedinţe ale Soc. „*Gazeta Matematică*":
Marţi 30 Decembrie ora 17: Adunarea materiei pentru Nr. 5.
Marţi 6 Ianuarie 1948 ora 17: Facerea copertei pentru Nr. 5.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1947 sunt indicate în tabla de materii a volumului LII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **63**91, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **4**00, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimerei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La «*Gazeta Matematică*» se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . . „ 150
— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a «*Gazetei Matematice*» . . . . . „ 500

ASUPRA UNOR NOUI FUNCȚIUNI TRANSCENDENTE

In articolul: „*O clasă de funcțiuni transcendente întregi*“ [1] d-l N. CIORĂNESCU se ocupă de funcțiunea

$$\varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{s^n}\right), \quad |s| > 1,$$

care satisface ecuația funcțională

$$\varphi(sz) = (1 + z)\,\varphi(z).$$

Ocupându-mă de ecuații funcționale de un tip mai general ca al acesteia (și de care va fi vorba într'o lucrare mai întinsă) am dat peste funcțiunea

$$\varpi(z) = \varpi_1(z)\,\varpi_2(z),$$

unde am pus

$$\varpi_1(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{s^n}\right), \quad \varpi_2(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{s^n z}\right).$$

Legătura între $\varpi_1(z)$ și $\varphi(z)$ este evidentă

$$\varpi_1(z) = (1 + z)\,\varphi(z).$$

Din cauza acestei legături am crezut că unele proprietăți ale funcțiunilor $\varpi_1(z)$, $\varpi_2(z)$, $\varpi(z)$ ar putea prezenta oarecare interes pentru cei ce au luat cunoștință de articolul d-lui N. CIORĂNESCU. Proprietățile de care e vorba fac parte din lucrarea mai completă ce va apare ulterior.

Se vede că $\varpi_2(z)$ este o funcție întreagă de $\frac{1}{z}$ (având deci punctul $z = 0$ ca punct singular esențial). Cele două funcțiuni $\varpi_1(z)$ și $\varpi_2(z)$ verifică identitățile

$$\varpi_1(sz) = (1 + sz)\,\varpi_1(z),$$

$$\varpi_2(sz) = \frac{sz}{1 + sz}\,\varpi_2(z),$$

$$\varpi_1(z) = 1 + z\varpi_2\left(\frac{1}{z}\right).$$

1) G. M., anul LIII (1947), pag. 133—135.

Multiplicând între ele primele două relații membru cu membru, obținem

$$\varpi(sz) = sz\varpi(z) \quad \text{sau} \quad \frac{\varpi(sz)}{sz} = z\frac{\varpi(z)}{z},$$

adică funcțiunea

$$\psi(z) = \frac{\varpi(z)}{z} \tag{1}$$

este o soluție a ecuației funcționale în $\psi(z)$

$$\psi(sz) = z\psi(z). \tag{2}$$

Această ecuație a fost considerată de d-nii CARMICHAEL [1] și MASON [2]. Incercând a-i determina o soluție prin mijlocirea unei anumite substituții, ei au dat peste o funcțiune *neuniformă*.

Soluția (1) pe care am aflat-o mai sus are avantajul asupra unei eventuale soluții CARMICHAEL—MASON că este o funcțiune analitică *uniformă*, olomorfă în tot planul, afară de punctele $z = 0$, $z = \infty$ care sunt puncte singulare esențiale pentru $\psi(z)$.

Am putea cerca să determinăm direct o soluție a ecuației (2), olomorfă în tot planul, cu excepția celor două puncte (zero și ∞), atribuindu-i o desvoltare în serie LAURENT

$$t(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n. \tag{3}$$

Introducând această formă în ecuația (2) obținem imediat valoarea coeficienților

$$a_n = a_0 s^{\frac{-n(n+1)}{2}}. \tag{4}$$

Constanta a_0 rămâne arbitrară, ceea ce era evident a priori, deoarece dacă $\psi(z)$ este o soluție a ecuației (1) atunci și $C\psi(z)$ va fi o soluție, C fiind o constantă arbitrară.

---

1) *The general Theory of linear q-differential equations.* Amer. J. of. math. XXXIV (1912) p. 147—168.

2) *On properties of the solutions* ... Amer. J. of. Math. XXXVII (1915), p. 439—444.

Seria (3) cu coeficienții (4) este absolut și uniform convergentă în tot planul, cu excepția punctelor $z = 0$, $z = \infty$. Luând $a_0 = 1$, transcendenta $t(z)$ va avea forma

$$t(z) = G(z) + \frac{1}{z} G\left(\frac{1}{z}\right),$$

unde

$$G(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{s^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

este o funcțiune întreagă de z. Ea satisface relația

$$G(sz) = 1 + zG(z).$$

Transcendenta $t(z)$ verifică identitatea

$$t\left(\frac{1}{z}\right) = zt(z); \tag{5}$$

ea joacă un rol important în teoria ecuațiilor funcționale, cum se va vedea în lucrarea pe care am anunțat-o.

Am găsit astfel două soluții pentru ecuația (2): una este $\frac{\omega(z)}{z}$ iar alta $t(z)$. Ce relație există între ele?

Pentru a determina această relație vom începe prin a observa că raportul dintre cele două soluții va fi o soluție a ecuației în $f(z)$

$$f(sz) = f(z). \tag{6}$$

Pe de altă parte identitatea

$$t(sz) = zt(z)$$

ne dă prin iterație

$$t(s^n z) = s^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n t(z),$$

n fiind un număr întreg oarecare, pozitiv sau negativ. Cum din (5) scoatem $t(-1) = 0$, identitatea precedentă ne spune că $t(z)$ se anulează în punctele $z = -s^n$, n fiind un întreg oarecare, pozitiv, negativ sau zero.

Să observăm în treacăt că scriind $t(-s^p) = 0$, p întreg pozitiv sau negativ, obținem identitățile

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s^{\frac{-n(n+1)}{2} + p} = \frac{1}{s^p} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s^{\frac{-n(n+1)}{2} - p}$$

care de altfel se pot demonstra și direct.

Funcţiunea $\varpi(z)$ are evident numai zerourile simple $z = -s^n$ şi este olomorfă în tot planul, cu excepţia celor două puncte amintite. Deducem că raportul

$$t(z) : \frac{\varpi(z)}{z}$$

este o funcţie olomorfă în tot planul (eventual cu excepţia punctelor 0 şi ∞). Insă singura soluţie a ecuaţiei (6) îndeplinind condiţia menţionată de olomorfie este o constantă. Demonstraţia acestei teoreme iese din cadrul şi din spaţiul ce ni-l oferă G. M. Cetitorul o va putea găsi în lucrarea completă ce va apare ulterior.

Aşa dar, vom putea scrie

$$t(z) = C\frac{\varpi(z)}{z} \quad , \quad C = \text{const.}$$

Valoarea constantei C se poate determina făcând, spre pildă, $z = 1$ în relaţia precedentă. Obţinem astfel

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{\cdot}^{\frac{n(n+1)}{2}} \Big/ \prod_{n=1}^{\infty} (1+\mu_{\cdot}^{n})^2 \quad , \quad \mu_{\cdot} = \frac{1}{s}.$$

V. VÂLCOVICI.

ASUPRA CURBELOR ANARMONICE PLANE

1. Considerăm ecuaţia diferenţială lineară de primul ordin

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)\,dx + (a_2 x + b_2 y + c_2)\,dy = 0. \qquad (1)$$

Dacă $a_2 = b_1$, ecuaţia (1) reprezintă o familie de *conice*. Dacă $a_2 \neq b_1$, procedeul obişnuit de integrare, că ecuaţia reductibilă la forma omogenă, duce la curbe (C) care sunt *proiectiv echivalente*[1] cu *parabola generalizată*, *exponenţiala* şi *spirala logaritmică*, de ecuaţii

$$y = x^k \ , \ y = e^x \ , \ r = e^{\theta}. \qquad (2)$$

1) Adică se deduc din curbele (2) prin transformări proiective

$$x' = \frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}, \ y' = \frac{a''x + b''y + c''}{a'x + b'y + c'}.$$

Aceste curbe se numesc *anarmonice* sau *curbe* W [1].

***

2. Proprietatea comună conicelor şi curbelor anarmonice o constitue verificarea ecuaţiei (1). Geometric, ecuaţia (1) exprimă proprietatea că *între panta t a tangentei într'un punct* M *al unei curbe anarmonice* (C) *şi panta m a razei* OM (O, punct fix) *avem o relaţie omografică.*

$$Amt + Bm + Ct + D = 0, \qquad (3)$$

A, B, C, D fiind constante; luând originea în O, deci $m = y : x$ şi $t = dy : dx$, relaţia (3) se poate aduce la forma (1')

$$(Dx + By)\,dx + (Cx + Ay)\,dy = 0. \qquad (1')$$

In cazul conicelor (B = C), relaţia omografică (3) se reduce la o involuţie.

3. Vom studia curbele anarmonice (C), plecând dela relaţia (3). In primul rând se observă că o astfel de curbă este formată numai din puncte ordinare, fiindcă fiecărui punct îi corespunde o singură tangentă. Punctele de intersecţie ale curbei (C) cu o dreaptă trecând prin O [2], au tangentele paralele şi reciproc. O altă consecinţă imediată a ecuaţiei (3) este

$$(m_1\, m_2\, m_3\, m_4) = (t_1\, t_2\, t_3\, t_4)$$

adică *raportul anarmonic al razelor a patru puncte este egal cu raportul anarmonic al tangentelor în aceste puncte.* In particular, fie m_0, m_∞, m_1, valorile corespunzătoare direcţiilor $t_1 = 0$, $t_2 = \infty$, $t_4 = 1$; avem atunci

$$(m_0\, m_\infty\, m\, m_1) = (0\ \infty\ t\ 1) = t;$$

deci H, V, B *fiind punctele curbei cu tangenta orizontală, respectiv verticală, paralelă cu bisectoarea întâia iar* M *arbitrar pe curbă, panta tangentei în* M *este egală cu raportul anarmonic al razelor* OH, OV, OM, OB.

---

1) Felix Klein şi Sophus Lie: Asupra curbelor plane invariante faţă de un sistem închis de transformări lineare permutabile, simplu infinite (*Mathematische Annalen*, IV, 1871, p. 50—84).

2) Vom numi *rază*, o dreaptă dusă prin O.

Numim *direcții asimptotice* ale curbei (C), direcțiile care coincid cu conjugatele lor; pantele lor sunt deci rădăcinile ecuației

$$Am^2 + (B + C)\, m + D = 0, \qquad (4)$$

de discriminant $\rho = (B - C)^2 - 4\,(AD - BC)$, deci *curba* (C) *are două direcții asimptotice;* fie u, v pantele lor adică valorile unite ale omografiei (3); avem atunci [1]

$$(u\, v\, m\, t) = \text{constant} = \omega^2. \qquad (5)$$

In particular, dacă tăiem fascicolul prin tangentă, obținem rezultatul: *tangenta în* M *la curba* (C) *taie razele asimptotice în* N *și* P *astfel ca*

$$\overline{MN} : \overline{MP} = \text{constant.} = \omega^2. \qquad (6)$$

Vom numi vârfuri ale curbei C, punctele în care raza și tangenta sunt perpendiculare; pantele lor sunt rădăcinile ecuației

$$Bm^2 + (D - A)\, m - C = 0; \qquad (7)$$

deci *curba* (C) *are două direcții de vârfuri.*

4. După semnul discriminantului ρ putem clasifica curbele (C) în: eliptice ($\rho < 0$), iperbolice ($\rho > 0$) sau parabolice ($\rho = 0$).

In primul caz, ecuația (4) se reduce la forma canonică $m^2 + 1 = 0$; deci $A = D$, $B + C = 0$; fie $A : B = k$; ecuația diferențială a curbelor se poate scrie

$$(y + kx)\, dx + (ky - x)\, dy = 0,$$

care se integrează direct, sub forma

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} + k\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = 0 \;\therefore\; -\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \frac{k}{2}\log(x^2 + y^2) = a$$

și în coordonate polare

$$r = ae^{\frac{1}{k}\theta}.$$

De altfel, din formula ce dă unghiul V al razei OM cu tangenta în M

$$\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'} = k, \quad \frac{t - m}{1 + mt} = k$$

și regăsim pentru spirala logaritmică, relația omografică (3).

---

1) Dacă $p = \dfrac{B - C}{\sqrt{AD - BC}}$ avem $\omega + \dfrac{1}{\omega} = p.$

Direcţiile asimptotice sunt isotrope, parametrul este $p = 2\cos V$ deci $\omega = e^{iV}$ şi (5) devine relaţia lui LAGUERRE

$$(u\,v\,m\,t) = e^{2iV}.$$

Pentru $k = \infty$ regăsim cercul $x^2 + y^2 = a^2$ şi transformatele lui afine, elipsele.

5. Curbele gen iperbolic, duc la o ecuaţie (4) de forma canonică $m = 0$ deci de direcţii asimptotice 0 şi ∞; avem $A = D = 0$; fie $B: C = -k$; omografia se reduce la o asemănare $t = km$, ceea ce conduce la ecuaţia diferenţială

$$ky\,dx - x\,dy = 0,$$

care dă prin integrare $y = Cx^k$ şi $\omega = \sqrt{k}$. Razele asimptotice sunt Ox, Oy; prima, tangentă în origine. Cazul $k = -1$ conduce la iperbole echilatere $xy = C$, echivalente afin cu iperbolele oarecare. Dar avem conice şi când $k = 2$ (dealtfel, o valoare permutată a raportului anarmonic), deci

$$p = \frac{k+1}{\sqrt{k}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

sau

$$2(B - C)^2 = 9(AD - BC). \qquad (8)$$

Deci, *ecuaţia* (1′) *reprezintă conice când* $B = C$ *sau când este satisfăcută condiţia* (8).

6. Al treilea tip, parabolic, are ca model $m^2 = 0$ deci direcţiile asimptotice confundate peste Ox; avem $B + C = 0$, $D = 0$; punem $A : B = k$ şi obţinem relaţia omografică

$$k\,m\,t = m - t$$

deci ecuaţia diferenţială

$$y\,dx = (x + ky)\,dy \quad \therefore \quad \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = k\frac{dy}{y}$$

sau, prin integrare

$$y = ae^{\frac{1}{k}\frac{x}{y}}$$

deci o transformată proiectivă a exponenţialei. Avem $\omega = 1$. Cazul $k = \infty$ conduce la $y = a$ care trebue privită ca dreaptă dublă.

***

7. Considerăm ecuația diferențială lineară omogenă cu coeficienți constanți

$$\frac{d^3y}{dt^3}+\alpha\frac{d^2y}{dt^2}+\beta\frac{dy}{dt}+\gamma y=0. \tag{9}$$

Se știe că curba pe care o atașăm acestei ecuații, prin metoda WILCZINSKI este o curbă anarmonică [1]. Vom clasifica aceste curbe după natura rădăcinilor ecuației caracteristice și vom verifica faptul că aceste curbe verifică ecuații diferențiale lineare de primul ordin.

8. Fie r_0, r_1, r_2 rădăcinile ecuației caracteristice, presupuse reale, distincte; obținem integralele

$$y_0=e^{r_0t}\ ,\ y_1=e^{r_1t}\ ,\ y_2=e^{r_2t}$$

și punem, după metoda WILCZINSKI

$$x_1=\frac{y_1}{y_0}=e^{(r_1-r_0)t}\ ,\ x_2=\frac{y_2}{y_0}=e^{(r_2-r_0)t} \tag{10}$$

și atașăm astfel, ecuației (9), curba (10) care se poate scrie, eliminând pe t

$$x_2=x_1^k\ ,\ k=(r_2-r_0):(r_1-r_0).$$

Eliminând pe t între diferențialele coordonatelor obținem

$$x_2\,dx_1=k\,x_1\,dx_2.$$

Dacă ecuația caracteristică are toate rădăcinile egale avem $x_1=t$, $x_2=t^2$ deci conica $x_2=x_1^2$ și $dx_2=2\,x_1\,dx_1$.

Dacă avem o rădăcină dublă $r_0=r_1\neq r_2$ obținem

$$x_1=t\ ,\ x_2=e^{ht}\ ,\ h=r_2-r_0$$

de unde $$x_2=e^{hx_1}\ ,\ dx_2=hx_2\,dx_1.$$

Dacă $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, avem

$$x_1=e^{lt}\cos\beta t\ ,\ x_2=e^{lt}\sin\beta t\ ,\ e=\alpha-r_0$$

ceea ce conduce la

$$r=e^{m\theta}\qquad m=l=\beta\quad\text{și}\quad(mx_1-x_2)\,dx_2=(mx_2+x_1)\,dx_1.$$

Regăsim astfel, toate rezultatele precedente.

N. N. MIHĂILEANU.

---

1) AL. PANTAZI: *Elemente de geometrie diferențială proiectivă curbelor și suprafețelor*, pag. 47.

RAPORT PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE „ISTORIA MATEMATICII“ IN 1947

Cu toate enormele greutăți pe care le întâmpină publicarea lucrărilor științifice, activitatea de „Istoria Matematicii“ s'a menținut cu mult succes în anul 1946—47. In acest timp s'au publicat mai multe studii, articole și note, cu privire la „Istoria Matematicii“.

Printre autorii care s'au dovedit cei mai eruditi în acest domeniu, însemnăm pe d-l Prof. D. MANGÉRON dela Politehnica GH. ASACHI din Iași. In ultimul an d-sa a publicat trei studii și zece notițe mai scurte de „Istoria Matematicii“ atât în *Gazeta Matematică*, cât și în alte periodice, ca, de exemplu, *Revista Științifică V. Adamachi* din Iași.

A folosit toate ocaziile aniversare pentru a da expuneri asupra anumitor epoce din trecutul matematicii universale: Școala galileiană, LEIBNIZ, MONGE, G. GABIS, BESSEL, MITTAG LEFFLER, MACLAURIN. Notele sale instructive, *Acum o sută de ani în lumea matematică*, pe care le publică de mulți ani în *Gazeta Matematică*, sunt bine cunoscute și apreciate.

Socotim că această activitate entuziastă, tenace și folositoare cititorilor, merită să fie recunoscută cu toate laudele și de aceea propunem ca premiul de „Istoria Matematicii“ pe 1947 să fie acordat d-lui Prof. DEM. I. MANGÉRON.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE „ISTORIA MATEMATICII“

Ing. I. S. ANTONIU, Lt.-Col. EUGEN ST. IACOB și Prof. PETRE SERGESCU.

Acest raport a fost aprobat în Adunarea generală din 26 August 1947.

NOTE MATEMATICE

11. *Un sistem diofantian.* Ne propunem a rezolva sistemul

$$x^2+y^2+z^2=u^3 \quad (1) \quad ; \quad x+y+z=v^3. \quad (2)$$

Pentru (1) avem

$$x=f(f^2+g^2-3h^2) \quad ; \quad y=g(f^2+g^2-3h^2)$$
$$z=h(3f^2+3g^2-h^2) \quad ; \quad u=f^3+g^2+h^2.$$

Ecuaţia (2) dă condiţia

$$f^3 + f^2(g + 3h) + f(g^2 - 3h^2) + g^3 + 3g^2h - 3gh^2 - h^3 = v^3.$$

Dacă $v = f + \lambda$, avem:

$$f^2(g + 3h - 3\lambda) + f(g^2 - 3h^2 - 3\lambda^2) + g^3 + 3g^2h - 3gh^2 - h^3 - \lambda^3 = 0.$$

Punând acum

$$3\lambda = g + 3h$$

va rămâne o ecuaţie lineară în f.

Se obţine astfel o infinitate de soluţii în funcţie de 2 parametri arbitrari g şi h.

Exemple numerice. $g = 1$, $h = 3$, $\lambda = \frac{10}{3}$, $f = -\frac{1094}{801}$

$$x = 16940360260 \quad , \quad y = -12403316790 \quad , \quad z = -622612494,$$

$$u = 7612846 \quad , \quad v = 1576.$$

A. GLODEN (Luxembourg).

12. *Asupra problemei 3366.* Problema 54, Cap. IV din *Culegere de probleme de geometrie* de G. ŢIŢEICA, problemă care este reprodusă după problema 3366 propusă de d-l G-L GH. BUICLIU şi rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXII, pag. 70, îmi sugerează o nouă demonstraţie a teoremei lui PASCAL.

Enunţul citatei probleme a d-lui G-L GH. BUICLIU este:

„*Fie* ABCD *un patrulater inscriptibil, în care* A *şi* C *sunt două vârfuri opuse;* A_d *intersecţia perpendicularei în* A *pe* AD *cu* BC *şi* A_b *intersecţia perpendicularei în* A *pe* AB *cu* CD. *Să se demonstreze ca* $A_b A_d$ *trece prin centrul cercului circumscris patrulaterului* ABCD".

Fie M *şi* M′ *două puncte omoloage situate în planul a două triunghiuri asemenea* ABC *şi* A′B′C′ *şi* M_1 *punctul de întâlnire al cevienelor izogonale ale dreptelor* A′M′, B′M′ *şi* C′M′. E clar că în acest caz *unghiurile* MAB *şi* M_1A′C′ *sunt egale.* Să considerăm acum cazul particular, când vârfurile A şi A′ coincid şi când punctele C′ şi B′ sunt aşezate respectiv pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC. Unghiul pe care dreapta MA îl formează cu AB fiind egal cu unghiul pe care M_1A îl formează cu AC′, rezultă că *punctele* A, M *şi* M_1 *sunt colineare.*

In acest caz, dreptele MB şi M_1B' se rotesc ambele în acelaşi sens în jurul punctelor B şi B', ca ele să se suprapună dreptelor, pe care se găsesc segmentele BC şi B'A. De asemenea şi dreptele MC şi M_1C' trebuie să fie rotite în acelaşi sens şi cu un acelaşi unghiu în jurul punctelor C şi C', ca ele să se suprapună dreptelor, pe care se găsesc segmentele CA şi C'B'.

Dar punctele B, C, B' şi C' sunt conciclice. Punctul D de intersecţie a dreptelor BM şi $B'M_1$ şi punctul E de intersecţie a dreptelor CM şi $C'M_1$ se găsesc şi ele pe cercul ce trece prin punctele B, C, B' şi C'. Într'adevăr din egalitatea unghiurilor MBC şi din $\sphericalangle M_1B'A = \sphericalangle DB'C$, rezultă că patrulaterul BCDB' este inscriptibil. Aceeaşi demonstraţie şi pentru patrulaterul C'ECB'.

Rezultă deci următoarea demonstraţie a teoremei lui PASCAL:

Fie BDB'CEC' *şase puncte situate pe un cerc şi* A *punctul de intersecţie al dreptelor* BC' *şi* B'C. *Notăm cu* M *intersecţia dreptelor* BD *şi* CE *şi cu* M_1 *intersecţia dreptelor* B'D *şi* C'E. Triunghiurile ABC şi AB'C' sunt asemenea, iar punctele B' şi C' sunt situate respectiv pe laturile AC şi AB. Patrulaterele BCDB' şi B'C'EC sunt inscriptibile, deci dacă rotim dreptele MB şi M_1B' în acelaşi sens şi cu acelaşi unghiu în jurul punctelor B şi B', ele se vor suprapune dreptelor, pe care se găsesc segmentele BC şi AB'. De asemenea şi dreptele MC şi M_1C' rotindu-se cu acelaşi unghiu şi în acelaşi sens în jurul punctelor C şi C' se vor suprapune dreptelor, pe care se găsesc segmentele CA şi B'C'. Rezultă deci că *în triunghiul* AB'C' *punctul* M_1 *este izogonalul omologului punctului* M *din triunghiul* ABC.

Triunghiurile ABC şi A'B'C' fiind asemenea, deducem din cele de mai sus, că *punctele* A, M *şi* M_1 *sunt colineare*, deci *punctele de intersecţie ale laturilor opuse ale unui exagon înscris într'un cerc sunt colineare.*

MARIA NEUMANN.

13. *Forma remarcabilă a unor ecuaţiuni.* Forma ecuaţiilor care au ca rădăcini puterile rădăcinilor unei ecuaţii dată de d-l MIRCEA ADAM în G. M., Vol. LII, pag. 216 nu este decât rezultatul eliminării lui x dintre ecuaţiile

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

$$\varphi(x) \equiv x^m - y = 0$$

prin metoda lui SYLVESTER, ceea ce se poate obține rapid aplicând procedul clasic al acestei metode, adică considerând sistemul de ecuații:

$$x^{m-1} f(x) = 0 \quad ; \quad x^{m-2} f(x) = 0; \ldots f(x) = 0$$
$$x^{n-1} \varphi(x) = 0 \quad ; \quad x^{n-1} \varphi(x) = 0; \ldots \varphi(x) = 0$$

ca un sistem de $(m+n)$ ecuații lineare cu următoarele $(m+n-1)$ necunoscute: x^{m+n-1}, $x^{m+n-2}, \ldots, x^2, x$, ca să fie compatibil trebue să aibă determinantul coeficienților egal cu zero. Se obține ecuația

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \ldots . 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots . 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \ldots . a^n \\ -1 & 0 & 0 & y & 0 \ldots . 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & y \ldots . 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots . y \end{vmatrix} = 0$$

dată în nota citată.

I. B. FLORESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITEHNICA DIN BUCUREȘTI. FACULTATEA DE CHIMIE INDUSTRIALĂ

Concursul de admitere Octombrie 947. Proba scrisă la Fizică.

1. Un balon sferic de 10 m diametru este construit dintr'un material care cântărește 0,250 kgr pe m².

Să se calculeze proporțiile la sută în volume ale unui amestec de hidrogen și aer uscat, la 0° și 760 mm presiune, cu care trebue umplut acest balon pentru ca să poată ridica 50 kgr în atmosferă unde se admite că există aceleași condițiuni, adică tot 0° și 760 mm presiune.

Un litru de aer, în condițiile de mai sus, cântărește 1,293 grame, iar densitatea hidrogenului este 0,069.

II. Să se determine coeficientul de dilatare K al unei sfere metalice de densitate d, care cântărește p grame în vid. Introdusă într'un lichid de densitate la 0° egală cu d' și care are un coeficient de dilatare α, pierde la temperatura t, p' grame din greutatea sa.

Se dă pentru $p = 5000$ gr.; $d = 7{,}8$; $p' = 542$ gr.; $d' = 0{,}87$; $t = 25°$ și $\alpha = 117.10^{-5}$.

III. O lentilă convergentă, fără grosime, şi o oglindă convexă au aceeaşi distanţă focală şi sunt aşezate pe acelaşi ax principal. Oglinda convexă este aşezată cu suprafaţa reflectoare în focarul imagină al lentilei şi îndreptată spre lentilă. Se cere:

1°. Să se construiască imaginea definitivă A'B' a unui obiect AB (B pe axul principal) aşezat în faţa lentilei.

2°. Să se arate că această imagine A'B' este simetrică cu AB faţă de un punct P de pe ax, care este imaginea centrului O al oglinzii prin lentilă.

IV. Un circuit electric conţine o forţă electrometrice, un ampermetru şi un voltametru cu sulfat de cupru care are electrozi de cupru. Se cere:

1°. Intensitatea curentului care trece prin circuit corespunzătoare unei diviziuni când ampermetrul arată 25 diviziuni, iar voltametrul depune 0,2965 grame de cupru pe oră. Se ştie că 1 amper depune 0,0003294 grame de cupru pe secundă.

2°. Punând o rezistenţă de 20 ohmi în derivaţie la bornele ampermetrului, derivaţia acului său nu este decât de 21,7 diviziuni, iar depunerea de cupru este de 0,8976 grame pe oră.

Care este rezistenţa ampermetrului?

CHESTIUNI DE SINTEZĂ

A. Mişcarea oscilatorie în Fizică.

B. Efectul căldurii asupra materiei.

Sunt obligatorii: Două probleme şi o chestiune de sinteză *la alegere.*

BIBLIOGRAFIE

Analele Româno-Sovietice. Vol. II. Nr. 7. Septembrie-Octombrie 1947 cu un *Supliment economic.*

Buletinul Politehnicii „Gh. Asachi" din Iaşi. Tomul 2. Fascicola 1. Ianuarie-Iunie 1947. A. WINTNER: Arithmetically monotone sequences. H. T. R. AUDE: The pattern for the distribution of the numbers c when the diophantine equation $ax + by = c$. OCT. MUNTEANU: Applications du problème de prolongement d'un système associatif dénombrable. AD. HAIMOVICI: Sur une certaine déformation des congruences de courbure nulle. STEFANIA RUSCIOR: Sur une certaine correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces cerclées. I. CREANGĂ: Sur une famille de transformations entre deux surface reglées MENDEL HAIMOVICI: Sur les espaces des familles simplement transitives de transformations de variables à courbure de III-e espèce nulle. C. BORŞ: Sur les courbes concurrantes dans la géometrie centro-affine. ILIE POPA: Sur un théorème de géométrie élémentaire. AL. C. CLIMESCU: Notes d'analyse. D. I. MANGERON: Recherches sur les problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivés partielles d'ordre supérieurs. N. NEGOESCU: Sur une équation de récurrence triangulaire. H. HADWIGER: Multi-kongruenz

ebener Mengen und Pythagoreischer Lehrsatz. R. DEAUX: Sur trois homographies du plan de GAUSS. GH. CIOBANU: Sur une certaine surface reglée liée à une surface périsphère. C. P. BOGDAN: Sur les surface lieu de coniques. Urmează alte articole cu subiecte tehnice dar nematematice.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVII. Nr. 9. Noembrie 1947. E. VIŞA: Asupra unor curbe universale. Note matematice. Chestiuni de examen. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 86 (*Gazeta Matematică*, XXVII, 240). Se întreabă ce se ştie despre studiile matematice ale lui VASILE ALEXANDRI, la Paris.

Iată ce găsim în *Istoria Literaturii Române* de GH. ADAMESCU (Biblioteca pentru toţi, editura „Viaţa Românească" la pag. 325):

„... acolo ALECSANDRI *s'a pregătit pentru examenul de bacalaureat în litere cu profesorul* COLTE *şi a trecut prin acest examen. S'a înscris şi a urmat câtva la medicină, dar n'a putut continua. A încercat dreptul şi apoi matematicele, dar nu a putut stărui nici în aceste direcţii; de aceea s'a întors la studiile literare ...".*

Deci nu poate fi vorba de studii matematice, ci numai de o încercare, chemarea bardului dela Mircesti fiind îndreptată în cu totul altă direcţie.

LT.-COL. E. ŞT. IACOB.

DIVERSE

Sporirea bibliotecii „Gazeta Matematică"

E. ABASON. Introduction à la théorie des variables et fonctions complexes. Donată de d-l N. N. MIHĂILEANU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2586. *In triunghiul* ABC *se dau punctele* A_1 *şi* A_2 *pe latura* BC, *iar* B' *şi* C' *pe* AC *şi* AB. *Dreptele* $B'A_1$, $B'A_2$ *taie pe* AB *în c şi c' iar* $C'A_2$, $C'A_1$ *pe* AC *în b şi b'. Să se arate că bc, b'c',* BC *sunt concurente.*

L. HAMBURGER.

Cum proprietatea de enunț este proiectivă, pentru demonstrare, este suficient să arătăm că ea este adevărată pentru una din transformatele ei omografice. In acest scop aplicăm figurei o omografie care să transforme dreapta B'C' în dreapta dela infinit a planului. Problema se reduce la a demonstra proprietatea: *prin două puncte* A_1, A_2 *situate pe latura* BC *a unui triunghiu se duc paralele cu celelalte două laturi* AB *și* AC *pe care le taie respectiv în punctele c, c' și b', b. Să re arate că dreptele bc, b'c' se întâlnesc pe* BC. In adevăr să presupunem că *bc* taie pe BC în M, iar *b'c'* în M'. Teorema lui MENELAUS ne dă

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\,\frac{\overline{b'C}}{\overline{b'A}}\,\frac{\overline{c'A}}{\overline{c'B}} = 1 = \frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}}\,\frac{\overline{bC}}{\overline{bA}}\,\frac{\overline{cA}}{\overline{cB}}$$

Dar

$$\frac{\overline{b'C}}{\overline{b'A}} = \frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{cA}}{\overline{cB}} \quad \text{și} \quad \frac{\overline{c'A}}{\overline{c'B}} = \frac{\overline{A_2C}}{\overline{A_2B}} = \frac{\overline{bC}}{\overline{bA}}$$

încât făcând simplificările ajungem la relația

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}},$$

adică punctele M și M' sunt confundate.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4928. *Să se găsească numerele întregi a căror sumă are ca rădăcină patrată diferența lor. Generalizare.*

I. C. SCHILERU-DILI.

Considerăm cazul general. Fie x, y două numere întregi pentru care

$$(x+y)^n = (x-y)^m = a$$

$$\therefore \qquad x+y = \sqrt[n]{a} \quad \text{și} \quad x-y = \sqrt[m]{a} \qquad (1)$$

$$\therefore \qquad x = \frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[m]{a}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[m]{a}}{2}.$$

Pentru ca x şi y să fie întregi, trebue ca atât $\sqrt[n]{a}$ cât şi $\sqrt[m]{a}$ să fie întregi, după cum rezultă din (1). Pentru aceasta trebue să avem

$$a = p^{kmn}$$

unde p şi k sunt numere întregi. Deci soluţia cazului general este

$$x = \frac{p^{km} + p^{kn}}{2} \quad , \quad y = \frac{p^{km} - p^{kn}}{2} \tag{2}$$

unde p şi k sunt parametri. Dacă m şi n sunt numere întregi atunci k este un întreg oarecare. Dacă ambele numere m şi n sau numai unul din ele este fracţionar, atunci se alege întregul k aşa în cât produsele km, kn să fie întregi, ceea ce este totdeauna posibil.

In cazul particular din prima parte a enunţului avem

$$n = \frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad m = 1$$

aşa că înlocuind în (2) şi făcând pe kn întreg se găseşte soluţia

$$x = \frac{p^t (p^t + 1)}{2} \quad , \quad y = \frac{p^t (p^t - 1)}{2}$$

p şi t putând avea ori ce valori întregi.

Notă. 1°. S'a primit o singură soluţie bună de la d-l MIRCEA D. POPA, care dă însă o generalizare mai restrânsă.

2°. In cazul particular s'ar putea considera şi eventualitatea rădăcinilor neexacte, cu alte cuvinte $x + y$ să nu fie patrat perfect. In acest caz problema revine la rezolvarea în numere întregi a neegalităţilor

$$x - y - 1 < \sqrt{x+y} < x - y.$$

sau altele, după gradul aproximaţiei ce se cere.

Pentru aceasta se poate consulta calea dată de I. IONESCU în articolele intitulate *« Neegalităţi în numere întregi »*, publicate în *Gazeta Matematică*, Vol. XVIII, pag. 81, 201 şi 241.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4969. *Fie* S *centrul de asemănare direct a două cercuri ortogonale din care unul* O_1 *de rază* 2R *şi altul* O_2 *de rază* R. *Se consideră un punct* M *mobil pe arcul lui* O_2 *interior lui* O_1 *şi fie* N *intersecţia lui* SM *cu arcul lui* O_1 *interior lui* O_2. *Perpendiculara în* M *pe* SM *taie pe* O_1 *în* B *şi* C. *Să se demonstreze că ortocentrul triunghiului* BNC *este fix şi că între unghiurile acestui triunghiu există relaţia:*

$$\sin^2 B + \sin^2 C + \sin^2 N = 1.$$

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de d-nii: ORIGEN MĂRCULESCU (Craiova) şi I. A. ILIE (student).

1°. Fie M' punctul în care SM întâlneşte a doua oară cercul O_1. Razele O_1M', O_2M fiind paralele avem

$$\frac{SM}{SM'} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Rezultă că M este mijlocul lui SM'. In triunghiul BNC dreapta SNM este înălţime, iar M' este pe cercul circumscris triunghiului BNC şi se ştie că intersecţia înălţimei NM cu cercul circumscris triunghiului BNC este un punct simetric al ortocentrului faţă de BC. Invers simetricul lui M' faţă de BC este ortocentrul triunghiului BNC. Ori faţă de (1) simetricul lui M' faţă de BC este punctul fix S. Proprietatea este adevărată pentru ori ce punct M de pe arcul lui O_2 interior lui O_1, chiar dacă cercurile O_1 şi O_2 nu sunt ortogonale.

2°. Cercurile O_1, O_2 fiind ortogonale şi având razele 2R, R avem

$$\overline{O_1O_2}^2 = 5R^2 \qquad (2)$$

Pe de altă parte se ştie că distanţa dela ortocentrul la centrul cercului circumscris unui triunghiu este dată de formula

$$\overline{HO}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \qquad (3)$$

In cazul problemei de faţă

$$\overline{HO}^2 = \overline{SO_1}^2 = 4\,\overline{O_1O_2}^2 = 20R^2.$$

Inlocuind în (3) pe HO prin SO_1, pe R prin 2R şi pe a, b, c respectiv prin 4RsinN, 4RsinB, 4RsinC se găseşte tocmai relaţia din enunţ.

Notă. 1°. Au rezolvat bine problema, însă pe căi mai lungi, d-nii: N. D. ŞTEFĂNESCU şi MIRCEA D. POPA.

2°. D-l D. RIPIANU a dat o bună soluţie prin geometria analitică.

3°. Triunghiul BNC din enunţul acestei probleme se bucură de proprietatea că are *aceeaşi suprafaţă cu triunghiul său ortic.* Asupra acestor triunghiuri speciale a se vedea problema 3785 rezolvată la pag. 464, Vol. XXXIX şi notele matematice ale d-lor R. GOORMAGHTIGH şi D. V. STOICA de la pag. 71 şi 404 Vol. XL.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5110. *Se consideră cercul* (O) *şi tangenta* Δ *într'un punct fix la acest cerc. Fie* N *punctul de contact al celei de a doua tangente la cercul* O *dusă dintr'un punct* M *de pe* Δ.

Se construeşte cercul (γ) *tangent în* M *la* Δ *şi trecând prin punctul* N. *Punctul* M *variind pe tangenta* Δ *se cere:*

1. *Să se stabilească între distanţa centrelor cercurilor* (O) *şi* (γ) *şi razele acestor cercuri o relaţiune. Consecinţă.*

2. *Locul geometric al centrului cercului* (γ).

ŞERBAN GHEORGHIU.

1. Fie A punctul de contact al tangentei Δ cu cercul (O), B proiecţia lui O pe Oγ şi P punctul diametral opus lui M pe cercul (γ). Punctele O, N şi P sunt coliniare, iar triunghiul OMP este isoscel fiind că are două înălţimi egale: MN = OB = MA. Rezultă că

$$OP = PM. \qquad (1)$$

Insemnăm cu r raza cercului (O) şi cu R raza cercului (γ). Din trapezul OAMP, cu unghiurile din A şi M drepte obţinem:

$$\overline{OP}^2 = 4R^2 = \overline{AM}^2 + (2R - r)^2$$

d, fiind distanţa dintre centrele cercurilor (P) şi (γ) avem evident

$$d^2 = \overline{AM}^2 + (R - r)^2.$$

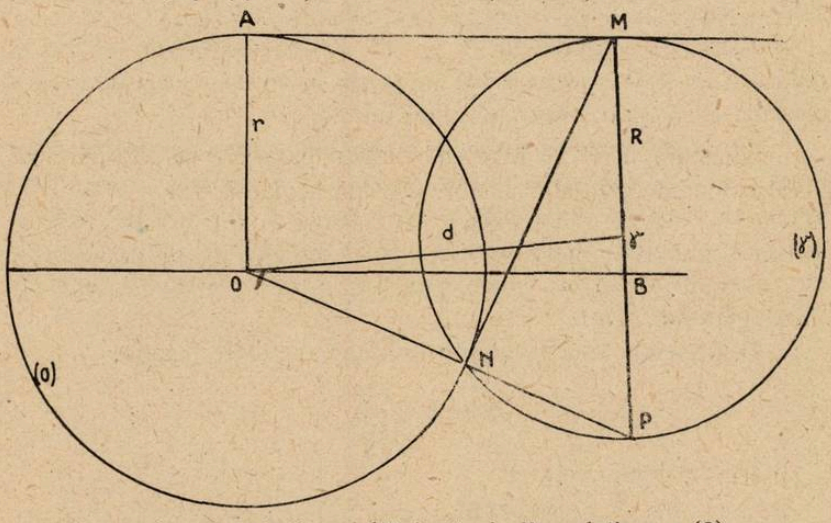
Eliminând pe $\overline{AM}^2$ se obţine:

$$d^2 = R^2 + 2Rr \qquad (2)$$

sau relaţiunea bine cunoscută a lui EULER, relativă la cercul circumscris şi cercurile exînscrise unui triunghiu.

Consecință. Fiind date un cerc (O) și un cerc (γ), *condițiunea necesară și suficientă ca să existe triunghiuri înscrise în cercul* (γ) *și circumscrise cercului* (O) *este ca tangenta la cercul* (O) *în unul din punctele comune să întâlnească cercul* (γ) *într'un punct astfel ca tangenta în acest din urmă punct la cercul* (γ) *să fie tangentă și cercului* (O).

Această consecință se deduce imediat din teorema generală a „închiderei" a lui PONCELET. Astfel admitem că există triunghiuri înscrise în cercul (γ) și circumscrise cercului (O). Teorema generală arată că dacă ducem dintr'un punct al cercului (γ) tangente la cercul (O), coarda determinată pe (γ) de aceste două tangente este de asemeni tangentă cercului (O). In particular, dacă punctul din care ducem tangentele coincide cu unul din punctele comune cercurilor (O) și (γ) obținem consecința enunțată.



Aceeași consecință rezultă însă și din relațiunea (2).

2. Relațiunea (1) arată că punctul M variind pe tangenta Δ, punctul P descrie o parabolă (ω) având focarul în O și dreapta Δ ca directoare.

Aflarea locului geometric al centrului cercului (γ) revine deci la următoarea problemă.

Se consideră un punct P *variabil pe o parabolă* (ω). *Se proiectează punctul* P *în* M *pe directoarea parabolei. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului* MP.

Vom rezolva această problemă într'un caz ceva mai general, căutând *locul punctelor* P_k *situate pe dreapta* PM *astfel ca:*

$$\overline{MP} = k\,\overline{MP_k}$$

k fiind un număr fix însemnăm cu (ω_k) locul căutat. Acest loc este evident o curbă algebrică. Observ că, o dreaptă arbitrară δ întâlneşte pe (ω_k) în *două puncte.* Pentru a dovedi aceasta, consider dreapta δ' astfel ca raportul anarmonic al fascicolului determinat de δ', δ, Δ şi paralela la axa parabolei dusă prin punctul comun dreptelor Δ şi δ să fie egal cu k. Dreapta δ' taie parabola (ω) în două puncte P' şi P''. Punctele P'_k şi P''_k corespunzătoare acestor din urmă puncte sunt intersecţiile lui (ω_k) cu δ. Rezultă că (ω_k) este o conică

Prin consideraţiuni de simetrie se găseşte imediat, că (ω_k) este o parabolă având aceeaşi axă ca parabola (ω).

Făcând ca punctele P' şi P'' să se confunde, rezultă că tangenta în P la parabola (ω) tangenta în P_k la parabola (ω_k) şi directoarea Δ sunt trei drepte concurente.

Se poate deduce de aci, o relaţiune între parametrii celor două parabole (ω) şi (ω_k). Intr'adevăr, fie t punctul comun tangentei în P la parabola (ω) cu directoarea Δ, p proiecţia lui P pe axă şi n punctul comun normalei în P cu axa parabolei (ω). Fie de asemeni, p_k şi n_k analoagele lui p şi n relative la punctul P_k al parabolei (ω_k).

Din asemănarea triunghiurilor npP şi tMP rezultă:

$$pn = P_p \cdot \frac{tM}{MP}.$$

De asemeni, avem:

$$p_k n_k = P_k p_k \frac{tM}{MP_k} \qquad \therefore \quad p_k n_k = k \,.\, pn.$$

Se ştie însă că într'o parabolă subnormala este egală cu parametrul. Deci parametrii parabolei (ω_k) şi al parabolei (ω), sunt în raportul k.

Cunoscând parametrul său, parabola (ω_k) poate fi uşor construită.

Se mai poate adăuga chiar, că parabola (ω_k) trece prin punctele comune parabolei ω cu directoarea Δ.

Revenind la problema noastră se obține că locul centrului cercului (γ) este o parabolă având axa OA, vârful la distanța $\frac{1}{4}\ r$ dela O spre A și parametrul egal cu r.

S'a primit o foarte bună soluțiune analitică dela d-l EUGEN N. WEGENER (București).

Alte soluțiuni dela d-nii: HORIA BODNĂRESCU, PAUL P. DRĂGHICESCU, ORIGEN MĂRCULESCU, SLT. GRIGORE MARTEȘ, AUREL POPA, MIRCEA D. POPA, ACHILLE V. PETRESCU, DUMITRU RIPIANU și ALEXANDRU ROHR.

PROBLEMA 5127. *Fie* M *un punct în planul unui triunghiu și* M_c *complimentarul său. Când* M_c *este echiparalelul lui* M? *(Pentru definiția punctelor echiparalele a se vedea G. M. XXXIII, 243).*

ION C. VASILIU.

Soluție dată de d-l EM. E. MARINESCU (student-ing. București).

Fie A_1, B_1, C_1 picioarele cevienelor concurente în M și A_2, B_2, C_2, intersecția paralelelor din M_c la AM, BM, CM, cu laturile corespunzătoare.

Notând cu A', M', M_c' și G' proiecțiile punctelor respective pe latura BC, putem scrie:

$$2\overline{M_c M_c'} + \overline{MM'} = 3\overline{GG'} = \overline{AA'} \qquad (1)$$

care exprimă că $2\overline{M_c G} = \overline{MG}$.

Din asemănarea a o serie de triunghiuri se deduce:

$$\frac{\overline{M_c M_c'}}{\overline{MM'}} = \frac{\rho}{\overline{MA_1}} \quad (2) \quad \text{și} \quad \frac{\overline{AA'} - \overline{MM'}}{\overline{MM'}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MA_1}} \qquad (3)$$

unde: $\rho = \overline{M_c A_2} = \overline{M_c B_2} = \overline{M_c C_2}$

din (1), (2) și (3) scoatem:

$$\overline{AM} = 2\rho = \overline{BM} = \overline{CM}.$$

Rezultă că M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar M_c, complimentarul său, centrul cercului lui EULER.

Se poate da şi o soluţie analitică simplă. Dacă

$$M(\alpha, \beta, \gamma) \ , \ M_c(\beta+\gamma \ , \ \gamma+\alpha \ , \ \alpha+\beta)$$

sunt coordonatele baricentrice ale punctelor în cauză, condiţia de echiparalelism traducându-se prin coordonatele baricentrice ale lui M_c $(1/\overline{AA_1}, 1/BB_1, 1/CC_1)$, această condiţie se scrie:

$$(\beta+\gamma)\ \overline{AA_1} = (\gamma+\alpha)\ \overline{BB_1} = (\alpha+\beta)\ \overline{CC_1}$$

ultima egalitate se scrie apoi, după ce izolăm factorul $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$:

$$(b^2 - c^2)\ \alpha + a^2\beta - a^2\gamma = 0.$$

Se deduce că M se găseşte la intersecţia mediatoarelor triunghiului, adică e centrul cercului circumscris.

I. C. V.

PROBLEMA 6043. *Să se găsească valoarea parametrului* a *din fracţia*

$$\frac{x^2+ax+1}{x^2(x+1)}$$

pentru care valoare, descompunerea acestei fracţii în fracţii simple, să nu conţină termenul în $\frac{1}{x}$.

LT-COL. I. M. POPESCU.

1°. *Soluţie* dată de d-nii: CONSTANTIN CORDUNEANU (Col. N. Filipescu, Predeal); GHEORGHE A. GRIGORE (student-inginer); MIRCEA G. IOSIFESCU (Lic. Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti); IOAN T. MUNTEANU (Col. N. Filipescu, Predeal; AUGUST NICU (liceul armatei Craiova); CONSTANTIN ROŞU (Col. Nicolae Filipescu Predeal); PETRE P. TEODORESCU (liceul Matei Basarab, Bucureşti); VALERIU PANDELE, A. PETCU (liceul Mihai Viteazu, Bucureşti); S. E. FANCIOTTI (Politehnica, Bucureşti); GEORGE ENESCU (Particular, Bucureşti).

Va trebui să avem:

$$\frac{x^2+ax+1}{x^2(x+1)} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x+1}$$

(A, B nedeterminaţi). Sau

$$x^2+ax+1 \equiv A(x+1) + Bx^2.$$

Deci $B = 1$, $A = a$, $A = 1$, de unde $a = 1$.

2°. *Soluție* dată de d-l IOAN N. GLIGOR (student, Aliuș).

$$1+ax+x^2 : 1+x = 1+(a-1)x+(2-a)\frac{x^2}{1+x}.$$

Deci

$$\frac{x^2+ax+1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2}+\frac{a-1}{x}+\frac{2-a}{1+x}.$$

Termenul în $\frac{1}{x}$ dispare, dacă $a=1$.

Problema aceasta a fost propusă ca exercițiu de d-l Prof. TH. ANGHELUȚĂ la pag. 398, Vol. XXIX, *Gazeta Matematică*.

C. I. B.

PROBLEMA 6148. *Se consideră în același plan două grupe de câte patru puncte:* A_1, A_2, A_3, A_4 *și* B_1, B_2, B_3, B_4. *Punem:*

$$l_{ik} = A_i B_k^2 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Să se arate că avem:

$$\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & 1 \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} & 1 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} & 1 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce devine această relație dacă cele două grupe de puncte coincid?

ȘERBAN GHEORGHIU.

Relațiunea ce formează obiectul acestei probleme poate fi demonstrată prin considerațiuni asemănătoare acelora din articolul „*O relațiune metrică remarcabilă*“ (G. M. LI, pag. 71).

In soluțiunea ce urmează, se utilizează o propoziție relativă la multiplicarea a două tablouri rectangulare cunoscută sub numele de teorema lui BINET și CAUCHY. Astfel, fiind date două tablouri, având mai multe linii decât coloane, teorema în chestiune, arată că determinantul ce se obține prin multiplicarea pe linii a elementelor celor două tablouri este nul.

Axele de coordonate fiind presupuse perpendiculare, consider două grupe de câte n puncte: $A_i(a_i, b_i)$ şi $B_i(\alpha_i, \beta_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ iar $n \geqq 5$. Relaţiunea ce voim să demonstrăm rezultă din aplicarea teoremei amintite la tablourile:

$$\| a_i^2 + b_i^2 \; a_i \; b_i \; 1 \| \text{ şi } \| 1 \; -2\alpha_i \; -2\beta_i \; \alpha_i^2 + \beta_i^2 \| \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pentru mai multă claritate, consider determinanţii:

$$D_n = | a_i^2 + b_i^2 \; a_i \; b_i \; 1 \; 0 \ldots 0 |$$

şi

$$\Delta_n = | 1 \; -2\alpha_i \; -2\beta_i \; \alpha_i^2 + \beta_i^2 \; 0 \ldots 0 |$$

de ordinul n, pentru care elementele ultimelor $n-4$ coloane sunt nule. Înmulţind, pe linii, aceşti doi determinanţi se obţine:

$$\delta_n = | l_{i1} \; l_{i2} \ldots l_{in} | = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Făcând în această relaţiune generală $n = 5$, şi presupunând că punctele A_5 şi B_5 coincid, se obţine $l_{55} = 0$. Apoi presupunând că punctul $A_5 \equiv B_5$ este aruncat la infinit, obţinem că în expresia lui δ_5 trebue să înlocuim elementele l_{15}, l_{25}, l_{35}, l_{45} şi l_{51}, l_{52}, l_{53}, l_{54} prin 1. Relaţia ce se obţine astfel este chiar cea propusă.

In particular, dacă cele două grupe de câte patru puncte coincid relaţiunea noastră devine relaţia clasică, dintre cele şase distanţe a patru puncte din plan, luate câte două.

Deasemeni, este evident că pentru două grupe de câte n puncte din plan, $n \geqq 4$, avem relaţiunea:

$$\begin{vmatrix} & & \vdots & 1 \\ & \delta_n & \vdots & 1 \\ & & \vdots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \vdots & 1 \\ 1 & 1 \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Relaţiuni similare au loc pentru două grupe de câte n puncte din spaţiu, $n \geqq 6$, în cazul relaţiunei $\delta_n = 0$.

Notă: D-l CEZAR N. I. BOERESCU (Student Politehnica Bucureşti) a dat o bună soluţie bazată pe articolul de la pag. 71 Vol. XLI *Gazeta Matematică*. S'au mai primit soluţiuni corecte, dar lungi şi obositoare dela d-nii GEORGE V. MANOLESCU şi IOAN I. NOVAC (cl. VIII Lic. N. Bălcescu, Brăila) şi ŞT. GR. FIRESCU (Lic. „Fraţii Buzeşti", Craiova).

PROBLEMA 6176. *Între x și y există relația*

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sh} y = 1.$$

Să se calculeze liniile trigonometrice ale lui x și $\frac{x}{2}$ în funcție de liniile hiperbolice ale lui y, precum și liniile hiperbolice ale lui y în funcție de liniile trigonometrice ale lui x și $\frac{x}{2}$.

G-L GH. I. LITEANU.

Soluție. Ținând seama de relația din enunț, de relațiile fundamentale dintre liniile hiperbolice *shy*, *chy*, *thy* și anume

$$ch^2y - sh^2y = 1; \quad \frac{shy}{chy} = thy; \quad chy = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - th^2y}};$$

$$shy = \frac{thy}{\pm\sqrt{1 - th^2y}};$$

precum și de relațiile cunoscute privind funcțiile trigonometrice $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\sin\frac{1}{2}x$, $\cos\frac{1}{2}x$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$, se ajunge prin calcul la valorile arătate în tabelele următoare:

I.

Se cere / în funcția de	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
shy	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + sh^2y}}$	$\frac{shy}{\pm\sqrt{1 + sh^2y}}$	$\frac{1}{shy}$
chy	$\frac{1}{\pm chy}$	$\frac{\pm\sqrt{ch^2y - 1}}{chy}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{ch^2y - 1}}$
thy	$\pm\sqrt{1 - th^2y}$	$\pm thy$	$\pm\frac{\sqrt{1 - th^2y}}{thy}$

II.

Se cere / în funcție de	$\sin\frac{1}{2}x$	$\cos\frac{1}{2}x$	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$
shy	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}\mp\frac{shy}{2\sqrt{1+sh^2y}}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}\pm\frac{shy}{2\sqrt{1+sh^2y}}}$	$-shy\pm\sqrt{sh^2y+1}$
chy	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{ch^2y-1}}{2\,chy}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{ch^2y-1}}{2\,ch}}$	$\mp\sqrt{ch^2y-1}\pm chy$
thy	$\pm\sqrt{\frac{1\mp thy}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1\pm thy}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1\mp thy}{1\pm thy}}$

III.

Se cere / în funcție de	shy	chy	thy
$\sin x$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2x}}{\sin x}$	$\pm\frac{1}{\sin x}$	$\pm\sqrt{1-\sin^2x}$
$\cos x$	$\pm\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2x}}$	$\pm\cos x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}{\operatorname{tg} x}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}$

IV.

Se cere / în funcție de	shy	chy	thy
$\sin\frac{x}{2}$	$\pm\frac{1-\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}}}$	$\frac{1}{\pm 2\sin\frac{x}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}}}$	$1-2\sin^2\frac{x}{2}$
$\cos\frac{x}{2}$	$\pm\frac{2\cos^2\frac{x}{2}-1}{2\cos\frac{x}{2}\sqrt{1-\cos^2\frac{x}{2}}}$	$\frac{1}{\pm 2\cos\frac{x}{2}\sqrt{1-\cos^2\frac{x}{2}}}$	$2\cos^2\frac{x}{2}-1$
$\operatorname{tg}\frac{x}{2}$	$\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$	$\pm\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$	$\pm\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

S'au primit soluţii bune dela d-nii: P. P. TEODORESCU (Liceul Matei Basarab, Bucureşti); P. D. COLUMBEANU (Şcoala Politehnică, Bucureşti); A. I. VARGĂ (Student inginer); V. PĂLĂCEANU (Şcoala Ofiţeri de Geniu); M. R. CONSTANTINESCU (Ploeşti); M. A. SĂVESCU (Colegiul Sf. Sava, Buc.); CEZAR BOERESCU, I. KINSKY, ILIE N. CONSTANTINESCU, SILVIO E. FANCIOTTI, I. A. BARBU şi SILVIU M. PUŞCAŞU.

1°. In soluţiile primite unii corespondenţi au utilizat şi liniile *sec, cosec,* şi *cotg,* iar în soluţia d-lui M. R. CONSTANTINESCU s'a exprimat unele din rezultatele cerute ţinând seamă de relaţiile, care definesc funcţiile hiperbolice şi anume:

$$chy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}; \quad shy = \frac{e^y - e^{-y}}{2}; \quad thy = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}.$$

2°. De asemenea s'a exprimat o linie trigonometrică sau o linie hiperbolică, respectiv, în funcţie de două linii hiperbolice sau de două linii trigonometrice, de exemplu:

$$tg\frac{x}{2} = chy \mp shy; \quad cot\frac{x}{2} = chy \pm shy; \quad shy = \frac{1}{2}\left(cot\frac{x}{2} - tg\frac{x}{2}\right);$$

$$chy = \pm\frac{1}{2}\left(tg\frac{x}{2} + cotg\frac{x}{2}\right); \quad thy = \pm\frac{cot\frac{x}{2} - tg\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}\,cotg\frac{x}{2}}.$$

G-L GH. I. LITEANU.

EXERCIŢII

9. *Să se găsească numărul* N *de două cifre al cărui patrat este inversul patratului lui* 3N.

VIRGIL G. CONSTANTINESCU.

R. Dacă N are 2 cifre atunci 3N are 2 sau 3 cifre.

1°. 3N are 2 cifre deci

$$30 \leqslant 3N \leqslant 33 \quad \therefore \quad 10 \leqslant N \leqslant 11$$

şi N^2 are trei cifre, fie

$$N^2 = abc \quad \therefore \quad 9N^2 = cba \quad \therefore \quad abc = \frac{cba}{9} \quad \therefore \quad 99c = 99a + 80b$$

ceeace nu este posibil căci $80b$ nu se divide prin 11.

2°. 3N are 3 cifre, deci

$$100 \leqslant 3N \leqslant 999 \quad \therefore \quad 33 < N \leqslant 99$$

N cuprins între aceste limite are patratul de 4 cifre găsim ca la 1°

$$abcd = \frac{dcba}{9} \quad \therefore \quad a = \frac{991d + 10c - 890b}{8999}.$$

Numărătorul fiind mai mare ca 8999 rezultă $b = 0$. Cum maximul sumei $991d+10c$ este 9009 urmează că nu putem avea de cât

$$991d + 10c = 8996 \quad \therefore \quad a = 1$$

$10c$ terminându-se cu zero urmează $d = 9$, de unde $c = 8$ şi

$$N = 33 \quad \therefore \quad 33^2 = 1089 \quad \text{cu} \quad (3,33)^2 = 9801$$

care este singura soluţie.

10. *Ştiind că* M *este punctul de întâlnire al cevienelor* AA', BB', CC' *în triunghiul* ABC, *se cere să se găsească poziţia lui* M *pentru care produsul*

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AA'}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BB'}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{CC'}}$$

este maxim. EMIL E. MARINESCU.

R. Se ştie că [1]

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AN'}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{MC}}{\overline{CC'}} = 2$$

Produsul va fi maxim când factorii vor fi egali deci

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{BC'}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{CC'}} = \frac{2}{3}$$

M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

11. *Să se rezolve ecuaţia*

$$a^4x^4 + 8a^3x^3 + c^2(24 - c^2)x^2 + 4c(8 - c^2)x - c^4 - 4c^2 + 16 = 0.$$

I. N. PISANCA.

R. Se observă că ecuaţia dată se poate pune sub forma ecuaţiei bipatrate

$$\left(x + \frac{2}{a}\right)^4 - \left(x + \frac{2}{a}\right)^2 - 1 = 0.$$

12. *Dacă între laturile unui triunghiu avem*

$$2a = b + c$$

atunci

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} + \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{5}{2}.$$

ILIE N. CONSTANTINESCU.

---

1) F. G. M. *Exercices de géometrie* pag. 75.

R. Intr'un triunghiu cu laturile în progresie aritmetică avem

$$2 \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B - C}{2}.$$

Ducând pe $\sin \frac{A}{2}$ în relaţia a doua din enunţ se găseşte că ea se verifică.

13. *Să descompună fracţia*

$$\frac{x^6 - 7x^2 + 2x - 1}{(x-2)^6}$$

în fracţii simple. I. N. PISANCA.

R. Intrebuinţând metoda generală pentru cazul fracţiilor ale căror numitori egalaţi cu zero au rădăcini reale multiple se găseşte că fracţia dată este echivalentă cu

$$\frac{39}{(x-2)^6} + \frac{166}{(x-2)^5} + \frac{233}{(x-2)^4} + \frac{160}{(x-2)^3} + \frac{60}{(x-2)^2} + \frac{15}{x-2}.$$

14. *Să se arate că ecuaţia*

$$\frac{\lambda \sin^{n+1} x + \sin^{n-2} x \cos x + \alpha \sin x \cos x}{\sin^{n-1} x + \alpha \cos^2 x + \lambda \sin^n x \cos x} = 1$$

admite o rădăcină independentă de α *şi de* λ.

I. I. NOVAC.

R. Impărţind numărătorul şi numitorul cu $\cos \alpha$, ecuaţia dată devine

$$\frac{\lambda \sin^n x \operatorname{tg} x + \sin^{n-2} x + \alpha \sin x}{\sin^{n-2} x \operatorname{tg} x + \alpha \cos x + \lambda \sin^n x} = 1$$

$$\therefore \quad \lambda \sin^n x (\operatorname{tg} x - 1) + \sin^{n-2} x (\operatorname{tg} x - 1) + \alpha \cos x (\operatorname{tg} x - 1) = 0$$

ceea ce demonstrează proprietatea enunţată.

15. *Să se calculeze*

$$I = \int \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x \, dx$$

I. A. COHN

R. Deoarece

$$\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x$$

se deduc imediat

$$I = \int \operatorname{tg} 3x \, dx - \int \operatorname{tg} 2x \, dx - \int \operatorname{tg} x \, dx.$$

Integralele sumelor din membrul II sunt cunoscute.

PROBLEME PROPUSE

4393 [1]. Se dă o conică (Γ) şi două drepte D şi Δ. Tangentele duse din punctul M, variabil pe D, taie dreapta Δ în P şi Q. Se cere locul geometric al intersecţiei tangentelor — diferite de PM şi QM — duse din P şi Q la conica (Γ).

GH. D. SIMIONESCU.

6421. Fie $I_p(A, N)$ numărul numerelor prime cu p din şirul $A+1, A+2, \ldots, A+N$. Fie încă $\varphi_p(N)$ şi $\Phi_p(N)$ respectiv minimum şi maximum lui $I_p(A, N)$ când A variază. Să se determine $\varphi_{15}(N)$ şi $\Phi_{15}(N)$.

N. GEORGESCU-ROEGEN.

6422. Intr'un cerc se consideră o coardă de lungime dată care se împarte în n părţi egale. Se notează cu S suma puterilor punctelor de împărţire faţă de cerc şi se cere să se demonstreze că raportul $\frac{S}{n}$ tinde către o limită finită când n creşte nemărginit.

G-L GH. BUICLIU.

6423. Fie (I) cercul înscris în triunghiul ABC; o dreaptă Δ ce trece prin I, taie laturile BC, CA, AB în A', B', C'. Fie ω_a, ω_b, ω_c cercurile ortogonale cercurilor BIC, CIA, AIB, trecând prin I şi respectiv prin A', B', C'. Fie A_1, A_2 punctele în care cercul ω_a retaie latura BC şi cercul BIC, iar B_1, B_2, C_1, C_2 punctele obţinute analog.

1°. Cercurile ω_a, ω_b, ω_c trec prin al doilea punct comun D.
2°. Punctele A_1, B_1, C_1 sunt pe o dreaptă Δ_1.
3°. Patrulaterul $IA_2B_2C_2$ este inscriptibil.
4°. Dreapta Δ_1 este tangentă cercului (I).
5°. Dreapta Δ este tangentă în I cercului $IA_2B_2C_2$.
6°. Dreapta Δ variind, să se găsească locul punctului D.

P. P. DRĂGHICESCU.

---

1) Problema 4393 propusă la pag. 478, Vol. XXXIX fiind eronată, se anulează şi se înlocueşte cu problema de faţă.

6424. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 = 108,$$
$$x + y + z = 8,$$
$$\frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} = -\frac{2}{5}.$$

DAN E. VASILIU.

6425. Să se dea o demonstraţie directă identităţii

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\alpha^{np}}{(\alpha-1)(\alpha^2-1)\ldots(\alpha^n-1)} = 1, \quad p \text{ întreg} > 0, \ |\alpha| > 1,$$

din articolul d-lui N. CIORĂNESCU (G. M., Vol. LIII, p. 134).

De asemeni să se demonstreze direct identitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \alpha^{-\frac{n(n+1)}{2}} (\alpha^{pn} - \alpha^{-p(n+1)}) = 1 - \alpha^{-p},$$

(p întreg pozitiv sau negativ), din articolul meu; *„Asupra unor funcţii transcendente"*. (G. M., Vol. LIII, p. 193).

V. VÂLCOVICI.

6426. Dacă $a < b < c$ şi dacă notăm

$$A = \sqrt{(1+b^2)(1+c^2)} + 1 + bc \ ; \ A_1 = \sqrt{(1+b^2)(1+c^2)} - 1 - bc$$
$$B = -\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)} + 1 + ca \ ; \ B_1 = -\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)} - 1 - ca$$
$$C = \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} + 1 + ab \ ; \ C_1 = \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} - 1 - ab$$

$a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$, $c = \operatorname{tg}\gamma$; $x = \beta - \gamma$, $y = \alpha - \gamma$, $z = \alpha - \beta$

atunci avem:

1°. $A \cdot A_1 = (b-c)^2$, $B \cdot B_1 = (c-a)^2$, $C \cdot C_1 = (a-b)$

2°. $$\frac{A}{b-c} + \frac{B}{c-a} + \frac{C}{a-b} = \frac{ABC}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

3°. $$\frac{b-c}{A_1} + \frac{c-a}{B_1} + \frac{a-b}{C_1} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{A_1B_1C_1}$$

4°. $\operatorname{cotg}x + \operatorname{cotg}y + \operatorname{cotg}z = \operatorname{cotg}x \operatorname{cotg}y \operatorname{cotg}z$.

C. IONESCU-ŢIU.

6427. Să se studieze natura seriei cu termenul general

$$a_n = \frac{1}{n^p (\log n)^q (\log \log n)^r},$$

p, q, r fiind numere reale.

VIRGIL CLAUDIAN.

6428. Se dau două puncte fixe A şi B şi un segment MN variabil dar de lungime şi direcţie constantă, mişcându-se în acelaşi plan cu cele două puncte. Să se arate că locul mijlocului segmentului MN este o conică, atunci când suma sau diferenţa distanţelor extremităţilor acestui segment la cele două puncte fixe este constantă. Se cere să se determine centrul, axele şi focarele acestei conice.

I. ST. TEODORESCU, Ploeşti.

6429. Fie A şi B două puncte pe axele Ox, Oy; luăm punctele: M pe Ox, N pe Oy, P pe MN astfel ca

$$\overline{AM} = \overline{BN} \quad , \quad \overline{PM} = k \cdot \overline{PN} \qquad (k, \text{ fix}).$$

Perpendiculara în P pe MN înfăşoară o parabolă cu axa paralelă cu bisectoarea unghiului axelor. Caz particular $k = 1$.

N. N. MIHĂILEANU.

6430. Pe două plane OA şi OB înclinate cu acelaşi unghiu α pe orizontală se află aşezate două corpuri M şi N.

Un fir prinde corpul M, urcă paralel cu linia de cea mai mare pantă a planului OA, trece peste scripetele O, scoboară paralel cu linia de cea mai mare pantă a planului OB şi se înfăşoară peste scripetele O_1, a cărui axă O_1 este fixată de corpul N. Greutatea corpului M este P. Greutatea corpului N, inclusiv a scripetelui O_1 este *tot* P. Scripetele O_1 se va considera de greutate G, de raza r şi având momentul de inerţie I faţă de O_1. Să se studieze mişcarea sistemului.

In poziţie iniţială se va presupune că toate corpurile sunt în repaos. Se vor neglija massa scripetelui O, greutatea firului, frecările şi rezistenţa aerului.

ALEXANDRU STOENESCU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Andronescu N. Longiu (6088, 285, 314, 50, 4); *Bărbulescu C. V.* (5864, 6043, 262, 3, 87, 8, 362, 86); *Berdan C.* (6394, 415); *Boerescu I. N. C.* (E, P); *Bucur A. N.* (6416); *Constantinescu R. M.* (6378, 404, 5, 12, 5, 6, 7, 20, E); *Constantinescu Paul* (6312, 54, 78, 86, 94, 5); *Crăciunescu E.* (A, P); *Diaconu C. C.* (E, P); *Enescu Gh.* (4478, 765, 5598, 6005, 105, 265, 88, 316, 31, 78, 86, C, E); *Filimon I. I.* (E); *Goga I. Fl.* (P); *Hangan M. T.* (6285); *Măncescu N. I.* (6312, 5, 24, 50, 69, 78, 86, 94, 5); *Marinescu E.* (P); *Moraite G. Al.* (6105, 45, 228, 87, 312, 416, 20); *Neguţ A. I.* (6402, E); *Nestorescu C. D.* (6416); *Pantea N. Al.* (5861, 980, 6074, 84, 101, 323); *Petcu A. Val.* (6265, 94); *Popa D. Mircea* (3551, 4685, 995, 5051, 737, 6032, 417, 20, P); *Soare V. M.* (5129, 636, 96); *Vasilescu Karpen N.* (P); *Wegener E.* (P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de geometrie, a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *« Gazeta Matematică »*.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate, cu preţul de 800 lei volumul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—X, XII, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 150

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 180

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . Lei 500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . Lei 250

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 100

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.500

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 320

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 400

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 100

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . Lei 250

PENTRU BIBLIOTECI ŞI AUTORITĂŢI TOATE PREŢURILE SE TRIPLEAZĂ

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LIII abonamentele sunt:

Pentru profesori, studenţi şi elevi. . . . . Lei 480

Pentru autorităţi şi biblioteci . . . . . Lei 1.500

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1947 la 1 Iunie 1948 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este:

Pentru profesori, studenţi şi elevi . . . . . Lei 180

Pentru autorităţi şi biblioteci . . . . . Lei 400

Abonamentele se pot plăti la cont CEC Nr. 26220 sau se pot trimite unde se trimite şi corespondenţa, pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 43.083.

N 3298

8753

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIII

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1948

SUMARUL

1. Relaţii între funcţiile aritmetice elementare . *I. B. Florescu.*
2. Note matematice: 14—15.
3. Bibliografie.
4. Cereri.
5. Diverse.
6. Probleme rezolvate: 3513, 4638, 6044, 6289, 6312, 6315.
7. Exerciţii: 16.
8. Probleme propuse: 6431, 6440.
9. Erată.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALA
1948

9677

83508

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **N. Georgescu-Roegen**, Licenţiat în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier) şi Ing. **D. Stan** (Locţiitor de casier).

Şedinţele următoare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Marţi 27 Ianuarie ora 17: Adunarea materiei pentru Nr. 6 şi examinarea înscrierilor pentru concursul *Gazetei Matematice*.

Marţi 10 Februarie ora 17: Facerea copertei pentru Nr. 6.

Marţi 17 Februarie ora 17: Adunarea generală.

Marţi 24 Februarie ora 17: Adunarea generală, în caz când cea precedentă nu s'a putut ţine. Adunarea materiei pentru Nr. 7.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1947 sunt indicate în tabla de materii a volumului LII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 6391, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 6400, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 40.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *« Gazeta Matematică »* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . „ 150
— Medalia comemorativă, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *« Gazetei Matematice »* . . . . . „ 500

LICEUL ... Profesorilor

RELAȚII ÎNTRE FUNCȚIUNILE ARITMETICE ELEMENTARE

Dacă un grup de numere poate fi despărțit în două feluri diferite, în subgrupuri, se poate întâmpla ca unele din funcțiile aritmetice elementare să fie aceleași pentru aceste 2 ansambluri de subgrupe. Fiecare din aceste echivalențe judicios aplicată, ne permite fie de a regăsi unele din relațiile cunoscute dintre funcțiunile aritmetice elementare, fie de a stabili alte relații noi între aceste funcțiuni, ceeace îmi propun să arăt în cele ce urmează.

Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots a_\varphi$, numerile prime cu N, conținute în șirul primelor N numere întregi.

$\varphi(N)$, $\sigma_k(N)$ și $\pi(N)$ respectiv numărul, suma puterilor k și produsul numerilor de mai sus. In particular $\varphi(1) = \sigma_k(1) = \pi(1) = 1$.

$I_N(M)$, $S_N(M)$ și $P_N(M)$ respectiv numărul, suma și produsul numerilor întregi b, prime cu N, care satisfac relația $b \leqslant M$.

$I_N(U \to V)$, $S_N(U \to V)$ și $P_N(U \to V)$ respectiv numărul, suma și produsul numerilor întregi c, prime cu N, care satisfac inegalitățile $U < c \leqslant V$.

$p_1, p_2, \ldots p_s$ numerile prime absolute care divid pe N.

$\gamma(N)$ funcțiunea

$$(-1)^s \varphi(p_1 . p_2 \ldots p_s) = (1 - p_1)(1 - p_2) \ldots (1 - p_s).$$

Cu această notație $\sigma_2(N) = \frac{1}{6} N [2 N \varphi(N) + \gamma(N)]$ după cum s'a arătat în Problema Nr. 3733 a cărei soluție s'a publicat în G. M. vol. XLVII pag. 465. Deoarece $\gamma(1) = 1$ această formulă precum și formula $\sigma_1(N) = \frac{1}{2} N \varphi(1)$ nu sunt valabile pentru $N = 1$ când avem

$$\sigma_1(1) = \frac{1}{2} 1\varphi(1) + \frac{1}{2}, \quad \sigma_2(1) = 1 = \frac{1}{6} \times 1[2.1.\varphi(1) + \gamma(1)] + \frac{1}{2} \qquad (1)$$

$d_1, d_2, d_3, \ldots d_n$ toți divizorii aritmetici ai numărului N. $n(N)$, $s_k(N)$ și $p(N)$ respectiv numărul, suma puterilor a k-lea și produsul divizorilor lui N.

$\delta_i = N/d_i$ divizorul complimentar al lui d_i față de N.

E (M), simbolul lui LEGENDRE, numărul întregilor conținuți de N.

83508

I. Vom împărți grupul (N) al numerilor consecutive dela 1 până la N, inclusiv, în subgrupe (d_1), (d_2), ... (d_n), astfel încât în subgrupul (d_i) să se găsească toate numerile din grupul [N] care au cu N codivizorul maxim egal cu d_i. Deoarece codivizorul maxim a două numere oarecare, după însăși definiția sa, este unic și împarte pe fiecare din cele două numere, urmează ca fiecare număr din grupul [N] face parte dintr'un subgrup (d_i) și numai dintr'unul singur.

Pentru ca numărul $ad_i \leqslant N$ să facă parte din subgrupul (d_i) este necesar și suficient ca a să fie prim cu N/d_i, deoarece dacă a și N/d_i ar avea un codivizor maxim $\delta \neq 1$, codivizorul maxim al lui ad_i și N ar fi δd_i iar nu d_i cum am presupus.

In concluzie, fiindcă N/d_i este și el un divizor al lui N, urmează că în subgrupul (N/d_i) se găsesc toate numerile de forma aN/d_i în care a este un număr prim cu d_i și mai mic decât d_i.

II. Numărul numerilor conținute de subgrupul (N/d_i) este $\varphi(d_i)$.

Cum numărul numerilor conținute de toate subgrupele (d_i), respectiv toate subgrupele (N/d_i) este același cu numărul numerilor conținute de grupul [N] urmează că avem egalitatea:

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \varphi(d_3) + \ldots + \varphi(d_n) = N. \qquad (2)$$

Am regăsit astfel o relație clasică care deobiceiu se demonstrează prin inducție.

III. Suma numerilor conținute de subgrupul (N/d_i) este $\frac{N}{d_i}\sigma_1(d_i)$.

Suma sumelor numerilor conținute de subgrupele (N/d_i) este aceiași cu suma numerilor conținute de grupul [N]. Deci:

$$\frac{N}{d_1}\sigma_1(d_1) + \frac{N}{d_2}\sigma_1(d_2) + \ldots + \frac{N}{d_n}\sigma_1(d_n) = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{\sigma_1(d_1)}{d_1} + \frac{\sigma_1(d_2)}{d_2} + \ldots + \frac{\sigma_1(d_n)}{d_n} = \frac{N+1}{2} \qquad (3)$$

Dealtfel relația (3), ținând seamă de formula care dă valoarea lui $\sigma_1(R)$ nu este decât relația (2) pusă sub altă formă.

IV. Suma patratelor numerilor conținute de subgrupul (N/d_i) este $\frac{N^2}{d_i^2}\sigma_2(d_i)$. Deci

$$\frac{N^2}{d_1^2}\sigma_2(d_1)+\frac{N^2}{d_2^2}\sigma_2(d_2)+\ldots\ldots+\frac{N^2}{d_n^2}\sigma_2(d_n)=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Din formula care dă pe $\sigma_2(R)$ și ținând seamă de (1) se deduce, deoarece 1 este divizor al tuturor numerilor, următoarele:

$$\frac{1}{2}+\Sigma\frac{1}{6}\frac{d_i}{d_i^2}[2d_i\varphi(d_i)+\gamma(d_i)]=\frac{(N+1)(2N+1)}{6N}$$

sau $$3+\Sigma 2\varphi(d_i)\Sigma\frac{\gamma(d_i)}{d_i}=\frac{2N^2+3N+1}{N}$$

Insă, deoarece $\Sigma\varphi(d_i)=N$, rezultă:

$$\frac{\gamma(d_1)}{d_1}+\frac{\gamma(d_2)}{d_2}+\ldots+\frac{\gamma(d_n)}{d_n}=\frac{1}{N} \qquad (4)$$

V. Produsul numerilor conținute de subgrupul N/d_i este $(N/d_i)^{\varphi(d_i)}\pi(d_i)$ și cum produsul numerilor din toate subgrupele (N/d_i) este egal cu produsul numerilor din grupul [N] urmează că avem

$$N^{\varphi(d_1)+\varphi(d_2)+\ldots+\varphi(d_n)}\frac{\pi(d_1)}{d_1^{\varphi(d_1)}}\cdot\frac{\pi(d_2)}{d_2^{\varphi(d_2)}}\cdots\frac{\pi(d_n)}{d_n^{\varphi(d_n)}}=N!$$

sau:
$$\frac{\pi(d_1)}{d_1^{\varphi(d_1)}}\cdot\frac{\pi(d_2)}{d_2^{\varphi(d_2)}}\cdots\frac{\pi(d_n)}{d_n^{\varphi(d_n)}}=\frac{N!}{N^N}. \qquad (5)$$

VI. Impărțim de astă dată grupul [M], al numerilor întregi și pozitive a care satisfac inegalitatea $a\leqslant M$, în subgrupe (d_1), $(d_2)\ldots(d_n)$, astfel încât în subgrupul (d_i) să se găsească toate numerile din grupul [M] care au cu N codivizorul maxim egal cu d_i.

Ca mai sus, deducem că în subgrupul (N/d_i) se găsesc toate numerile de forma aN/d_i în care a este un număr întreg prim cu d_i și care satisface neegalitatea $a\leqslant\frac{Md_i}{N}=\frac{M}{\delta_i}$. Deci în subgrupul (N/d_i) se găsesc $I_{d_i}\left(\frac{M}{\delta_i}\right)$ numere, a căror suma este $\frac{N}{d_i}S_{d_i}\left(\frac{M}{\delta_i}\right)$ și al căror produs este $\left(\frac{N}{d_i}\right)^{I_{d_i}\left(\frac{M}{\delta_i}\right)}P_{d_i}\left(\frac{M}{\delta_i}\right)$.

Repetând, punct cu punct, raţionamentele dela II, III şi V, se stabilesc următoarele relaţiuni

$$I_{d_1}\left(\frac{M}{\delta_1}\right)+I_{d_2}\left(\frac{M}{\delta_2}\right)+\ldots+I_{d_n}\left(\frac{M}{\delta_n}\right)=M \tag{6}$$

$$\frac{S_{d_1}\left(\frac{M}{\delta_1}\right)}{d_1}+\frac{S_{d_2}\left(\frac{M}{\delta_2}\right)}{d_2}+\ldots+\frac{S_{d_n}\left(\frac{M}{\delta_n}\right)}{d_n}=\frac{M(M+1)}{2N} \tag{7}$$

$$\frac{P_{d_1}\left(\frac{M}{\delta_1}\right)}{d_1^{\,I_{d_1}\left(\frac{M}{\delta_1}\right)}}\cdot\frac{P_{d_2}\left(\frac{M}{\delta_2}\right)}{d_2^{\,I_{d_2}\left(\frac{M}{\delta_2}\right)}}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{P_{d_n}\left(\frac{M}{\delta_n}\right)}{d_n^{\,I_{dn}\left(\frac{M}{\delta_n}\right)}}=\frac{M!}{N^M} \tag{8}$$

Egalităţile (6), (7) şi (8) generalizează relaţiile (2), (3) şi (5) dela paragrafele respective, cu observarea că dacă $M\,\delta_i<1$ factorul nedeterminat de forma $0/1^0$ care apare în (8) trebue luat egal cu 1.

VII. O generalizare şi mai largă se obţine împărţind numerile întregi a care satisfac inegalităţile $R<a\leqslant Q$ în subgrupe după codivizorii maximi, pe care aceste numere le au faţă de N.

Se obţine:

$$I_{d_1}\left(\frac{R}{\delta_1}\to\frac{Q}{\delta_1}\right)+\ldots+I_{d_n}\left(\frac{R}{\delta_n}\to\frac{Q}{\delta_n}\right)=Q-R \tag{9}$$

$$\frac{1}{d_1}S_{d_1}\left(\frac{R}{\delta_1}\to\frac{Q}{\delta_1}\right)+\ldots\frac{1}{d_n}S_{d_n}\left(\frac{R}{\delta_n}\to\frac{Q}{\delta_n}\right)=\frac{(Q-R)(Q+R+1)}{2N} \tag{10}$$

$$\frac{P_{d_1}\left(\frac{R}{\delta_1}\to\frac{Q}{\delta_1}\right)}{d_1^{\,I_{d_1}\left(\frac{R}{\delta_1}\to\frac{Q}{\delta_1}\right)}}\times\ldots\times\frac{P_{d_n}\left(\frac{R}{\delta_n}\to\frac{Q}{\delta_n}\right)}{d_n^{\,I_{dn}\left(\frac{R}{\delta_n}\to\frac{Q}{\delta_n}\right)}}=\frac{Q!}{R!N^{Q-R}} \tag{11}$$

In relaţiile (9), (10) şi (11) ca şi în (6), (7) şi (8) pentru calculul părţilor a 2-a s'a presupus că M, R şi Q sunt numere întregi, ele însă rămân valabile şi dacă M, R şi Q, în total sau în parte, sunt numere oarecare, atunci însă în membrii ai 2-lea ai egalităţilor acestea, M, R şi Q trebuesc înlocuiţi cu E (M), E (R) şi E (Q).

VIII. Impărţim totalitatea fracţiilor α/β în care $\alpha\leqslant\beta$ şi $\beta\leqslant M$ unde M este un număr întreg şi pozitiv în subgrupele [1], [2], ... [M] astfel încât în subgrupul [N] să se găsească toate fracţiile, din cele considerate, care au numitorul N.

Urmează că în grupul [N] se găsesc N fracţii, a căror sumă la puterea k este $\frac{1}{N^k}(1^k+2^k+\ldots+N^k)$ şi al căror produs este $\frac{N!}{N^N}$.

Impărţim aceleaşi fracţii în subgrupele [1]', [2]'... [M]' astfel încât în subgrupul [N]' să se găsească, din fracţiile considerate toate acelea care sunt echivalente cu fracţii ireductibile al căror numitor este N. Se obsearvă că din subgrupul [N]' fac parte fracţiile:

$$\frac{a_i K}{N K} \qquad \left[i=1,2,\ldots,\varphi;\ K=1,2,\ldots E\left(\frac{M}{N}\right)\right]$$

deci în subgrupul [N]' se găsesc $\varphi(N)\,E\left(\frac{M}{N}\right)$ fracţii, a căror sumă luate la puterea k este $\frac{\sigma_k(N)}{N^k}E\left(\frac{M}{N}\right)$ şi al căror produs este $\left[\frac{\pi(N)}{N^{\varphi(N)}}\right]^{E\left(\frac{M}{N}\right)}$

IX. Scriind că numărul, suma fracţiilor la puterea k şi produsul fracţiilor în cele 2 ansambluri sunt aceleaşi, obţinem relaţiile:

$$\varphi(1)\,E\left(\frac{M}{1}\right)+\varphi(2)\,E\left(\frac{M}{2}\right)+\ldots+\varphi(M)\,E\left(\frac{M}{M}\right)=\frac{M(M+1)}{2} \qquad (12)$$

$$\frac{\sigma_k(1)}{1^k}E\left(\frac{M}{1}\right)+\frac{\sigma_k(2)}{2^k}E\left(\frac{M}{2}\right)+\ldots+\frac{\sigma_k(M)}{M^k}E\left(\frac{M}{M}\right)=\sum_{q=1}^{M}\frac{1^k+2^k+\ldots+q^k}{q^k} \qquad (13)$$

$$\left[\frac{\pi(2)}{2^{\varphi(2)}}\right]^{E\left(\frac{M}{2}\right)}\times\left[\frac{\pi(3)}{3^{\varphi(3)}}\right]^{E\left(\frac{M}{3}\right)}\times\ldots\times\left[\frac{\pi(M)}{M^{\varphi(M)}}\right]^{E\left(\frac{M}{M}\right)}=\frac{2!\,3!\ldots M!}{2^2\,3^3\ldots M^M} \qquad (14)$$

Relaţiile (12) şi (14), în special (12), sunt remarcabile prin ele însăşi. Inlocuind în (13) pe $\sigma_1(R)$ cu valoarea sa şi făcând calculele şi simplificările necesare, cădem tot peste relaţia (12). Dacă în (13) înlocuim sumele $\sigma_2(R)$ cu valoarea lor şi procedăm a fel ca la paragraful IV găsim relaţia:

$$\sum_{q=1}^{M}\left[\frac{\gamma(q)}{q}E\left(\frac{M}{q}\right)-\frac{1}{q}\right]=0. \qquad (15)$$

X. Relaţiile (12), (13) şi (14) se pot generaliza făcând împărţirea în aceleaşi subgrupe a fracţiilor $\frac{\alpha}{\beta}$ care satisfac inegalităţile

$$u < \frac{\alpha}{\beta} \leqslant V \text{ şi } \beta \leqslant N.$$

Transcriu numai relaţia corespunzătoare lui (12) celelalte având o serie mai complicată.

$$I_1(u \to v) \cdot E\left(\frac{M}{1}\right) + I_2(2u \to 2v) \cdot E\left(\frac{M}{2}\right) + \ldots$$

$$+ I_M(Mu \to Mv) E\left(\frac{M}{M}\right) = \sum_{q=1}^{M} [E(vq) - E(uq)] \qquad (16)$$

XI. Considerăm totalitatea numerilor conţinute de subgrupele [1], [2], ... [N]. Subgrupul [M] conţinând toate numerile prime cu M şi mai mici decât el. Cu alte cuvinte ne dăm dela început unul din ansamblurile de subgrupe şi deci cunoaştem dinainte numărul numerilor, suma numerilor luate la puterea k şi produsul lor care în cazul de faţă sunt pentru subgrupul [M], $\varphi(M), \sigma_k(M)$ şi $\pi(M)$.

Determinăm de câte ori face parte un număr q din această multime observând că q face parte din fiecare subansamblu [M] pentru care M este prim cu q şi mai mare decât q, adică de $I_q(q \to N)$ ori afară de cazul când $q = 1$, făcând parte din toate subansamble şi deci din mulţie de $[1 + I_1(1 \to N)]$ ori.

XII. Scriind relaţiile relative la număr, sume şi produs se obţine:

$$1 + \sum_{q=1}^{N} I_q(q \to N) = \sum_{q=1}^{N} \varphi(q). \qquad (17)$$

$$1 + \sum_{q=1}^{N} q^k I_q(q \to N) = \sum_{q=1}^{N} \sigma_k(q). \qquad (18)$$

$$1^{I_1(1 \to N)} 2^{I_2(2 \to N)} 3^{I_3(3 \to N)} \ldots N^{I_N(N \to N)} = \pi(1) \cdot \pi(2) \ldots \pi(N) \qquad (19)$$

Relaţiile (17) şi (18) sunt demonstrate pe o altă cale de COMANDOR I. GH. LINTEŞ în cartea „*Teoria Indicatorilor*“ pag. 43.

XIII. Avem evident:

$$I_q(q \to N) + \varphi(q) = I_q(N).$$

Deci relațiile (17), (18) și (19) pot fi scrise și astfel:

$$1 + \sum_{q=1}^{N} I_q(N) = 2 \sum_{q=1}^{N} \varphi(q) \quad (20); \quad 2 + \sum_{q=1}^{N} q\, I_q(N) = 3 \sum_{q=1}^{N} \sigma(q) \quad (21)$$

$$\prod_{q=1}^{N} q^{I_q(N)} = \prod_{q=1}^{N} n(q).q^{\varphi(q)}. \quad (22)$$

XIV. Să presupunem acum că subansamblu [N] conține toți divizorii lui N, deci că conține n (N) numere, a căror sumă luate la puterea k-a este s_k(N) și al căror produs este p(N). Un număr q este găsit ca divizor la numerile q, $2q$, $3q$, ... $q\,E\left(\frac{N}{q}\right)$, prin urmare face parte din ansamblul subgrupelor [N] de $E\left(\frac{N}{q}\right)$ ori.

In acest caz avem relațiile:

$$\sum_{q=1}^{N} E\left(\frac{N}{q}\right) = \sum_{q=1}^{N} n(q) \quad (23) \qquad \sum_{q=1}^{N} q^k\, E\left(\frac{N}{q}\right) = \sum_{q=1}^{N} s_k(q) \quad (24)$$

$$1^{E\left(\frac{N}{1}\right)} 2^{E\left(\frac{N}{2}\right)} \ldots N^{E\left(\frac{N}{N}\right)} = p(1).p(2) \ldots p(N). \quad (25')$$

Relația (23) face obiectul problemei 3983 pe care am propus-o la pag. 238 vol. XXXVI și care încă n'a fost rezolvată.

XV. Din mulțimea de numere, considerată la paragraful precedent, izolăm mulțimea conținută de subgrupele $[a_1]$, $[a_2]$ ..., $[a_\varphi]$; în subgrupul $[a_i]$ găsindu-se toți divizorii numărului a_i prim cu N și mai mic decât N.

Un număr oarecare a_i prim cu N face parte din toate subgrupele $[ka_i]$ pentru care k este prim cu N și satisface inegalitatea $k \leqslant N$ a_i deci a_i se găsește cuprins în mulțime de $I_N\left(\frac{N}{a_i}\right)$ ori. Din această observație rezultă:

$$\sum_{i=1}^{\varphi} I_N\left(\frac{N}{a_i}\right) = \sum_{i=1}^{\varphi} n(a_i) \quad (25) \qquad \sum_{i=1}^{\varphi} a_i^k\, I_N\left(\frac{N}{a_i}\right) = \sum_{i=1}^{\varphi} s_k(a_i) \quad (26)$$

$$\prod_{i=1}^{\varphi} a_i^{I_N\left(\frac{N}{a_i}\right)} = \prod_{i=1}^{\varphi} p(a_i). \quad (27)$$

XVI. Dacă din aceiaşi mulţime considerată la XIV izolăm mulţimea formată de subgrupele $[d_1]$, $[d_2]\ldots$ $[d_n]$ şi observăm că un divizor d_i este divizor al tuturor numerilor $k\,d_i$ în care k este divizor al lui N/d_i, deci că d_i se găseşte în mulţime de $n\,(N/d_i)$ ori, deducem

$$\sum_{i=1}^{n} n\,(N/d_i) = \sum_{i=1}^{n} n\,(d_i) \tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^k \cdot n\left(\frac{N}{d_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} s_k\,(d_i) \tag{29}$$

$$\prod_{i=1}^{n} d_i^{n(N/d_i)} = \prod_{i=1}^{n} p\,(d_i). \tag{30}$$

Relaţia (28) este pur formală, deoarece termenii sumei din membrul I diferă de termenii sumei din membrul 2 numai prin ordinea în care sunt scrişi.

XVII. Egalităţile de mai sus, odată stabilite, pot fi demonstrate cu uşurinţă în diferite moduri. Astfel relaţiile (12) se poate deduce adunând relaţiile ce se obţin din (2) dând lui N valorile $1, 2, 3, \ldots N$ şi observând că un număr oare care q este divizor al tuturor numerilor Kq în care $K \leqslant N$.

Dacă în (12) dăm lui N toate valorile dela 1 la N şi observăm că:

$$E\left(\frac{N}{1}\right)+E\left(\frac{N}{2}\right)+E\left(\frac{N}{3}\right)+\ldots+E\left(\frac{N}{N}\right)=E\left(\frac{p}{p}\right)+E\left(\frac{p+1}{p}\right)+\ldots$$

$$+E\left(\frac{N}{p}\right)=p\,\frac{E\left(\frac{N}{p}\right)\left[E\left(\frac{N}{p}\right)+1\right]}{2}+E\left(\frac{N}{p}\right)\left[N+1-p\left(\frac{E}{p}\right)\right]$$

după ce adunăm termen cu termen şi facem simplificările necesare, obţinem:

$$\sigma(1)\,S\left(\frac{N}{1}\right)+\sigma(2)\,S\left(\frac{N}{2}\right)+\ldots+\sigma(N)\,S\left(\frac{N}{N}\right)=\frac{N(N+1)(N+2)}{6} \tag{31}$$

unde $\sigma(i)$ este suma numerilor prime cu i şi mai mici decât el iar $S(j)$ suma întregilor m care satisfac inegalitatea $m \leqslant j$ adică suma primelor $E(j)$ numere.

XVIII. Deasemenea din relaţiile care conţin numerile lui LEGENDRE, ţinând seamă de inegalităţile pe care le satisfac aceste numere, se pot obţine neegalităţi interesante între unele din funcţiunile aritmetice considerate.

Astfel din (12) şi (23), deoarece $i-1<(i)\leqslant i$, deducem:

$$\frac{M+1}{2}\leqslant\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{i}\varphi(i)<\frac{M+1}{2}+\sum_{i=1}^{M}\varphi(i) \qquad (32)$$

$$N\sum_{i=2}^{N}\frac{1}{i}<\sum_{i=1}^{N}n(i)\leqslant N\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} \qquad (33)$$

şi deoarece:

$$2E\left(\frac{N}{i}\right)\leqslant E\left(\frac{2N}{i}\right)\leqslant 2E\left(\frac{N}{i}\right)+1 \text{ şi } E\left(\frac{2N}{N+i}\right)=1 \quad (i=1,2,\ldots N)$$

tot din egalităţile (12) şi (23) se deduce:

$$\sum_{i=M+1}^{2M}\varphi(i)\leqslant M^2\leqslant\sum_{i=1}^{2M}\varphi(i) \qquad (34)$$

$$N\leqslant\sum_{i=1}^{N}[n(N+i)-n(i)]\leqslant 2N. \qquad (35)$$

Exemplele acestea sunt suficiente pentru a aprecia atât eficacitatea metodei întrebuinţate cât şi importanţa relaţiilor stabilite.

I. B. FLORESCU.

NOTE MATEMATICE

14. *Asupra problemei 5699.* Enunţul cere rezolvarea ecuaţiei

$$\sin^2\left(\frac{\pi x}{1+x+x^2}\right)=\sin\left(\frac{\pi x^2}{1+x+x^2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{1+x+x^2}\right).$$

In soluţia pe care am dat-o la pag. 256, Vol. LII am făcut tranfsormarea

$$a=b=\frac{\pi x}{1+x+x^2};\quad a+c=\frac{\pi x^2}{1+x+x^2};\quad b+c=\frac{\pi}{1+x+x^2}.$$

Recent, d-l I. B. FLORESCU observă că această substituţie nu se poate întrebuinţa decât în cazul particular $x=\pm 1$ şi este de părere că problema trebue considerată ca nerezolvată.

La observaţia d-lui I. B. FLORESCU răspund că ecuaţia particulară dată a putut fi rezolvată prin substituţia făcută tocmai pentrucă $x^2=1$,

In general, orice ecuație de forma

$$\sin\pi f_1 \cdot \sin\pi f_2 = \sin\pi f_3 \cdot \sin\pi f_4 \qquad (1)$$

unde f_1 sunt funcțiuni de x, se pot rezolva prin aceeași metodă dacă

$$f_1 - f_2 = f_3 - f_4$$

ceea ce în cazul problemei 5699 are loc dacă $f_3 = f_4$. Dacă însă f_1 sunt funcțiuni, nelegate prin vre-o condiție, atunci ecuația (1) nu se poate rezolva prin metoda pe care am aplicat-o la problema 5699 și pentru acest caz general observația d-lui I. B. FLORESCU este justificată.

C. MIHU.

15. *Asupra problemei 3182.* Enunțul acestei probleme este:

La un joc cu 9 căișori, o persoană pune de 900 ori totdeauna pe Nr. 1 și câștigă de 65 ori. Este acel joc corect?

Soluția dată în G. M., XXXI, p. 227 este complet greșită. Ea lasă impresia că din două aruncări cu banul trebue să iasă odată „capul" și odată „stema". Altfel banul nu este omogen.

Nu este nevoie să cunoaștem rezultatele teoriei probabilităților pentru a ne da seama că un atare punct de vedere este complet falș.

Chestiunea care formează obiectul problemei 3182 este prima într'un lanț de judecăți care constitue azi baza teoriei moderne a fenomenelor colective, fie de natură bio-socială, fie de natură fizică. Un motiv în plus, care ne-a determinat să reluăm, pentru beneficiul tinerilor corespondenți, soluția corectă a problemei.

Dacă p este probabilitatea ca un anumit eveniment să se producă, se știe că

$$\pi_s = C_n^s p^s q^{n-s} \qquad (q = 1 - p)$$

este probabilitatea ca într'un șir de n observații fenomenul considerat să se producă de s ori. Oricât ar fi de mare n (finit) și oricât ar fi p de apropiat de unitate, probabilitatea ca fenomenul să nu apară niciodată, $\pi_0 = q^n$, este diferită de zero. Din punct de vedere al calculului, acest lucru este deci *posibil*.

Totuși pentru rațiuni care țin de experiența comună, teoria modernă a statisticei matematice admite așa numita lege a variației statistice după care frecvența observată a unui fenomen într'un

şir de observaţii nu poate lua orice valoare fără să nu indice că ceva anormal s'a petrecut în legătură cu experimentarea apariţiei fenomenului considerat.

Se vede imediat că $\sum_0^n{}_s \pi_s = (p+q)^n = 1.$

Să determinăm acum valorile s' şi s'' astfel ca

$$\sum_0^{s'}{}_s \pi_s \leqslant \frac{1}{40}\,,\quad \sum_0^{s'+1}{}_s \pi_s > \frac{1}{40}\,;\quad \sum_{s''}^{n}{}_s \pi_s \leqslant \frac{1}{40}\,,\quad \sum_{s''-1}^{n}{}_s \pi_s > \frac{1}{40}\cdot \quad (1)$$

Să notăm cu S numărul de ori în care apare fenomenul într'un şir de n observaţii. S este frecvenţa statistică. Din (1) deducem că probabilitatea ca $s' \leqslant S \leqslant s''$ este mai mare decât sau egală cu $\frac{19}{20}$. Legea variaţiei statistice ne spune că orice frecvenţă statistică care iese în afara intervalului de variaţie statistică este *semnificativă*, adică ne arată prezenţa unei anomalii în producerea fenomenului considerat [1].

Când n este mare, calculul sumelor care conduc la determinarea lui s' şi s'' este anevoios, iar uneori imposibil în practică. Dificultatea se ocoleşte căutându-se a se determina o curbă care să se apropie cât mai mult de linia poligonală ale cărei vârfuri au coordonatele (s, π_s), linie care se numeşte poligonul frecventelor teoretice. Cu ajutorul acestei curbe sumele $\sum_0^s{}_s$, $\sum_{s'}^{n}{}_s \pi_s$ se transformă în integrale.

Se demonstrează că natura acestor curbe depinde de mărimea parametrului pearsonian

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}\,.$$

Dacă $\sqrt{\beta_1}$ este neglijabil, poligonul frecvenţelor este aproximat de curba lui GAUSS:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{(s-np)^2}{2npq}}\,.$$

---

1) N. GEORGESCU ROEGEN, *Metoda Statistică*, Biblioteca Institutului Central de Statistică, Bucureşti, 1933, p. 174 et seq.

In celălalt caz, poligonul frecvențelor este aproximat de curba de tip III PEARSON (după numele marelui statistician englez KARL PEARSON):

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\gamma a} e^{-x\gamma}$$

unde $a = \frac{2\sqrt{npq}}{q-p}\left[1 + \frac{1}{n}\right]$; $\gamma = \frac{2\sqrt{npq}}{q-p}$,

iar $x = -(n+1)p + \frac{1}{2} + s$ [1].

In problema noastră $n = 900$, $p = \frac{1}{9}$, deci $\sqrt{\beta_1} = 0{,}082$. Putem lua ca aproximație curba lui GAUSS. In acest caz se știe că intervalul de variație statistică este simetric în raport cu frecvența teoretică $np = 100$ și are ca mărime de patru ori abaterea tip $\sigma = \sqrt{npq} = 9{,}43$. Intervalul de variație statistică este deci $(np - 2\sqrt{npq},\ np + 2\sqrt{npq})$, adică $(81{,}119)$ [2]. Cum calul Nr. 1 a ieșit numai de 65 ori, această frecvență este semnificativă ca ieșind din intervalul de variație statistică.

Ceva mai mult diferența între frecvența teoretică, $np = 100$ și frecvența observată, 65, este egală cu $3{,}71\sigma$. Tablele integralei funcțiunii lui GAUSS [3] ne arată că acest lucru nu se poate întâmpla decât odată în 10.000 de șiruri a câte 900 jocuri. Jucătorul avea deci tot dreptul să-și pună întrebarea care a făcut obiectul problemei 3182.

Afirmând că jocul nu a fost corect, greșim numai odată în 10.000 cazuri. Afirmația care se adevereşte într'un număr extrem de mare de cazuri și poate fi infirmată într'un număr foarte mic de cazuri se deosibește de afirmația aristotelică care este valabilă întotdeauna. O astfel de afirmație poartă numele de adevăr stochastic.

N. GEORGESCU ROEGEN.

---

1) N. GEORGESCU ROEGEN, loc. cit., p. 468 et seq.
2) N. GEORGESCU ROEGEN, loc. cit., p. 175.
3) N. GEORGESCU ROEGEN, loc. cit., p. 501.

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. Junie—Julies 1947. Ano XX. No, 4—5. B. I. BAIDAFF: Relaţiuni între segmentele limitate de conice omotetice de centru comun. B. I. BAIDAFF: Axa radicală a curbelor de grad superior.

Časopis pro pěstování. Ročník 72—Sešit 2. Praha 1947. J. SRB: Sur les simplexes autopolaires d'une polarité de l'espace à *n* dimensions. ST. SCHWARZ: On the extension of the JORDAN—KRONECKER'S „Principle of reduction" for inseparable polynomials. Urmează şi alte articole nematematice:

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVII. Nr. 10, Decembrie 1947. E. VIŞA: Asupra unor cubice unicursale. Notă matematică. Chestiuni de examen. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

ING. C. N. AVRAM: Grinzi continui cu moment de inerţie variabil. Tipografia Geniului Bucureşti, 1946.

TIBERIU IONESCU, GH. D. SIMIONESCU, C. IONESCU-BUJOR, Aritmetică pentru clasa II-a a Gimnaziului Unic. Editura „Remus Cioflec". 1947.

TIBERIU IONESCU, GH. D. SIMIONESCU, C. IONESCU-BUJOR. geometrie pentru clasa II-a a Gimnaziului Unic. Editura „Remus Cioflec" 1947.

TIBERIU IONESCU, GH. D. SIMIONESCU, C. IONESCU-BUJOR, geometrie pentru clasa III-a a Gimnaziului Unic. Editura „Remus Cioflec" 1947.

Tiberiu Ionescu, Gh. D. Simionescu, C. Ionescu-Bujor. *Trigonometrie* pentru clasa VI-a liceu; aprobată de Ministerul Educaţiei Naţionale; Ed. I.; Editura „Remus Cioflec".

In *prefaţă* se scrie că lucrarea cuprinde, în general, desvoltarea programei analitice, autorii contribuind cu experienţa lor dela catedră.

După *prefaţă*, urmează rapoartele de aprobare ale referenţilor, d-nii profesori SPIRIDON ZVEREA şi N. N. MIHĂILEANU, cari relevează valoarea didactică a acestui manual de trigonometrie, subliniind inovaţiile fericite în expunerea teoretică, precum şi calităţile pedagogice prin foarte numeroase exerciţii, alese şi în mod gradat înlănţuite în spiritul *Gazetei Matematice*.

Urmează, apoi un *succint istoric*, atât cât e necesar într'un manual adresat şcolarilor.

După o *introducere*, în care se arată precizia folosinţei *calculului trigonometric* faţă de *metoda grafică*, se defineşte studiul *goniometriei* şi al *trigonometriei*.

In Cap. I: *Unghiuri şi Arce*, dându-se atenţie valorilor în *radiani* şi introducându-se *gradele centesimale*, deoarece — după cum spun autorii în prefaţă — *„foarte multe"* aparate au cercurile împărţite în patru sute părţi egale. „In afară de numeroasele exemple şi aplicaţii directe expunerei teoretice, acest capitol cuprinde 10 exerciţii, la care se indică şi rezultatele.

In cap. II.: *Rapoarte trigonometrice* şi valorile lor date în *tabele naturale*, se evidenţiază *caracteristica manualului*, *„pe care se clădeşte*

întreaga trigonometrie", prin definirea *sinusului, cosinusului, tangentei* şi *cotangentei* sub *forma de rapoarte, numite rapoarte trigonometrice, şi faţă de variaţia lor*, poartă numele de *funcţiuni trigonometrice.*

Reese, după cum se arată şi în introducere, *suprimarea numirei de linii trigonometrice*, care e improprie, după cum se exprimă autorii la pagina 13, deoarece *sin, cos, tg., cotg.*, nu sunt linii (segmente), ci rapoarte, *sunt numere abstracte, şi deci nu se măsoară cu nici un fel de unitate de măsură.*

In afară de exemple şi aplicaţii directe, capitolul conţine 7 exerciţii.

In Cap. III.: *Relaţiile în triunghiul dreptunghic şi rezolvarea triunghiurilor dreptunghice*, cu exemple şi 6 exerciţii.

In Cap. IV: se definesc *rapoartele trigonometrice pe un cerc de rază* R, se studiază *variaţia funcţiunilor trigonometrice;* se expune *reducerea la primul cadran* şi găsirea arcelor care corespund unui raport trigonometric dat. In cuprinsul capitolului se pomeneşte de „*cerc trigonometric*", (R = 1), se stăruie însă asupra nepotrivirei acestei numiri precum şi a aceleia de „*linii trigonometrice*", deoarece pentru *omogenitatea formulelor* de fizică şi matematică, trebue a se şti că funcţiile goniometrice sunt *numere abstracte* (coificienţi numerici). — „*De accea* (citez pag. 34 al. 2) *ne-am hotărît să înlăturăm numirile de „linii trigonometrice* şi *cerc trigonometric*". Acest capitol cuprinde foarte numeroase exemple, aplicaţii, exerciţii rezolvate şi nerezolvate.

In Cap. V. se tratează *formulele fundamentale* şi *rapoartele trigonometrice* ale *câtorva arce;* capitolul se încheie cu 35 exerciţii.

In Cap. VI.: se arată *folosirea logaritmilor, a tabelelor de logaritmi* a funcţiunilor trigonometrice şi *rezolvarea triunghiurilor dreptunghice;* capitolul se termină cu 19 exerciţii şi probleme.

In Cap. VII.: se studiază *funcţiunile trigonometrice ale unei sume (diferenţe) de arce*, funcţiile trigonometrice ale *arcelor multiple*, şi funcţiile trigonometrice ale *arcelor pe jumătate.* Capitolul se încheie cu 51 exerciţii şi probleme.

In Cap. VIII.: se arată *transformarea sumelor în produse* şi conţine 22 exerciţii în afară de numeroase exemple.

Capitolele IX şi X.: *cuprind relaţiile între elementele unui triunghiu oarecare* şi *rezolvarea acelor triunghiuri*, terminându-se respectiv cu 15+24 exerciţii şi probleme.

Cap. XI.: *tratează razele cercurilor, circumscrise, înscris şi tritangente*, având 20 exerciţii finale.

In Cap. XII.: se definesc *identităţile şi ecuaţiile trigonometrice*, rezolvându-se şi propunându-se foarte numeroase exerciţii şi probleme.

La Cap. XIII. se fac aplicaţii la *calculul distanţelor şi înălţimilor*, precum şi la *statică*, cu peste 25 probleme.

Cursul se termină cu un capitol conţinând *42 probleme propuse la examenul de admitere la Şcoalele Politehnice şi la concursul „Gazetei Matematice"*. De altfel în nota dela pag. 173 se spune: „*O parte din*

exerciţii au fost culese din Gazeta Matematică şi din Revista Matematică din Timişoara.

Aceste reviste şi mai târziu Suplimentul cu exerciţii al Gazetei Matematice (S. G. M.) au format gustul pentru matematici al multor generaţii de elevi".

* * *

Incheind această bibliografie, rezum caracteristicele acestei cărţi didactice, în următoarele :

a) *foarte numeroase şi variate exerciţii,* puse în mod gradat şi interesante pentru ca să placă şcolarilor, cărora li se adresează, şi să fie captivaţi de studiul trigonometriei, în particular şi de studiul matematicilor în general.

b) *introducerea gradelor centesimale ;*

c) *eliminarea termenilor de linii trigonometrice, înlăturarea cercului trigonometric, şi definirea sinusului, cosinusului, tangentei prin noţiunea de rapoarte trigonometrice (noţiuni abstracte).*

* * *

Acest curs de trigonometrie, aprobat de Ministerul Educaţiei Naţionale, prezentat de autorii lumii şcolare, reprezintă, pe deoparte, o lucrare alcătuită în spiritul *Gazetei Matematice,* menită să deschidă gustul de matematici şcolarilor, iar pe de altă parte un manual de trigonometrie plană, metodic alcătuit, cu foarte numeroase şi variate exerciţii şi mai ales cu o serie de *observaţii importante* pentru luminarea expunerii teoretice.

Personal, apreciez că ar fi fost mai nimerit a se preciza la definirea *rapoartelor trigonometrice* (Cap. II, punctul 2) că unghiul a e un unghiu *ascuţit,* şi să se arate apoi semnele acelor rapoarte sau funcţiuni, în cazul unghiului a, *obtuz* sau mai mare.

Deasemenea la Cap. VII, deşi consider, ca foarte simplă, întrebuinţarea metodei proecţiilor pentru aflarea funcţiilor trigonometrice ale sumei (diferenţe) de arce, totuşi cred, că pentru a se scoate în evidenţă întrebuinţarea *rapoartelor trigonometrice* s'ar fi putut da o demonstrare directă în legătură cu definiţia rapoartelor.

G-AL GH. I. LITEANU.

A. GLODEN. Table de solutions de la congruence

$$x^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

pour $500000 < p < 600000$. Luxemburg 1947, la autr.

T. VESCAN : Relativistical explication concerning the Spin-Anomaly. (Ext. din Acta Bolyaiana. Vol. I. 1947).

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 84 (Gazeta Matematică XXVII, 197). Se întreabă de unde a putut lua GH. ASACHI ştirea că SOLIMAN al II-lea se ocupa cu matematica.

Este imposibil a preciza din care anume document a luat GH. ASACHI această informaţie, se pot însă indica documente care dau această informaţie. Astfel:

1°. *Istoria Imperiului Otoman* (1453—1774) scrisă în limba germană de I. DE HAMMER şi tradusă în franţuzeşte de HELBERT (1839) sub titlul *Histoire de l'Empire Ottoman* (Bibliothèque utile XXIX, L. COLLAS et E. DRIAULT) la pag. 54 citează din HAMMER: «... *son génie entreprenant, ses vues économiques unies à son amour pour la protection généreuse qu'il accorda aux savants* ...», vorbind de SOLIMAN al II-lea.

2°. *Istoria Imperiului Otoman* de D. CANTEMIR, scrisă în latineşte (1715—1716), tipărită în englezeşte la Londra (1734—36), tradusă în franţuzeşte la Paris (1743), în nemţeşte la Hamburg (1755) şi în româneşte la Bucureşti 1876.

De sigur că ASACHI a cunoscut aceste lucrări, din care şi-a luat elementele pe care le-a introdus în nuvela sa istorică „PETRU RAREŞ".

LT.-COL. E. ST. IACOB.

DIVERSE

Înştiinţare pentru domnii membri ai Societăţii „Gazeta Matematică"

Se reaminteşte domnilor membri ai Soc. „Gazeta Matematică" că începând dela 1 Septembrie 1947 cotizaţia la *Gazeta Matematică* este de 150 lei lunar.

De oarece apariţia regulată a revistei şi deci scopul pentru care ea apare de 53 de ani, stimularea învăţământului matematic, nu poate fi asigurat de cât prin contribuţia membrilor societăţii, domnii membrii sunt rugaţi insistent să se pună la curent cu cotizaţia.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3513. *Să se desvolte determinantul*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1+h_1 & (a_1+h_2)^2 \ldots & (a_1+h_{n-1})^{n-1} \\ 1 & a_2+h_1 & (a_1+h_2)^2 \ldots & (a_2+h_{n-1})^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n+h_1 & (a_n+h_2)^2 \ldots & (a_n+h_{n-1})^{n-1} \end{vmatrix}.$$

L. WEISS.

Să notăm

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \dots a_1^i & (a_1+h_{i+1})^{i+1} \dots (a_1+h_{n-1})^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 \dots a_2^i & (a_2+h_{i+1})^{i+1} \dots (a_2+h_{n-1})^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 \dots a_n^i & (a_n+h_{i+1})^{i+1} \dots (a_n+h_{n-1})^{n-1} \end{vmatrix}$$

/ Cum

$$(a_k+h_{i+1})^{i+1} - C_{i+1}^1 h_{i+1} a_k^i - C_{i+1}^2 h_{i+1}^2 a_k^{i-1} - \dots - h_{i+1}^{i+1} = a_k^{i+1}$$

deducem $\Delta_i = \Delta_{i+1}$. Deci

$$\Delta_0 = \Delta_1 = \dots\dots = \Delta_{n-1}.$$

Insă $\Delta_0 = \Delta$, deci $\Delta = \Delta_{n-1}$, prin urmare

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \dots a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 \dots a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 \dots a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ultimul determinant este determinantul lui VANDERMONDE de ordinul n, care se desfăşoară clasic.

Note. 1. Determinantul Δ este independent de h_i, proprietate interesantă. In această ordine de idei am propus problema 6435 din acest număr.

2. Au fost anunţaţi pe copertă ca rezolvitori: G. G. CONSTANTINESCU, V. GR. DĂNCIULESCU, P. P. DRĂGHICESCU, P. I. GHIŞOIU, D. IOVĂNESCU, I. MIU, I. PANŢU, ŞT. PÂRVĂNESCU, AUREL N. POPA, ALEX. V. ROŞCULEŢ şi DORA SONNENREICH.

N. G. R.

PROBLEMA 4638. *Tangenta în* M *la curba* (M) *şi perpendiculara pe raza vectoare* OM *întâlnesc axele rectangulare* Ox, Oy *în* T, T' *şi* P, P'. *Dacă* M' *şi* M" *sunt proiecţiile lui* M *pe aceleaşi axe, se cere să se găsească curba* (M) *pentru care avem una din egalităţile:*

$$\pm \text{ Supr. } OTT' \pm \text{ Supr. } OPP' = \pm 2 \text{ Supr. } OMM'M''.$$

Semnele $\pm$ *se vor lua în toate modurile posibile.*

Să se compare rezultatele cu acelea găsite la problema 886, rezolvată în Gazeta Matematică, Vol. XXXIV la pag. 141.

G-L GH. BUICLIU.

Fie $M(x, y)$. Se găseşte cu uşurinţă

$$(OM)\quad Y = \frac{y}{x}X,\quad (PP')\quad Y - y = -\frac{x}{y}(X - x);$$

$$(TT')\quad Y - y = y'(X - x)$$

$$\therefore\quad P\left[\frac{x^2+y^2}{x},\ 0\right];\ P'\left[0,\ \frac{x^2+y^2}{y}\right];\ T\left[\frac{xy'-y}{y'},\ 0\right];\ T[0,\ y-xy'].$$

Cu aceste elemente se găseşte

$$Supr.\ OTT' = -\frac{(y-xy')^2}{2y'};\quad Supr.\ OPP' = \frac{(x^2+y^2)^2}{2xy};$$

$$Supr.\ OM'MM'' = xy.$$

Luând semnele în toate felurile în relaţia din enunţ avem de studiat 4 cazuri.

Cazul I. $Supr.\ OTT' + Supr.\ OPP' = 2\ Supr.\ OMM'M''$ conduce la ecuaţia

$$x^3yy'^2 - (x^4+y^4)y' + xy^3 = 0 \qquad (1)$$

$$\therefore\quad y' = \frac{x}{y}\quad (2)\qquad \text{şi}\qquad y' = \frac{y^3}{x^3} \qquad (3)$$

care se integrează imediat şi dau curbele

$$y^2 - x^2 = a^2\quad \text{şi}\quad y^2 - x^2 = ax^2y^2 \qquad (4)$$

o iperbolă echilateră şi o cuartică.

Cazul II. $Supr.\ OTT' + Supr.\ OPP' = -2\ Supr.\ OM'MM'.$

Inlocuind suprafeţele prin valorile lor în funcţie de x, y şi y' se ajunge la ecuaţia diferenţială

$$x^3yy'^2 - (x^4 + y^4 + 8x^2y^2)y' + xy^3 = 0 \qquad (5)$$

$$\therefore\quad y' = \frac{x^4+y^4+8x^2y^2 \pm \sqrt{x^8+y^8+62x^4y^4+16x^2y^6+16x^6y^2}}{2x^3y}.$$

Pentru integrare facem schimbarea de variabilă

$$y = tx\quad \therefore\quad y' = t + xt' \qquad (6)$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{x} = \frac{2tdt}{t^4+6t^2+1 \pm \sqrt{t^8+16t^6+62t^4+16t^2+1}} = 0.$$

Partea întâi se integrează imediat. Pentru partea a doua, pe care o notăm cu I, facem schimbarea de variabilă

$$t^2 = u \quad \therefore \quad 2tdt = du \tag{7}$$

și obținem

$$I = \int \frac{du}{u^2 + 6u + 1 \pm \sqrt{u^4 + 16u^3 + 62u^2 + 16u + 1}}$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{u^2 + 6u + 1 \mp \sqrt{u^4 + 16u^3 + 62u^2 + 16u + 1}}{-4u(u^2 + 6u + 1)} du$$

$$\therefore \quad I = -\frac{1}{4}\int \frac{du}{u} \pm \int \frac{\sqrt{u^4 + 16u^3 + 62u^2 + 16u + 1}}{4u(u^2 + 6u + 1)} du.$$

In definitiv

$$Lx = -\frac{Lu}{4} \pm \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{u^4 + 16u^3 + 62u^2 + 16u + 1}}{u(u^2 + 6u + 1)} du + C. \tag{8}$$

Curbele (M) corespunzătoare cazului II sunt acelea ale căror ecuații sunt (8), în care C este o constantă, iar u este legat de x și y prin relațiile (6) și (7). Integrala care figurează în (8) este o integrală eliptică, ea nu poate fi calculată prin mijloacele elementare.

Cazul III. — *Supr.* OTT' + *Supr.* OPP' = 2 *Supr.* OM'MM''

$$\therefore \quad x^3 y y'^2 + (x^4 + y^4 - 4x^2y^2) y' + xy^3 = 0. \tag{9}$$

Procedăm ca la cazul II, făcând succesiv schimbările de variabile

$$y = tx \quad \text{apoi} \quad t^2 = u$$

și găsim

$$\frac{dx}{x} = -\frac{du}{u} \mp \frac{\sqrt{u^2 - 6u + 1}}{4u(u - 1)} du$$

$$\therefore \quad Lx = -\frac{1}{4} Lu \mp \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{u^2 - 6u + 1}}{u(u - 1)} du + C. \tag{10}$$

Notând ultima integrală cu H și făcând schimbarea de variabilă definită de

$$\sqrt{u^2 - 6u + 1} = uz - 1 \tag{11}$$

se găsește

$$H = \left[-\frac{1}{4(z - 1)} + \frac{1}{4(z + 1)} + \frac{1}{4(z - 3)} - \frac{2}{z^2 - 2z + 5} \right] dz$$

care se integrează uşor. Efectuând calculele şi ducând în (10) găsim că ecuaţiile curbelor (11) sunt

$$Lx = -\frac{1}{4}Lu \mp \left[-\frac{L(z-1)}{4} + \frac{L(z+1)}{4} + \frac{L(z-3)}{4} - \operatorname{arctg}\frac{z-1}{2}\right] + C. \qquad (12)$$

Cazul IV. — *Supr.* OTT'+*Supr.* OPP'= — 2 *Supr.* OM'MM".

Să găseşte ecuaţia diferenţială

$$x^3yy'^2 + (x^4 + y^4 + 4x^2y^2)y' + xy^3 = 0 \qquad (13)$$

care prin schimbările de variabilă definite de (6), (7) şi (11) conduce, după efectuarea tuturor calculelor la

$$Lx = -\frac{1}{4}Lu \mp L\frac{z+1}{(z-1)(z+3)} + C. \qquad (14)$$

Ori ce altă combinare de semne, se reduce la unul din cele 4 cazuri studiate până aici.

Legătura între această problemă şi problema 886 este că curbele (M) din această problemă sunt traiectoriile ortogonale ale curbelor (M) dela punctul IV al problemei 886. In adevăr în vreme ce ecuaţiile diferenţiale ale acelor curbe sunt

$$F(x, y, y') = 0$$

ecuaţiile diferenţiale ale curbelor problemei de faţă sunt

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right).$$

MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila).

D-l CĂLIN I. C. DIMITRIU (student inginer Bucureşti) a rezolvat exact şi complet această problemă, pe cale analoagă.

Problema de faţă se putea rezolva în câte-va cuvinte observând numai că este destul a înlocui pe y' prin $-\frac{1}{y'}$ în ecuaţiile diferenţiale stabilite la problema 886. Totuşi am dat aproape în întregime soluţia trimisă de d-l M. NEGREA pentru a reînprospăta integrarea unor ecuaţiuni diferenţiale.

G-L GH. B.

PROBLEMA 6044. *Se dă un cerc* (C), *o tangentă fixă* (T) *a acestui cerc şi o dreaptă* Δ *perpendiculară pe tangenta* (T). *Tangentele la cerc, dintr'un punct* M, *mobil pe* Δ, *taie tangenta* (T) *în punctele* P *şi* Q. *Se cere locul geometric al intersecţiilor perpendicularelor ridicate în* P *şi* Q *respectiv pe* MP *şi* MQ.

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie analitică. Alegem ca axă *ox* tangenta (T) şi ca axă *oy* dreapta Δ. Notând cu r raza cercului (C), centrul său are coordonatele $x = a$, $y = r$. Fie M $(0, \lambda)$ punctul mobil pe Δ.

Ecuaţia care dă coeficienţii unghiulari ai celor două tangente este[1]:

$$\begin{vmatrix} 1 & m \\ -a & \lambda - r \end{vmatrix}^2 = r^2(1 + m^2)$$

$$\therefore \quad (a^2 - r^2)\, m^2 + 2a(\lambda - r)\, m + \lambda(\lambda - 2r) = 0. \qquad (1)$$

Fie m_1 şi m_2 rădăcinile acestei ecuaţii. Cele două tangente din M este:

$$y - \lambda = m_1 x \quad \text{şi} \quad y - \lambda = m_2 x \qquad (2)$$

iar m_1 şi m_2 verifică relaţiile

$$m_1 + m_2 = -\frac{2a(\lambda - r)}{a^2 - r^2}\,;\; m_1 m_2 = \frac{\lambda(\lambda - 2r)}{a^2 - r^2} \qquad (3)$$

Punctele P şi Q se află făcând în ecuaţiile tangentelor (2) $y = 0$, deci

$$P\left(-\frac{\lambda}{m_1}, 0\right);\; Q\left(-\frac{\lambda}{m_2}, 0\right).$$

Perpendicularele în P şi Q pe MP şi MQ vor avea ecuaţiile:

$$y = -\frac{1}{m_1}\left(x + \frac{\lambda}{m_1}\right)\;;\; y = -\frac{\lambda}{m_2}\left(x + \frac{\lambda}{m_2}\right). \qquad (4)$$

Locul geometric al intersecţiei acestor drepte se capătă eliminând parametrii λ, m_1 şi m_2 între ecuaţiile (4) şi (3).

Din (4) deducem:

$$m_1 y = -x - \frac{\lambda}{m_1}\;;\; m_2 y = -x - \frac{\lambda}{m_2}. \qquad (5)$$

---

1) G. D. SIMIONESCU: „O metodă pentru scrierea ecuaţiei tangentelor dintr'un punct exterior la un cerc" G. M. vol. XLIX p. 419.

Prin *scăderea* acestor ecuații și împărțirea cu $(m_1 - m_2)$ căci $m_1 \neq m_2$, obținem:

$$y = \frac{\lambda}{m_1 m_2} = \frac{a^2 - r^2}{\lambda - 2r} \qquad (6)$$

Adunând aceleași ecuații obținem:

$$(m_1 + m_2)\, y = -2x - \lambda \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

$$\therefore \qquad y = -\frac{2x}{m_1 + m_2} - \frac{\lambda}{m_1 m_2}.$$

Ținând seama însă de (3) și (6) ecuația devine:

$$2y = \frac{x(a^2 - r^2)}{a(\lambda - r)} \qquad (7)$$

Rămâne acum să eliminăm pe λ între (6) și (7). Pentru aceasta le scrim sub formele:

$$\lambda - 2r = \frac{a^2 - r^2}{y} \; ; \quad (7')\ \lambda - r = \frac{x(a^2 - r^2)}{2ay}. \qquad (6')$$

Prin scădere obținem în definitiv

$$(a^2 - r^2)(x - 2a) - 2ary = 0.$$

Locul geometric este deci o dreaptă ce trece prin punctul $(2a, 0)$.

S'au primit foarte bune soluții analitice, dela d-nii: ANTON I. VARGĂ, VASILE D. PĂLĂCEANU, MIRCEA D. POPA, C. N. BOERESCU (studenți politehnica București), EUGEN WEGENER (București), CRISTU I. CANTUNIAR, TRAIAN V. MUSTĂCESCU (elevi liceul „T. Maiorescu" București), VAL. G. M. STANCIU, MIHAIL EFTODE, CONST. GH. MIHALACHE (liceul militar Craiova), IACOB E. HARGHEL (lic. I. Maiorescu, Giurgiu), ȘTEFAN N. DAMIAN (liceul militar Iași), M. R. CONSTANTINESCU (Ploești).

S'au primit și două soluții greșite dintre care în una se dă o dreaptă ca loc, alta decât cea observată, iar în cealaltă o cubică!

Am propus această problemă ca aplicație la articolul citat, asupra ecuației tangentelor duse dintr'un punct la un cerc. Cum toate soluțiile primite au fost analitice, am publicat o soluție analitică.

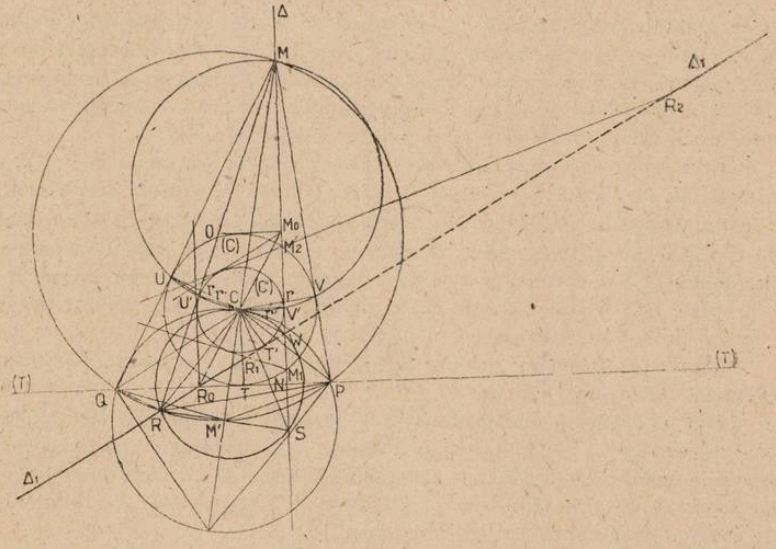
D-l Ing. D. STOICA mi-a arătat soluția *geometrică elementară* următoare pe cât de frumoasă pe atât de instructivă pentru corespondenții noștri.

G. D. S.

Soluție geometrică elementară. De oarece corespondenții noștri au trimis numai soluții bazate pe cunoștințe de geometrie analitică, vom arăta în cele ce urmează, după dorința d-lui Prof. GH. D. SIMIONESCU, autorul acestei probleme, că se putea da o soluție bazată numai pe cunoștințe de geometrie elementară, dintre cele mai simple, pe care de sigur le au toți corespondenții noștri, chiar cei mai tineri și-i îndemnăm să încerce să găsească asemenea soluții la toate problemele de geometrie. Prin aceste încercări își vor înmulți cunoștințele de geometrie și își vor desvolta încredeaea în cunoștințele lor, găsind de multe ori soluții simple și concrete, cum este întreaga geometrie elementară.

Dacă C și r sunt centrul și raza cercului dat (C), iar T, U, V punctele de contact ale acestui cerc cu dreptele PQ, QM, MP, avem : $CT = CU = CV = r$, iar dreapta MC este bisectoarea unghiului PMQ.

Când M se mișcă pe Δ, T rămâne fix, U și V se mișcă pe cercul (C).



Dacă R este punctul al cărui loc geometric se cere, MR este diametrul cercului O circumscris triunghiului variabil MPQ, fiindcă unghiurile MPR, MQR sunt drepte. Dacă (T) și Δ se tae în N, triunghiurile dreptunghice MNP, MQR sunt asemenea, fiindcă unghiurile lor ascuțite MPN, MRQ sunt egale, având aceeași măsură în cercul O. Urmează că unghiurile complimentare acestora : NMP, QMR sunt egale și că dreptele Δ și MR sunt simetrice față de bisectoarea MC, așa că cercul (C') cu centrul C și rază r', tangent la Δ în V', e tangent la dreapta MR într'un punct U, și avem : $CV' = CU' = r'$.

Dar cercul circumscris patrulaterului format din bisectoarele interioare și exterioare ale unghiurilor P, Q ale triunghiului MPQ, are centrul în punctul M', în care bisectoarea MC taie cercul O circumscris acestui triunghiu, așa că unind M' cu P și cu Q, avem $M'P = M'Q = M'C$.

Unim între ele punctele C, U, U' şi unim M' cu R. Patrulaterul MQRM' este înscris în cercul O, iar patrulaterul MUU'C este inscriptibil în cercul cu diametrul MC, fiindcă unghiurile CUM şi CU'M sunt drepte. Din egalitatea unghiurilor acestor patrulatere rezultă că triunghiurile M'QR şi CUU' au unghiurile corespunzătoare egale, deci sunt asemenea şi au laturile proporţionale: $M'Q/M'R = CU/CU$. Dar: $CU = r$; $CU' = r'$; $M'Q = M'C$, deci $M'C/M'R = r/r'$.

Unghiul MM'R este drept, fiindcă MR este un diametru al cercului O şi M' un punct pe acest cerc. Dreapta RM' taie dreapta Δ în un punct S. Unim C cu R şi cu S. Dreptele RM şi Δ fiind simetrice faţă de bisectoarea MM', şi RS fiind perpendiculară pe această bisectoare, triunghiul CRS este isoscel şi bisectoarea CM' îl împarte în două triunghiuri dreptunghice: CM'R şi CM'S, simetrice faţă de CM' şi avem: $M'R = M'S$ şi deci:

$$M'C/M'R = M'C/M'S = r/r'.$$

Aceste egalităţi arată, că dacă M se mişcă pe Δ, triunghiurile dreptunghiuri CM'R, CM'S rămân asemenea cu ele însăşi, fiindcă raportul catetelor lor este constant, de oarece r şi r' sunt constante, fiind depărtările de la centrul fix C, la dreptele fixe (T) şi Δ. Tot aşa triunghiul isoscel CRS rămâne asemenea cu el însuşi, fiind format din triunghiurile CM'R şi CM'S.

Prin urmare triunghiul variabil CRS rămâne asemenea cu el însuşi, are vârful C fix, iar vârful S se mişcă pe dreapta dată Δ. Rezultă că vârful R, al cărui loc geometric se cere, se mişcă pe dreapta Δ_1, care face cu Δ un unghiu egal cu RCS, de oarece, dacă W este punctul în care cercul circumscris triunghiului CRS taie dreapta Δ şi dacă numim Δ_1 dreapta care uneşte R cu W, dreptele CR cu CS şi Δ_1 cu Δ fac unghiuri egale, având aceeaşi măsură în cercul circumscris patrulaterului CRSW.

Rămâne să cercetăm dacă locul geometric căutat este dreapta Δ_1 întreagă sau numai unele părţi din ea.

Din patrulaterul inscriptibil CRSW rezultă că dreapta CW face unghiuri egale cu dreptele Δ şi cu Δ_1, fiindcă aceste unghiuri sunt respectiv egale cu unghiurile egale CRS şi CSR ale triunghiului isoscel CRS. Deci centrul C este egal depărtat de dreptele Δ şi Δ_1 şi cercul (C') tangent la Δ în punctul V' este tangent la dreapta Δ_1, într'un punct T'.

Din cele de mai sus rezultă că punctele mobile M şi R sunt punctele în care o tangentă variabilă la cercul fix (C') taie dreptele fixe Δ şi Δ Aceste două drepte nu au nici un punct interior cercului (C'), fiind tangente la acest cerc, aşa că prin ori-ce punct M al dreptei Δ se poate duce o tangentă la cercul (C') şi se găseşte punctul R corespunzător pe dreapta Δ_1 şi invers prin ori-ce punct R al dreptei Δ_1 se poate duce o tangentă la (C') şi se găseşte punctul M corespunzător pe dreapta Δ.

Un punct R al dreptei Δ_1 face parte din locul geometric cerut de enunţul problemei, dacă punctul M corespunzător pe dreapta Δ este exterior cercului dat (C) fiindcă în acest caz, se pot duce prin M tangentele MP, MQ la cercul (C) aşa că perpendicularele ridicate în P pe MP şi în Q pe MQ se taie în punctul R, conform enunţului problemei.

Un punct R al dreptei Δ_1 nu face parte din locul geometric cerut de enunțul problemei, dacă punctul M corespunzător pe dreapta Δ este interior cercului dat (C), fiindcă, în acest caz, nu se pot duce tangentele MP, MQ la cercul C și punctul R nu se mai găsește, conform enunțului problemei, ridicând perpendiculare pe tangentele MP, MQ.

Dreapta Δ are puncte în interiorul cercului (C), când $r' > r$ și atunci taie cercul (C) în două puncte M_1 și M_2, iar tangentele corespunzătoare duse prin M_1 și M_2 la cercul (C') taie dreapta Δ_1 în R_1 și R_2. Când punctul mobil M este interior cercului (C), se mișcă pe Δ între M_1 și M_2, iar punctul R corespunzător, ducând tangenta MR la cercul (C'), se mișcă pe Δ_1 între R_1 și R_2, deci segmentul R_1R_2 al dreptei Δ_1 nu face parte din locul geometric căutat.

Așa dar: *locul geometric al punctului* R *este dreapta* Δ_1, *afară de segmentul* R_1R_2 *cuprins între tangentele duse la cercul* (C') *prin punctele* M_1 *și* M_2, *în care dreapta* Δ *taie cercul dat* (C), *în cazul când* $r' > r$.

Observație. Dacă punctul M este la infinit pe dreapta Δ, punctul R este în R_0, la întretăierea dreptei Δ_1 cu (T) și cu tangenta paralelă cu Δ, dusă la cercul (C'). Punctul R_0 este simetric cu N față de T. Când R este la infinit pe Δ_1, punctul M este la întretăierea M_0 a dreptei Δ cu tangentele la (C) și (C'), paralele, respectiv cu (T) și cu Δ_1. Punctul M_0 este simetric cu N, față de V' și cu R_0, față de C. Rezultă că triunghiul W M_0R_0 este isoscel și că bisectoarea CW a dreptelor Δ și Δ_1 este perpendiculară pe segmentul M_0R_0, în mijlocul său C. Apoi CM, CR fiind bisectoare ale unghiurilor dreptei MR cu Δ și cu Δ_1, triunghiurile CM_0M, RR_0C sunt asemenea și avem:

$M_0M \cdot R_0R + CM_0 \cdot CR_0 = r^2 + r'^2$, adică: *produsul distanțelor punctelor variabile* M *și* R *la punctele fixe* M_0 *și* R_0, *este constant.*

D. V. STOICA.

PROBLEMA 6289. *Un corp greu este așezat pe un plan orizontal, mobil în raport cu un plan orizontal fix astfel încât distanța x dintre aceste două plane este dată de relația* $x = a\sin\omega t$ *(a,* ω *constante, t timpul). Se cere condiția ca în timpul mișcării corpul să nu părăsească planul mobil. Ce se întâmplă dacă această condiție nu este împlinită?*

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluție dată de d-nii: EMIL. I. CONSTANTINESCU și EUGEN WEGENER (Politehnica București).

Fie P_0 planul fix și P planul mobil. Corpul greu se va mișca pe o verticală Ox. Avem

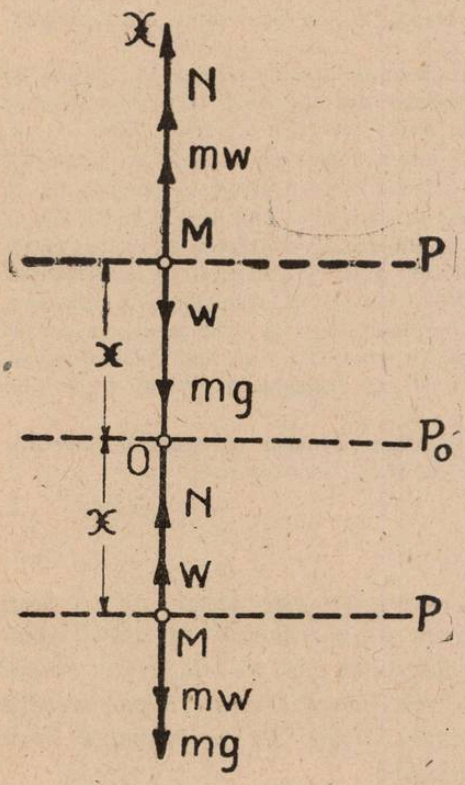
$$OM = x = a\sin\omega t$$

Viteza v și accelerația w în mișcarea corpului vor fi

$$v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos\omega t \ ,$$

$$w = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \sin\omega t = -\omega^2 x.$$

Din ultima relație rezultă că accelerația w *este întotdeauna îndreptată înspre* O; *forța de inerție* — mw va fi deci *îndreptată către exterior.*



In figură se arată sensurile reale ale acestor mărimi.

Aplicând principiul lui D'ALEMBERT, *greutatea* mg a corpului, *reacțiunea* N a planului și *forța de inerție* mw (w trebue luat în mărime absolută), trebuesc să fie în *echilibru.*

Avem, în cazul când corpul se află *deasupra* planului fix P_0:

$$N = mg - mw$$
$$= m(g - \omega^2 x) \quad (1)$$

Iar când corpul se află *dedesubtul* planului fix P_0:

$$N = mg + mw$$
$$= m(g + \omega^2 x). \quad (2)$$

Din (1) și (2), rezultă că numai când corpul se află *deasupra* planului P_0 s'ar putea desprinde de planul mobil pe care se reazămă. Pentru ca această desprindere să nu se poată face, trebuește ca $N > 0$ pentru orice poziție adică:

$$g - \omega^2 x_{max} > 0.$$

Dar

$$x_{max} = a.$$

Rezultă condiția cerută

$$g - a\omega^2 > 0 \quad \text{sau} \quad \omega^2 < \frac{g}{a}.$$

In cazul când condiția nu este îndeplinită corpul se desprinde de planul în poziția dată de:

$$x = \frac{g}{\omega^2}$$

(poziție situată deasupra planului P_0), după care urmează o serie de ciocniri dintre corp și planul mobil.

AL. ST.

PROBLEMA 6312. *Fie* P *centrul de greutate al perimetrului triunghiului* ABC, r *raza cercului înscris triunghiului, iar* α, β, γ *mijloacele laturilor* BC, CA, AB. *Să se demonstreze că:*

$$\overline{\alpha P}\sin\frac{A}{2} + \overline{\beta P}\sin\frac{B}{2} + \overline{\gamma P}\sin\frac{C}{2} = \frac{3r}{2}.$$

I. A. BARBU.

Soluție dată de d-l P. P. TEODORESCU (Liceul Matei Basarab, București).

Se știe că P este centrul cercului înscris triunghiului $\alpha\beta\gamma$. Pe de altă parte triunghiurile ABC, $\alpha\beta\gamma$ fiind asemeni, cu raportul de asemănare 2/1 vom avea:

$$\overline{\alpha P} = \frac{\overline{AI}}{2}, \quad \overline{\beta P} = \frac{\overline{BI}}{2}, \quad \overline{\gamma P} = \frac{\overline{CI}}{2} \tag{1}$$

unde I este centrul cercului înscris în ABC. Avem apoi

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}, \quad BI = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}, \quad \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Din (1) și (2) se deduce imediat relația din enunț.

Foarte bune soluții analoage au dat d-nii: M. R. CONSTANTINESCU (Student, București); M. MIHALCIOIU (Liceul militar, Craiova); GH. A. GRIGORE, LUCILIU C. ATHANASIU (Politehnica București); GEORGE ENESCU (Elev particular, București); P. A. CERNESCU, I. MUNTEANU, VALERIU A. PETCU, AL. GH. MORAITE, N. I. MĂNCESCU și PAUL CONSTANTINESCU.

PROBLEMA 6315. *Se dă ecuaţia de gradul al treilea*

$$x^3 + px + q = 0,$$

ai cărei coeficienţi sunt numere reale. Să se formeze şi să se discute ecuaţia algebrică, ale cărei rădăcini sunt patratele rădăcinilor ecuaţiei date.

TH. ANGHELUŢĂ.

Presupunem dată ecuaţia algebrică

$$P(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

ale cărei rădăcini le numim $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ne propunem să formăm ecuaţia algebrică, ale cărei rădăcini sunt patratele rădăcinilor ecuaţiei date. Ecuaţia căutată [1] se obţine înmulţind $P(x)$ cu $P(-x)$, înlocuind în produs pe x^2 cu y şi egalând rezultatul cu zero, căci avem

$$P(x)\,P(-x) = (-1)^m a_0^2 (x^2 - x_1^2) \ldots (x^2 - x_n^2)$$

şi ecuaţia

$$a_0^2 (y - x_1^2) \ldots (y - x_n^2) = 0$$

are rădăcinile voite.

In mod analog se formează ecuaţia ale cărei rădăcini sunt puterile a m^{-a} ale rădăcinilor ecuaţiei date. De exemplu pentru $m = 3$, facem produsul

$$P(x)\,P(\varepsilon_1 x)\,P(\varepsilon_2 x)$$

unde ε_1, ε_2 înseamnă rădăcinile cubice imaginare ale unităţii. Apoi în produs, înlocuim pe x^3 cu y şi rezultatul îl egalăm cu zero.

Relativ la ecuaţia propusă, procedând după cum am indicat găsim că ecuaţia cerută în enunţ este:

$$f(y) \equiv y(y + p)^2 - q^2 \equiv y^3 + 2py^2 + p^2 y - q^2 = 0. \quad (1)$$

Avem încă nevoie de expresia unei rădăcini oarecare a ecuaţiei date în funcţie raţională de rădăcina corespunzătoare a ecuaţiei în y. Pentru aceasta, înlocuim în ecuaţia propusă pe x^2 cu y şi deducem transformarea

$$x = -\frac{q}{y + p}.$$

---

1) TH. ANGHELUŢĂ. Algebra Superioară, Vol. II. Exer. 19, pag. 344.

De aici, rezultă că unei rădăcini reale a ecuației (1) corespunde o rădăcină reală pentru ecuația dată și invers. Deci discuțiile realității rădăcinilor acestor două ecuații sunt identice.

Ecuația derivată

$$f'(y) \equiv 3y^2 + 4py + p^2 = 0$$

are rădăcinile $-p$ și $-\frac{p}{3}$. Este de remarcat faptul că aceste rădăcini sunt raționale în raport cu p.

Făcând șirul lui ROLLE în cazurile $p > 0$ și $p < 0$ urmează că ecuația (1) are o rădăcină reală și două imaginare conjugate sau toate rădăcinile reale, după cum

$$D = -4p^3 - 27q^2$$

este pozitiv sau $D \leqq 0$. Prin urmare, aceeași concluzie are loc pentru ecuația propusă.

Au rezolvit problema d-nii: LONGIN N. ANDREESCU, (Liceul „R. Greceanu", Slatina), I. N. MĂNESCU (Colegiul Național, Predeal), NICULAE AL. BUCUR (Bacalaureat, București), PAUL N. CIUCESCU, VIRGIL G. CONSTANTINESCU, GEORGE ENESCU (Elev particular, București), ALEXANDRU G. MORAITE (Școala Politehnică, București), IOAN M. PUȚUREANU (Student matematici, București), GHEORGHE GH. RISTEA (Liceul „Matei Basarab", București), PETRE P. TEODORESCU (Liceul „Matei Basarab", București), DAN E. VASILIU (Liceul „Mihai Viteazul", București), EUGEN N. WEGENER (București).

EXERCIȚII

16. *Între laturile unui triunghiu automedian avem relația*

$$(b^2 - c^2 + 2bc)^2 + (b^2 - c^2 - 2bc)^2 = 8a^4$$

ILIE N. CONSTANTINESCU.

R. Se ține seamă de relația

$$2a^2 = b^2 + c^2$$

care definește triunghiul automedian și de valoarea

$$2(b^2 - c^2)^2 + 4b^2c^2 = 2(b^2 + c^2)^2$$

la care se reduce membrul I al relației din enunț.

PROBLEME PROPUSE

6431. Să se formeze un patrat perfect de 8 cifre, întrebuinţând de 2 ori cifra 2 şi de câte 3 ori pe fiecare din cifrele 1 şi 4.

G-L GH. BUICLIU.

6432. Punctul M descrie dreapta Δ perpendiculară pe AB. Punctele B_1, A_1 fiind fixe, se cere locul intersecţiei perpendicularelor din A pe B_1M şi din B pe A_1M. Pentru o poziţie dată a lui M intersecţia lor este C; unind un punct C_1 variabil pe Δ cu B_1 şi A_1, se cere locul intersecţiei perpendicularelor din B pe A_1C_1 şi din A pe B_1C_1. Studiind cazul când A, B, C sunt colineare, să se deduca teorema lui NEUBERG (ortopol).

CEZAR N. I. BOERESCU.

6433. In cercul O se dă diametrul AA' şi un punct M în planul cercului. M' fiind simetricul lui M faţă de AA', se construesc cercurile O_1, O_2 de diametre AM, A'M' care se taie în Q şi R (R pe AA').

1°. Patrulaterul O_1OQO_2 este un trapez isoscel.

2°. Cercul cu centrul în C, circumscris acestui trapez, taie cercul O în O', O'' şi cercurile O_1, O_2 a doua oară în O_1', O_2'. Patrulaterul $O'O_1'O_2'O''$ este tot un trapez isoscel.

3°. Grupele de puncte O_1, R, O_2' şi O_2, R, O_1' sunt colineare.

VIRGIL G. CONSTANTINESCU.

6434. Să se găsească funcţiunile derivabile de variabilă reală $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ astfel ca determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1(x_1+y_1) & f_2(x_1+y_2) \dots f_n(x_1+y_n) \\ f_1(x_2+y_1) & f_2(x_2+y_2) \dots f_n(x_2+y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_1(x_n+y_1) & f_2(x_n+y_2) \dots f_n(x_n+y_n) \end{vmatrix}$$

să fie independent de $y_1, y_2, \dots y_n$.

N. GEORGESCU-ROEGEN.

6435. Se consideră un patrulater inscriptibil ABCD şi cercurile descrise pe laturile şi diagonalele lui ca diametre.

1°. Grupele de câte trei din aceste cercuri care trec succesiv prin A, B, C, D, se taie respectiv după patru drepte Δ_i.

2°. Intersecţiile perpendicularelor din A, C şi B, D respectiv pe diagonalele BD şi AC, cu dreptele Δ_3, Δ_1, Δ_4, Δ_2 sunt respectiv A', C', B', D'.

a) Punctele A', B', C', D' sunt conciclice.

b) Dreptele Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 sunt concurente.

I. A. BARBU.

6436. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L\left(1+\frac{1}{n}\right)+L\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+L\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n} = L\frac{4}{e}$$

şi să se deducă apoi că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n} = \frac{4}{e}.$$

N. GHIRCOIAŞU.

6437. Se dau două drepte Δ şi Δ' perpendiculare în O. Fie M un punct în planul celor două drepte. Ii facem să corespundă punctul N pe OM, astfel ca $\overline{ON} = k \cdot \overline{OM}$. Ducem NM', M' fiind simetricul lui M faţă de Δ, până în P pe Δ'. Paralela prin P la Δ întâlneşte pe OM' în R.

1°. Pentru ce valoare a lui k dreptele Δ, NP şi MR sunt concurente?

2°. E şi D fiind proiecţiile lui N pe PR şi Δ, dacă avem

$$\overline{NE} \cdot \overline{ND} = \overline{OD} \cdot \overline{ER},$$

patrulaterul OPRN este inscriptibil.

3°. Punctul M este determinat prin două coordonate. Ce curbă trebue să descrie pentru ca patrulaterul OPRN să fie înscriptibil.

Se cer atât soluţii geometrice cât şi soluţii analitice.

MIRCEA V. SOARE.

6438. Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} a_1a_2a_3 & a_2a_3b_1+a_3a_1b_2+a_1a_2b_3 & a_1b_2b_3+a_2b_3b_1+a_3b_1b_2 & b_1b_2b_3 \\ a_1a_2a_4 & a_2a_4b_1+a_1a_4b_2+a_1a_2b_4 & a_1b_2b_4+a_2b_1b_4+a_4b_1b_2 & b_1b_2b_4 \\ a_1a_3a_4 & a_3a_4b_1+a_4a_4b_3+a_1a_3b_4 & a_1b_3b_4+a_3b_1b_4+a_4b_1b_3 & b_1b_3b_4 \\ a_2a_3a_4 & a_3a_4b_2+a_2a_4b_3+a_2a_3b_4 & a_2b_3b_4+a_3b_2b_4+a_4b_2b_3 & b_2b_3b_4 \end{vmatrix}$$

Caz particular:

$$a_1 = a \ , \quad a_2 = b \ , \quad a_3 = c \ , \quad a_4 = d$$
$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6439. Înălțimea unei stele este respectiv h_1 și h_2, când se află în digresiune maximă (unghiul paralactic = 90°) și în meridian. Să se demonstreze că latitudinea observatorului este dată de formula

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos h_2}{\operatorname{cosec} h_1 - \sin h_2}.$$

LT. COMANDOR C. V. COSTĂCHESCU.

6440. Prin intermediul a două inele fără greutate proprie A și D, alunecă pe o bară orizontală, două bare $\overline{AB} = 2l$ și $\overline{CD} = 2l_1$. Coeficientul de frecare este f. B și C, celelalte capete ale barelor, sunt unite printr'un fir; iar în punctul E al acestuia ($\overline{BE} = a$; $\overline{CE} = a_1$) este atârnată o a treia bară $\overline{EF} = 2m$. Greutatea specifică lineară a barelor este p. Se cere să se studieze poziția de echilibru a sistemului.

Cazuri particulare:

a) $l = l_1 = m \ ; \quad f = \frac{1}{3}$.

b) $f = 0$.

PETRE P. TEODORESCU.

ERATĂ. 1°. La pag. 163 rândul 14 de jos se citește k în loc de h.

„ „ „ „ „ „ „ „ „ $c \leqq b$ în loc de $c \leqq h$.

„ „ 176 „ 4 „ „ „ „ — *sunt pe o cuadrică.*

„ „ 178 „ 2 „ sus „ „ *ortologice* în loc de *omologice.*

2°. În enunțul problemei 6426 se înlocuește cotg$y$ prin tg$y$.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Athanasiu M. Lucian (6384, 420); *Berdan C.* (E., P.); *Ciucescu N. P.* (6282, 5, 90, 315, 31, 50, 4, 78, 86); *Constantinescu R. M.* (6407, E.); *Cotariu D. M.* (N., P.); *Crăciunescu E.* (A., P.); *Diaconu C. C.* (P.); *Enescu G. G.* (6411); *Hangan M. T.* (6282); *Ionescu Valentin* (6413); *Ionescu-Bujor C. Claudiu* (6331, 411); *Măncescu N. I.* (6354); *Olteanu N. Gh.* (6378); *Pisanca N. I.* (C., E., P., R.); *Petcu A. Val.* (6340, 411, 5, 6, E.); *Teodorescu St. Ion,* Ploeşti (2217, 5360); *Teodorescu P. P.* (2108, 6280, 2, C.); *Tudor C. Emil* (6378); *Vargă I. A.* (6358, 412, 6, 7).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *« Gazeta Matematică »*.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii carî cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate, cu preţul de 800 lei volumul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—X, XII, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 150

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 180

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . Lei 500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . . Lei 250

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 100

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.500

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 320

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 400

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 100

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 250

PENTRU BIBLIOTECI ŞI AUTORITĂŢI TOATE PREŢURILE SE TRIPLEAZĂ

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LIII abonamentele sunt:

Pentru profesori, studenţi şi elevi. . . . . Lei 480

Pentru autorităţi şi biblioteci . . . . . Lei 1.500

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1947 la 1 Iunie 1948 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este:

Pentru profesori, studenţi şi elevi . . . . . Lei 180

Pentru autorităţi şi biblioteci . . . . . Lei 400

Abonamentele se pot plăti la cont CEC Nr. 26220 sau se pot trimite unde se trimite şi corespondenţa, pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 43.440.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIII

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1948

SUMARUL

1. Asupra unor figuri patru-puncte, reciproce, formate din ortocentre . . . . *G-l Gh. I. Popescu*
2. Dr. Paul Tanco profesor ardelean de matematici . . . . . *I. V. Mătieș*
3. Concursul „Gazeta Matematică" din 1948 *Delegația Societății Gazeta Matematică*
4. Note matematice: 16—18.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 1637, 2591, 3312, 5022, 5893, 6285.
10. Exerciții: 17—19.
11. Probleme propuse: 6441—6450.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAȚIONALA

1948

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **N. Georgescu-Roegen**, Licenţiat în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier) şi Ing. **D. Stan** (Locţiitor de casier).

Şedinţele următoare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Marţi 17 Februarie ora 17: Adunarea generală.

Marţi 24 Februarie ora 17: Adunarea generală în caz când cea precedentă nu s'a putut ţine. Şedinţa lunară pentru adunarea materiei pentru Nr. 7.

Marţi 9 Martie ora 17: Facerea copertei pentru Nr. 7.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1947 sunt indicate în tabla de materii a volumului LII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **63**91, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **4**00, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 50.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *«Gazeta Matematică»* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . „ 150
— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *«Gazetei Matematice»* . . . . . „ 500

ASUPRA UNOR FIGURI PATRU-PUNCTE, RECIPROCE, FORMATE DIN ORTOCENTRE[1]

Triunghiul ABC şi punctul D, din planul său, formează figura patru-puncte ABCD şi dacă A', B', şi C' sunt ortocentrele triunghiurilor DBC, DCA şi DAB, punctul D este ortocentrul comun, al triunghiurilor A'BC, B'CA şi C'AB (Fig. 1).

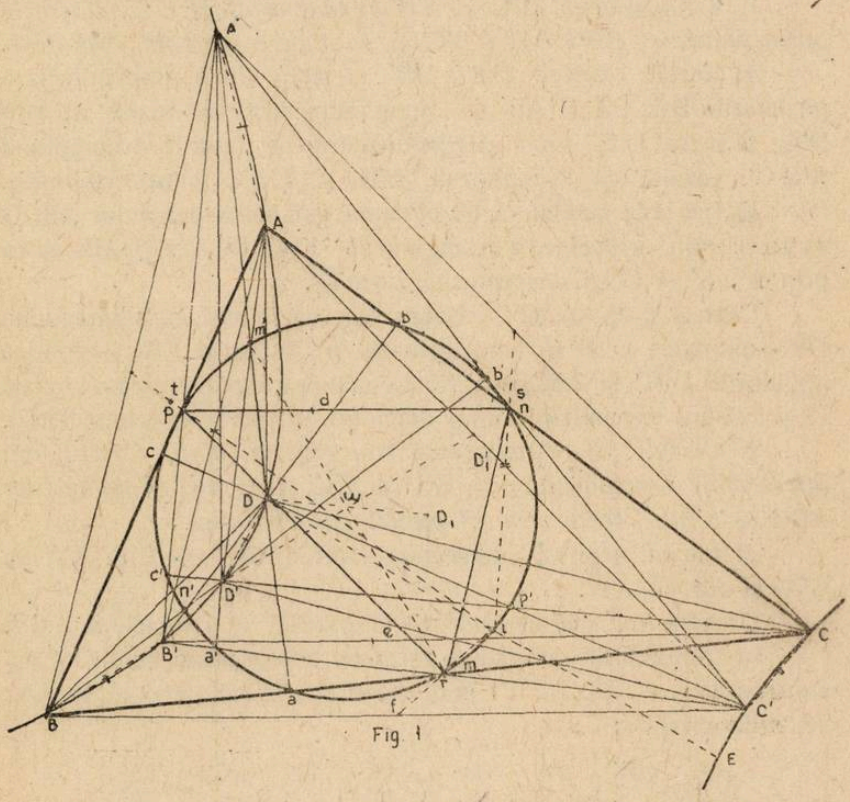


Fig. 1

Se formează *exagonul* AB' CA' BC', *cu laturile opuse paralele.* Triunghiurile ABC şi A'B'C' în acest exagon, se bucură de proprietăţi *analoage:* razele vectorii DA, DB şi DC, fiind concurente în D şi *perpendiculare* pe laturile BC' (CB'), CA' (C'A), etc; perpendicularele duse din vârfurile triunghiului A'B'C' pe aceleaşi laturi ale exagonului, concură în un punct D'.

1) Comunicare făcută la al treilea Congres al matematicienilor români, din Oct. 1945.

Se deduce că vârfurile A, B şi C sunt ortocentre în triunghiurile D'B'C', D'C'A' şi D'A'B' iar punctul D' este ortocentrul comun, în triunghiurile AB'C', BC'A' şi CA'B'.

Cele *două patru-puncte* ABCD *şi* A'B'C'D', formate din ortocentre, sunt *reciproce*, fiindcă se bucură de proprietăţi analoage şi din unul, se deduce celălalt.

1. *Triunghiurile* ABC *şi* A'B'C' *sunt ortologice iar vârfurile patru-punctelor* ABCD *şi* A'B'C'D', *sunt pe o iperbolă echilateră.*

a) Razele vectorii DA', DB' şi DC', fiind perpendiculare pe laturile BC, CA şi AB ale triunghiului ABC iar razele vectorii D'A, D'B şi D'C, fiind perpendiculare pe laturile triunghiului A'B'C', rezultă că triunghiurile ABC şi A'B'C' sunt ortologice.

b) Iperbola echilateră (*i*) circumscrisă patru-punctului ABCD va trece prin ortocentrele triunghiurilor ABC, DCA şi DAB, adică prin A', B' şi C' şi deasemenea, prin D'.

Centrul *i*, al acestei iperbole se găseşte în mijlocul segmentului DE — punctele D şi E fiind gemene în triunghiul ABC — fiindcă unghiurile DBC şi EBC, etc., fiind egale sau suplimentare, punctele D şi E sunt extremităţile unui diametru, al iperbolei echilatere (*i*).

2. *Cercul* (ω), *circumscris triunghiului mnp, format din intersecţiile corespunzătoare* (BC *cu* B'C', *etc.*) *ale triunghiurilor* ABC *şi* A'B'C', *trece prin 13 puncte caracteristice.*

a) Fie *m*, *n* şi *p*, intersecţiile laturilor BC cu B'C', CA cu C'A' şi AB cu A'B'.

Dreapta AA', taie dreptele *np*, B'C şi BC' în punctele *d*, *e* şi *f*.

In triunghiurile asemenea formate, considerând că *pd* şi *nd'* sunt paralele cu BC' (CB') punctele *d* şi *d'* fiind pe dreapta AA', se obţin relaţiile:

$$\frac{pA}{pB} = \frac{pB'}{pA'} = \frac{dA}{df} = \frac{de}{dA'} \text{ şi } \frac{nA}{nc} = \frac{nc'}{nA'} = \frac{d'A}{d'e} = \frac{d'f}{d'A'},$$

sau $de \cdot df = dA \cdot dA'$, etc., cum punctele A, A', *e* şi *f* sunt aceleaşi, *d'* se confundă cu *d* şi deci, *np* este paralelă cu latura exagonului BC' (CB'), etc., deci *laturile triunghiului mnp' sunt paralele cu laturile exagonului* AB' CA' BC'.

b) Din proprietatea precedentă rezultă că DA şi D'A', etc., sunt perpendiculare pe laturile triunghiului *mnp*, astfel că acesta, este triunghiul podar comun al punctelor D_1 şi D_1', isogonalele punctelor D şi D', în triunghiurile ABC şi A'B'C'.

In acest caz, cercul (ω), circumscris triunghiului *mnp*, va trece şi prin punctele *a*, *b* şi *c*; *a'*, *b'* şi *c'*, proiecţiile punctelor D şi D', respectiv pe laturile triunghiurilor ABC şi A'B'C'.

Prin punctele *m'*, *n'* şi *p'*, diametrale opuse în cercul (ω), ale vârfurilor *m*, *n* şi *p*, trec razele vectorii ce unesc punctele D' şi D cu vârfurile triunghiurilor ABC şi A'B'C', fiindcă în *m'*, se întretaie dreptele DA' şi D'A perpendiculare pe laturile BC şi B'C' iar punctul *m*, este la intersecţia acestor laturi.

Cercul (ω) trece prin vârfurile triunghiurilor: *mnp*, *m' n' p'*, *abc* şi *a'b'c'*.

c) Punctul *i*, centrul iperbolei echilatere (*i*), circumscrisă figurei ABCD A'B'C'D', se găseşte tot pe cercul (ω).

Fie *r*, *s* şi *t* mijloacele segmentelor ce unesc mijloacele laturilor paralele ale exagonului AB'C A'BC'.

Mijloacele segmentelor AA', BB', CC' şi DD', sunt vârfurile şi ortocentrul unui triunghiu, având laturile şi înălţimile paralele cu laturile paralele, ale celor şase trapeze, formate în figura considerată.

Acest triunghiu este înscris în o iperbolă echilateră, tangentă la dreptele AA', BB', CC' şi DD' având centrul în *i*.

Cele două iperbole echilatere sunt omotetice şi concentrice. A se vedea la 4 litera *b*.

Cercul EULER al acestui triunghiu, cerçul *rst*, trece prin centrul *i*, al iperbolei echilatere.

In iperbola echilateră (*i*), diametrii ce unesc mijloacele coardelor paralele — laturile exagonului —, trec prin punctele *r*, *s*, *t*, etc., respectiv şi prin punctele *m*, *n*, *p*, *m'*, *n'*, *p'* şi concură în *i*.

Triunghiurile *mnp* şi *rst* sunt omotetice; centrul *i* fiind centru de omotetie. Rezultă că, cercurile *mnp* şi *rst* sunt tangente în punctul *i* şi deci, *cercul* (ω) *trece prin i.*

3. *Cercul* (ω), *cu cele 13 puncte caracteristice, este comun la patru figuri, formate din vârfurile patru-punctelor* ABCD *şi* A' B' C' D'.

a) Din vârfurile patru-punctelor ABCD şi A' B' C' D' se pot forma patru figuri:

— triunghiurile ABC şi A'B'C' cu punctele D şi D';
— „ ABD' „ A'B'D „ „ C' „ C;
— „ BCD' „ B'C'D „ „ A' „ A;
— „ CAD' „ C'A'D „ „ B' „ B.

In fiecare din aceste figuri, cele şase trapeze şi cercul (ω) cu punctele m, n, p, m', n' şi p' rămân comune, punctele fiind intersecţiile diagonalelor celor şase trapeze.

Proecţiile a, b şi c; a', b' şi c', rămân aceleaşi ca poziţie, fiindcă un punct a, este la intersecţia dreptelor DA' cu BC care sunt sau raze vectorii sau laturi, în triunghiurile considerate din figurile de mai sus. Aceste proiecţii sunt intersecţiile diagonalelor trapezelor, luate câte două şi având laturile lor paralele, perpendiculare.

b) Punctele D_1 şi D_1', sunt simetricele punctelor D şi D' faţă de ω.

Construind punctele simetrice, faţă de acelaşi centru, ale vârfurilor celor patru figuri, cercul (ω) rămâne acelaşi, aşa că pentru cele două serii de câte patru figuri, înscrise în două iperbole echilatere (i) şi (i') simetrice faţă de ω, se vor găsi 20 de puncte caracteristice pe cercul (ω), din care 6 puncte comune, la toate cele 8 figuri.

4. *Proprietăţile figurilor ce rezultă din proiecţia figurii* ABCDA'B'C'D' *pe un alt plan.*

a) Proiectând pe un alt plan figura formată din exagonul AB'CA'BC' cu laturile opuse paralele şi din punctele D şi D' cu razele vectorii paralele şi *perpendiculare*, pe laturile exagonului se observă că: iperbola echilateră (i) devine o iperbolă (i_1) iar cercul (ω), devine o elipsă (ω_1).

In figura proiectată, proprietăţile expuse, rămân aceleaşi relative la dreptele paralele, mijloacele coardelor sau segmentelor şi la intersecţia dreptelor.

Pe elipsa (ω_1) se vor găsi 13 puncte caracteristice, etc. Pentru ca razele vectorii să fie şi perpendiculare pe laturile exagonului, această proprietate este rezervată numai iperbolei echilatere.

b) In un cerc (c) de centrul O, se înscriu două triunghiuri egale ABC şi A'B'C' şi se formează exagonul AB'CA'BC' cu laturile opuse paralele. Se deduc cele ce urmează (fig. 2):

— dacă pe cerc se ia un punct D, există pe cerc un alt punct D', astfel ca razele vectorii DA, DB şi DC să fie paralele cu D'A', D'B' şi D'C';

— mijloacele coardelor egale AA', BB' CC' şi DD' sunt pe un cerc concentric cu cercul (c), tangent la aceste coarde.

Prin analogie, toate proprietăţile relative la figura considerată sunt aceleaşi, oricare ar fi conica circumscrisă acestei figuri.

Mijloacele coardelor AA', BB', CC', şi DD' din iperbola echilateră (*i*), sunt pe o iperbolă echilateră tangentă la aceste coarde şi concentrică cu (*i*).

In cazul general, locul mijloacelor acestor coarde şi tangenta la aceste coarde va fi o conică (*c''*), omotetică şi concentrică cu conica (*c*), circumscrisă figurei ABCD A'B'C'D'.

Punctele *m n pm'n'p'*, intersecţiile diagonalelor celor şase trapeze formate; cele 6 puncte de intersecţie ale laturilor triunghiurilor ABC şi A'B'C' cu razele vectorii ce pornesc din punctele D şi D', precum şi centru O, sunt pe o iperbolă echilateră (ω').

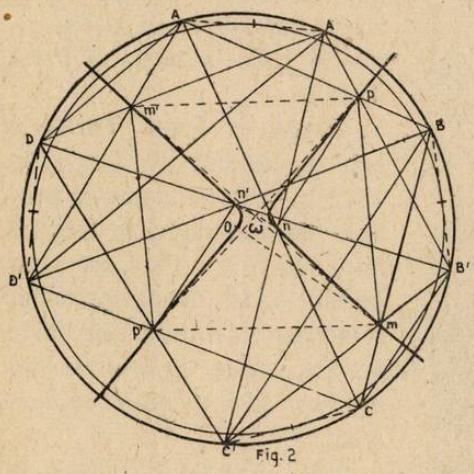


Fig. 2

Se formează paralelograme, cu centrele în ω'. Unind punctele *m* şi *m'*, cu extremităţile segmentelor *nn'*, *pp''*, *aa'* şi *cc'*, unghiurile obţinute sunt egale sau suplimentare şi deci, toate aceste puncte sunt pe iperbola echilateră (ω').

Iperbola echilateră (ω'), trece prin 13 puncte caracteristice şi are analogie cu cercul (ω).

Prin proiecţie, cercul (*c*) devine elipsa (c_1) şi iperbola (ω) devine iperbolă (ω_1) cu toate proprietăţile de mai sus.

c) Când figura ABCDA'B'C'D', este înscrisă în o parabolă (*p*), cele 13 puncte caracteristice, sunt pe o iperbolă (ω_1) având una din asimptote, paralelă cu axul parabolei, fiindcă centrul său, este la infinit.

Cazuri particulare. Dacă D este în ortocentru, D' se confundă cu D iar cercul (ω), se confundă cu cercul EULER al triunghiului ABC;

Dacă D este pe cercul ABC, D' este în ortocentrul triunghiului ABC, cercul (ω) devine dreapta lui SIMSON a punctului D, faţă de acest triunghiu.

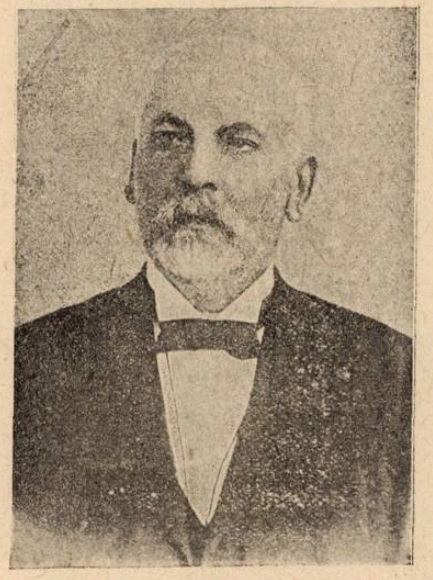
GENERAL GH. I. POPESCU.

DR. PAUL TANCO

Profesor ardelean de matematici

In Ardeal, până la unirea din 1918, noi Românii, am avut puține școli primare, secundare și câteva teologii. Toate acestea erau confesionale și grănicerești. Printre acestea din urmă s'a deschis în Oct. 1863 și primul gimnaziu din Năsăud, susținut fiind de Comitetul Fondurilor Grănicerești.

Primii profesori ai gimnaziului neavând pregătirea necesară pentru profesorat, ci numai absolvență de teologie, Comitetul Fondurilor s'a decis să trimită câțiva tineri ca bursieri la universitățile



din Austria sau Ungaria. Printre acești tineri bursieri a fost trimis în 1866 la Viena și PAUL TANCO.

Faptul că PAUL TANCO a luat doctoratul la Gratz în 1872, ca în urmă să devină profesor de matematici la Năsăud între anii 1873—1904, are o importanță în istoria matematicilor românești, căci după cele știute până azi, *este primul român profesor de matematici cu doctorat.*

PAUL TANCO s'a născut la 24 Iulie 1843, în Monor, Jud. Bistrița-Năsăud, părinții fiind țărani români. Rămânând orfan de mic, tatăl său fiind intemnițat și ucis în 1848, a fost crescut sub grija unchiului său, protopopul IOAN TANCO din Sângiorz (Jud. Năsăud).

A început să învețe carte în școala „trivială“[1] (primară) din satul său natal, continuând apoi la Gimnaziul din Bistrița, iar cursul superior la Liceul din Blaj, unde în Iulie 1866 depune examenul de „maturitate“ (bacalaureat). Ca bursier al Fondurilor Grănicerești, urmează cursurile la Universitatea din Viena și apoi la Gratz.

1) Școală primară cu trei studii de bază, având durata de trei ani.

La aceasta din urmă a *obținut în 14 Decembrie 1872 diploma de doctorat*[1] *la* Facultatea de Filosofie, în care era înglobată pe atunci și matematica.

Reîntors acasă, Dr. PAUL TANCO, în 31 Aug. 1873 a fost numit profesor de matematică și fizică la „Gimnaziul din Năsăud," iar în 19 August 1874 fu ales și director la această școală. A funcționat neîntrerupt ca profesor de matematică și fizică până când a ieșit la pensie cu sfârșitul anului școlar 1902/3, și încă un an 1903/4 la aceeași catedră ca provizor, fiind pensionat. A încetat din viață în Năsăud la 11 Sept. 1916.

Pe lângă exercitarea funcțiunilor la școală ca profesor și director, precum și ca director la Societatea „Aurora" din Năsăud, DR. PAUL TANCO a desvoltat și o activitate științifică, deși nu era într'un mediu prielnic, publicând următoarele lucrări de specialitate:

1. In Anuarele liceului din Năsăud a scris și publicat: „*Unitatea sistemei solare*" (1874—5, pag. 3—18); „*Puseţiunea cosmică a cometelor*" (1875—6, pag. 3—22); „*Consideraţiuni pedagogice, didactice asupra instrucţiunii disciplinelor matematice în gimnasiu*" (1876—7, pag. 3—12); „*Despre puseţiunea fizică a pământului în sistema solară*" (1879—80, pag. 3—15); „*Desvoltarea elementară a coţienilor în serii cu deosebită considerare a progresiunei geometrice, dimpreună cu materialul de deprindere*" (1886/7, pag. 3—50)

Aceste cinci studii au o importanță mai mult istorică, decât științifică, deși conțin lucruri interesante, mai mult elementare, decât superioare. Se citesc greoiu din cauza limbajului și ortografiei ciparіene.

2. Mai utilă a fost, cred, voluminoasa carte intitulată „*Probleme algebrice,*" vol I, apărută în Năsăud la 1892.

In cele 434 pag. sunt publicate 3.000 de probleme algebrice de gradul intâiu, doi și trei, în care se studiază proprietățile numerelor întregi, dobânzile de toate variantele, geometria, esteriometria,

---

1) D-L TEOFIL TANCO, medic în Năsăud, fiul Profesorului DR. PAUL TANCO, declară că nu posedă diploma de doctorat a tatălui său și crede că s'a distrus în războiul din 1914—18 în Sângiorz, deodată cu biblioteca familiară.

La Sediul Fondurilor Grănicerești din Năsăud am găsit în dosarul Nr. 436—1896 că se păstrează o copie a diplomei de doctorat a lui DR. PAUL TANCO, legalizată de Notarul Public sub Nr. 96 din 1891.

probleme de fizică şi astronomie, precum şi probleme de maxime şi minime.

Problemele şi exerciţiile din această carte sunt bine alese şi pedagogic distribuite, încât şi azi se poate consulta cu folos.

In prefaţă, autorul ne spune că în vol. II speră să trateze: „analistica nedeterminată sau ecuaţiunile lui DIOFANTE, progresiunile aritmetice şi geometrice, calculul dobânzilor compuse şi a rentelor, combinări şi calculul probabilităţilor". Vol. II, însă nu a mai apărut.

Dacă activitatea matematică şi chiar doctoratul lui PAUL TANCO nu au o valoare ştiinţifică reală ca acele ale lui SPIRU C. HARET sau DAVID EMMANUEL, totuşi au o importanţă din punct de vedere istoric, de netăgăduit.

După cele ştiute, până azi, în ordine cronologică, primii români doctori în matematici ar fi:

1. PAUL TANCO a luat doctoratul la Gratz, în 14 Decemb. 1872.

2. IOAN BOZĂCEANU a dat doctoratul la Bruxel înainte de 1 Februarie 1874 [1].

3. SPIRU HARET a susţinut teza de doctorat la Paris în 30 Ianuarie 1878.

4. DAVID EMMANUEL a susţinut teza de doctorat tot la Paris în 5 Iulie 1879.

5. CONST. GOGU a susţinut teza de doctorat la Paris în 7 Februarie 1882.

6. PETRU PIPOŞ a susţinut teza de doctorat la Cluj în Martie 1882.

Se constată deci că cei dintâi români, doctori în matematici au apărut după 1870 şi că în primii zece ani (1872—1882) şi-au luat doctoratul 6 români dintre care 3 sunt ardeleni şi 3 din Vechiul Regat. In timp ce tezele de doctorat ale lui SPIRU C. HARET, DAVID EMMANUEL şi CONST. GOGU s'au bucurat şi se bucură de o valoare ştiinţifică reală, ale celorlalţi au o valoare cu mult mai modestă, putem zice numai istorică.

Deşi Dr. PAUL TANCO a fost un profesor modest totuşi el a fost un om de mare valoare morală şi intelectuală. El face parte din şirul de profesori ardeleni, dornici de cultură, ca apoi să-şi

1) Dr. IOAN BOZĂCEANU a fost profesor de matematici la Braşov din Februarie 1874 până la 16 Ianuarie 1897. Data luării doctoratului e în cercetarea d-lui Prof. V. MARIAN.

pună serviciile în modesta şcoală românească din regiunea lui natală. E bine să amintim că alături de Dr. PAUL TANCO, în pleiada de profesori de elită, dinainte de 1918 dela Gimnaziul din Năsăud, putem pune pe Dr. I. MALAI, Dr. C. MOISILIU, Dr. ARTENIU P. ALEXI, Dr. N. MAIERU, Dr. NICOLAE DRĂGAN, Dr. VALERIU SENI, Dr. ALEXANDRU CIPLE, Dr. EM. PRECUP, etc.

La liceul din Năsăud, spre a se desvolta dragostea pentru matematici şi pentru a se perpetua memoria lui PAUL TANCO, din iniţiativa d-lui AUREL ŞOROBETEA, actualul director, s'a înfiinţat un premiu cu numele: *Premiul de matematici* Dr. PAUL TANCO, ce se va acorda anual celui mai bun elev la matematici. Premiul va fi achitat de d-l TEOFIL TANCO, medic în Năsăud, fiul Profesorului P. TANCO. Acesta este un modest semn pentru munca desinteresată a lui Dr. P. TANCO la Liceul din Năsăud.

Cu aceasta încheiu, căci scopul rândurilor de faţă este ca să fixeze locul ce se cuvine lui Dr. PAUL TANCO atât în rândul profesorilor năsăudeni, cât mai ales în istoria matematicii româneşti.

Năsăud, la 5—15 Iulie 1945.

IOAN V. MĂTIEŞ.
Profesor secundar, Cluj.

BIBLIOGRAFIE

1. Anuarul Gimnasiului din Năsăud.
2. Dr. PAUL TANCO: Probleme algebrice.
3. VIRGIL ŞOTROPA şi Dr. N. DRĂGAN: Istoria Şcoalelor Năsăudene.
4. Dosarul Nr. 436 din 1896 dela Comisia Administratoare a Fondurilor Grănicereşti din Năsăud.
5. ANDREI BÂRSAN: Istoria Şcoalelor din Braşov.

CONCURSUL „GAZETA MATEMATICĂ“ DIN 1948

Pentru concursul din anul acesta al *Gazei Matematice* s'au primit 89 de cereri de înscriere, din care 3 nu au fost luate în seamă fiind primite în afara termenului publicat la pag. 30 din acest volum. Din restul de 86 de candidaţi, au fost admişi următorii:

Clasa a IV-a: *Didenco A. Teodora, Furtunescu M. Viorel-Dragoş, Lumânare V. Florea, Gugui C. Dumitru, Moldovanu A. Corneliu, Năstase C. Maria-Adriana şi Nicolescu C. Mircea.*

Clasa a V-a: *Dabija A. Florin, Flondor I. Ion, Ghorghiu V. Vasile, Giurcă V. Florin, Hogea Gr. Grigore, Ionescu-Bujor C. Claudiu (este în clasa a IV-a şi s'a înscris pentru clasa a V-a), Istodor C. Valentin, Lupaşcu I. Emil şi Tomescu Gh. Mircea.*

Clasa a VI-a: *Amohnoaie A. Epifan, Comănescu S. Valerian, Constantinescu I. Gheorghe, Dragomir I. Dan, Făcăoanu Gh. Ion, Hangan M. Theodor, Magmutenco M. Gabriela, Lovin C. Martinian, Meriu C. Gheorghe, Neacşu Gr. Ion, Petre I. Gheorghe, Ristea Gh. Gheorghe, Schlomiuk H. Norbert, Sulica Al. Alexe şi Suta I. Mihai.*

Clasa a VII-a: *Andronescu N. Longin, Căpraru C. Iulian, Cernescu A. Petre, Cocoş Gh. Gheorghe, Neguţ A. Ion, Olteanu N. Gheorghe, Păunescu St. Gheorghe, Ştefănescu I. Sofronie, Tudor C. Emil şi Vasiliu M. Florin Mircea.*

Clasa a VIII-a: *Cernescu A. Nicolae, Constantinescu Paul, Constantinescu G. Virgil, Crăcea I. Dumitru, Ionescu M. Valentin, Măncescu N. Ion, Munteanu T. Ion, Pantea N. Alexandru, Roşca V. Constantin şi Teodorescu P. Petre.*

In total 51 candidaţi admişi dintre care 7 pentru clasa a IV-a, 9 pentru clasa a V-a, 15 pentru clasa VI-a, 10 pentru clasa a VII-a şi 10 pentru clasa a VIII-a.

Fiecare candidat va da câte o probă scrisă şi o probă orală la materiile publicate la pag. 135 din acest volum. Lucrările scrise *nu sunt eliminatorii.*

Prima lucrare scrisă se dă Joi 6 Mai, dela ora 8^{30} la ora 11^{30}, iar a doua lucrare scrisă se va da în aceeaşi zi dela ora 15^{30} la ora 18^{30}.

Oralul începe Vineri 17 Mai ora 8^{30}.

Atât lucrările scrise cât şi orarul se dau în localul *Politehnicei*, Calea Griviţei 132, Bucureşti.

Societatea *Gazeta Matematică*, va căuta, pe cât posibil, să asigure mijloace pentru venirea şi cazarea în Bucureşti, candidaţilor care în cererea de înscriere au arătat că nu au aceste mijloace, înştiinţându-i din vreme.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ".

NOTE MATEMATICE

16. *Restabiliri de prioritate.* La pag. 193 din acest volum al G. M. am publicat un articol intitulat „*Asupra unor funcţiuni transcendente*“ în care m'am ocupat de unele funcţiuni definite prin produse, în legătură cu o chestiune analoagă din articolul d-lui N. CIORĂNESCU (p. 133 volumul de faţă). D-l B. BARBĂLAT îmi atrage atenţia că chestiunile tratate în cele două articole se găsesc în „*Théorie des fonctions*“ de G. VALIRON (Masson & Cie, Paris 1942). Verificând am constatat efectiv că funcţiunile transcendente din articolele semnalate, împreună cu proprietăţile lor funcţionale (cele mai importante) se află tratate în cartea d-lui VALIRON la p. 55 şi la pp. 476 şi următoarele.

V. VÂLCOVICI.

17. *Rectificare.* Recitind propriul meu articol „*O problemă de construcţie*“ constat că s'a strecurat o inadvertenţă, ce poate fi dealminteri uşor rectificată. Astfel, la pag. 167 (G. M., vol. LIII) se afirmă că pentru $A > 120^0$ avem şi $\sin B + \sin C < 1$. Afirmaţiunea este exactă deşi justificarea din text nu e valabilă, întotdeauna.

Observând că avem:

$$\sin B + \sin C = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}$$

şi deoarece pentru $A > 120^0$ avem şi $2 \cos \frac{A}{2} < 1$, rezultă

$$\sin B + \sin C < \cos \frac{B-C}{2} < 1$$

ceea ce lămureşte afirmaţiunea amintită.

Observaţiunea ce formează obiectul Notei 7 (G. M., vol LIII, pag. 173) este eronată. Triunghiurile $P^+F^+Q^+$ şi $D^+F^+E^+$ citate în acea notă, rămân în adevăr asemenea cu ele însăşi. Este însă inexact că locul geometric al punctului D^+ se compune din două drepte Δ_1 şi Δ_2, cum se afirmă în acea Notă. In Notă nu se precizează nici măcar în ce condiţiuni variază punctul D^+. Dacă triunghiul ABC este fix, triunghiurile $D^+E^+F^+$ constituesc două

poziţiuni particulare ale triunghiului $P^+F^+Q^+$. Iar acest din urmă triunghiu variind astfel ca vârful F^+ să rămână fix, iar unul din celelalte două să fie mobil pe o latură a triunghiului ABC, cel de al treilea vârf descrie tot o latură de a triunghiului ABC. Iar dacă se presupune că triunghiul ABC, este variabil B, C şi $\sphericalangle A$ rămânând fixe, locul punctului D^+ este cercul γ_d^+ definit la pag. 165.

Revin acum asupra propoziţiunei, relative la parabolă, pe care se întemeiază soluţia problemei de construcţie din articolul amintit. Păstrând notaţiile dela pag. 162 este evident că triunghiurile PFQ sunt *direct* asemenea, căci dacă se consideră două poziţiuni ale acestor triunghiuri, printr'o rotaţie în jurul lui F unul din triunghiuri poate fi adus să fie omotetic cu celălalt.

In particular însă, triunghiul $P^+F^+Q^+$ sau $D^+F^+E^+$ citate în Nota 7, sunt isoscele. Se poate uşor arăta că două triunghiuri isoscele asemenea sunt şi *direct şi invers asemenea.* Aceasta rezultă imediat din faptul că prin omografia identică (ce lasă neschimbate toate punctele din plan) triunghiul îşi corespunde lui însuşi, iar prin simetria în raport cu axa de simetrie a triunghiului, triunghiul isoscel coincide cu el însuşi, în timp ce punctele ciclice se permută unul cu altul.

Aceeaşi justificare poate fi prezintată sub alt formă. Observ mai întâi că în ori ce triunghiu isoscel ABC în care AB = AC, avem şi

$$(B,\ ACIJ) = (C,\ ABIJ) = 1$$

I şi J fiind puncte ciclice ale planului. Consider apoi două triunghiuri isoscele asemeni $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$. Aceeaşi majusculă desemnând în cele două triunghiuri, vârfuri de unghiuri egale, este evident că putem alege notaţiile astfel că să avem:

$$(B_1,\ A_1C_1IJ) = (B_2,\ A_2C_2IJ)\ ,\ (C_1,\ A_1B_1IJ) = (B_2,\ A_2C_2IJ).$$

Aceste relaţiuni exprimă însă că există o transformare omografică în care perechile de puncte (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2), (I, I) şi (J, J) se corespund. Triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi A_2B_2C sunt deci *direct* asemenea.

Pentru a dovedi că sunt şi *invers* asemenea, arătăm că în omografia definită prin perechile de puncte omologe (A_1, A_2), (B_1, C_2), (C_1, B_2) şi (I, J) punctului J din prima figură îi corespunde

în cea de a doua, punctul I. Pentru aceasta este necesar şi suficient să avem:

$$(B_1, A_1C_1IJ) = (C_2, A_2B_2JI) \text{ şi } (C_1, A_1B_1IJ) = (B_2, A_2C_2JI).$$

Aceste din urmă relaţiuni rezultă imediat din precedentele observând că avem:

$$(C_2, A_2B_2JI).(C_2, A_2B_2IJ) = 1 \; ; \; (B_2, A_2C_2JI).(B_2, A_2C_2IJ) = 1.$$

Triunghiurile $D^+F^+E^+$ fiind direct şi invers asemenea între ele nu se pot deci obţine pentru D^+ două poziţiuni distincte după cum triunghiul $D^+F^+E^+$ este considerat ca fiind direct sau invers asemenea, altuia.

Ş. G.

18. *Asupra notei precedente referitoare la „O problemă de construcţie“.* In paragraful 2 al notei precedente se spune că observaţiunea pe care am făcut-o eu în nota 7 dela pag. 173 din acest volum este *eronată*, că *este inexact că locul punctului* D^+ *se compune din două drepte.*

Trimit pe cititor la figura dela pag. 164 din acest volum şi-i amintesc că în articolul *„O problemă de construcţie“* s'a dovedit că triunghiul $P^+F^+Q^+$ ale cărui vârfuri P^+ şi Q^+ se mişcă pe AB şi AC, *este isoscel, rămâne asemenea cu el însuşi şi are vârful* F^+ *fix*, mai mult se precizează la pag. 165 chiar valoarea unghiului din F^+, anume

$$\sphericalangle F^+ = \sphericalangle A.$$

In nota 7, incriminată, am afirmat că *triunghiul* $D^+F^+E^+$ *fiind asemenea cu el însuşi, punctul* F^+ *fiind fix, iar* E^+ *găsindu-se pe* AC, *punctul* D^+ *va descrie două drepte.*

In culegerile şi tratatele de geometrie, unde se studiază această problemă [1], nu se examinează toate cazurile de figură şi se conchide că *locul cerut este o dreaptă.*

Pentru a dovedi că locul lui D^+ din *„O problemă de construcţie“* se compune din *două drepte* şi că deci nota mea Nr. 7 *nu este eronată*, dau pe larg în cele ce urmează o soluţie elementară (fără consideraţii de omografie şi puncte ciclice), diferită de cea dată în *F. G. M.*

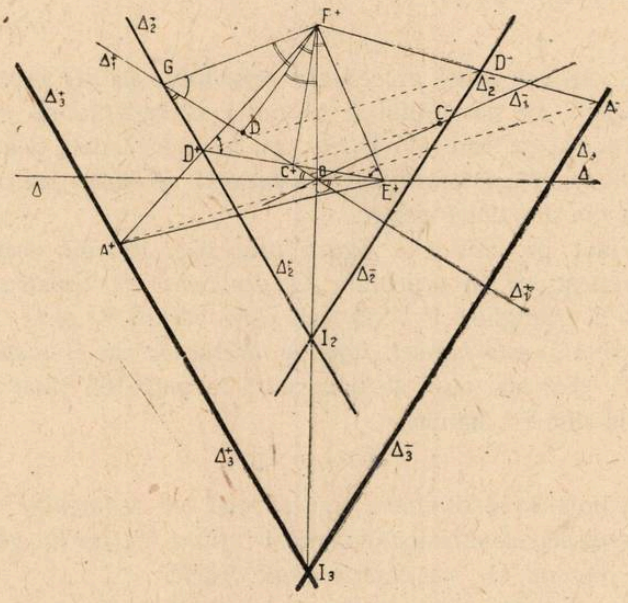
---

1) De exemplu F. G. M. 7e edition, pag. 620, exerciţiul 1349.

Fie, în figura următoare, *triunghiul* $A^+F^+E^+$ *care rămâne asemenea cu el însuşi*, are vârful F^+ fix şi vârful E^+ mobil pe *dreapta* $\Delta\Delta$. *Se cere locul vârfului* A^+.

Luăm pe F^+A^+ dela F^+ spre A^+ lungimea F^+D^+ egală cu F^+E^+. Triunghiul isoscel $D^+F^+E^+$ este analog celui din articolul „*O problemă de construcţie*“, el are vârful F^+ fix, vârful E^+ mobil pe Δ, este isoscel şi rămâne asemenea cu el însuşi. Fie C^+ şi B proiecţiile lui F^+ pe E^+D^+ şi Δ. Unghiurile E^+BF^+ şi $E^+C^+F^+$ fiind drepte patrulaterul $E^+BC^+F^+$ est inscriptibil şi deci

$$\sphericalangle C^+BF^+ = \sphericalangle C^+E^+F^+ = const.$$



Cum B este fix rezultă că *vârful* C^+ *al triunghiului dreptunghic* $E^+C^+F^+$ *descrie dreapta* Δ_1^+.

Fie acum D proiecţia lui F^+ pe Δ_1^+ şi G simetricul lui B faţă de D. Punctul G este fix şi în plus triunghiurile dreptunghice BDF^+, GDF^+ sunt egale deci

$$\sphericalangle DBF^+ = \sphericalangle DGF^+$$

şi cum

$$\sphericalangle DBF^+ = \sphericalangle C^+BF^+ = \sphericalangle C^+E^+F^+ = \sphericalangle C^+D^+F^+$$

rezultă pe de o parte că triunghiul F^+DG este o poziție particulară a triunghiului $F^+C^+D^+$, iar pe de altă parte că

$$\sphericalangle C^+D^+F^+ = \sphericalangle C^+GF^+$$

deci patrulaterul $C^+D^+GF^+$ este inscriptibil și prin urmare

$$\sphericalangle D^+GC^+ = \sphericalangle D^+F^+C^+ = \frac{1}{2} \sphericalangle D^+F^+C^+ = const.$$

De aici rezultă că *punctul* D^+, *vârful triunghiului* $E^+F^+D^+$ *descrie dreapta* Δ_2^+, care trece prin G și taie pe F^+B în I_2.

Dacă luăm D^- simetricul lui D^+ față de F^+E^+, obținem o nouă orientare a triunghiului în cauză $D^+F^+D^+$. Locul punctului D^-, este dreapta Δ_2^-, simetrica lui Δ_2^+ față de F^+B. Deci o *a doua dreaptă a locului vârfului triunghiului isoscel* $E^+F^+D^+$.

Se vede din această demonstrație că dacă triunghiul isoscel $P^+F^+Q^+$ sau $D^+F^+E^+$ rămâne asemenea cu el are vârful F^+ fix, iar unul din celelalte vârfuri descrie o latură a triunghiului ABC, cel de-al treilea vârf *nu descrie tot o latură a triunghiului* ABC cum se afirmă în nota precedentă, ci cu totul alte două drepte.

Am dovedit astfel, afirmația pe care am făcut-o în nota Nr. 7.

Trecând la cazul general al triunghiului oarecare $F^+A^+E^+$ din această notă, deoarece

$$\frac{F^+D^+}{F^+A^+} = \frac{F^+E^+}{F^+A^+} = const. = k$$

căci triunghiul rămâne asemenea cu el însuși, rezultă că A^+ descrie dreapta Δ_3^+, paralelă cu Δ_2^+ și tăind pe F^+B în punctul I_3 așa în cât

$$\frac{F^+I_2}{F^+I_3} = k.$$

Considerând punctul A^-, simetricul lui A^+ față de F^+E^+, locul lui A^- este dreaptă Δ_3^-; care trece prin I_3.

In concluzie, *la o poziție a punctului* E^+ *pe* Δ *sunt* două *puncte* A *pentru care triunghiul* AF^+E^+ *este asemenea cu un triunghiu dat. Locul punctelor* A *se compune deci din* două *drepte care se întâlnesc pe* F^+B.

La problema generală se poate spune chiar că locul lui A se compune din 12 drepte, dacă în enunț nu se precizează valoarea unghiului din punctul fix și a celui din vârful mobil pe o dreaptă.

Se mai observă pe figură că în cazul triunghiului isoscel $D^+F^+E^+$, dreptele Δ, Δ_1^+ şi Δ_2^+ formează un triunghiu isoscel.

In demonstraţiile şi concluziile din această notă se consideră că: *două triunghiuri sunt asemeni când au unghiurile egale, independent de poziţia triunghiului în plan şi orientarea unghiurilor.*

G-L GH. BUICLIU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Universitatea din Bucureşti. Facultatea de Ştiinţe. Secţia Matematici

Sesiunea Octombrie 1947. Examenul de admitere în anul I

1. Ce este o progresie aritmetică? Care este suma primilor $n+1$ termeni? Care este suma primelor n numere impare?

2. Fie ecuaţia

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = \sqrt{2}.$$

Să se găsească x.

3. Să se arate că suma a două numere pozitive x, y al căror produs este constant (a^2) este minimă când cele două numere sunt egale.

4. Să se rezolve ecuaţia trigonometrică

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = n$$

pentru $n = 4$. Cât trebue să fie n pentru ca să avem soluţii reale?

5. Două cercuri (C_1) şi (C_2) de centre C_1 şi C_2, de raze x şi $R - x$, tangente exterior în A sunt în interiorul unui alt cerc (O) de rază R şi centru O. Tangenta în A la (C_1) şi (C_2) taie cercul (O) în T şi fie U şi V punctele de contact ale uneia din celelalte tangente comune ale cercurilor (C_1) şi (C_2). Să se arată că $\overline{AT} = \overline{UV}$, că OT este normală la UV şi că AVTU este un dreptunghiu. Cât trebue să fie x pentru ca aria rămasă din (O) din care se scot cercurile (C_1) şi (C_2) să fie egală cu aria lui (C_1)?

6. Cât trebue să fie deschiderea α a unui sector dintr'un cerc dat, pentru ca aria totală a conului, obţinut prin alăturarea marginilor sectorului să fie $\frac{3}{4}$ din aria cercului dat? Cât este în acest caz deschiderea conului?

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVII. Nr. 11. Ianuarie 1948. Ing. GH. V. NICULESCU: Ecuaţii cu rădăcinile în progresie aritmetică. Note matematice. Chestiuni de examen. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

P. SERGESCU. La littérature mathématique dans la première période (1665—1701) du « *Journal des savants* ». (Ext. des « *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* » Nr. 1—1937).

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 244 (Gazeta Matematică, XL, 266). Se întreabă care au fost profesorii şi ce ştiinţe s'au predat la şcoala lui VASILE LUPU.

Pentru colegiul înfiinţat de VASILE LUPU la Iaşi, aproape de mânăstirea Trei Ierarhi, într'un « *măreţ* » local de piatră, au fost aduşi profesori ruteni cu sprijinul lui PETRU MOVILĂ. In fruntea misiunii de patru profesori era SOFRONIE POČAPSKI, rectorul colegiului din Kiev, care era de prin 1632 profesor de retorică la acel colegiu. Numele celorlalţi ruteni nu se cunosc; unul din ei pare să fi fost IGNAŢIU IEVLEVICZ, elevul lui POČAPSKI, care se găseşte prin 1647 profesor la Kiev şi care în 1644—1645 era în Moldova. Despre dascălii trimişi din Kiev ne vorbeşte şi un document contemporan, anume un hrisov din 2 Aprilie 1656 al lui GHEORGHE ŞTEFAN, urmaşul lui VASILE LUPU.

In raportul iezuitului BANDINUS din 1644, printre altele se spune că cei « *patru tineri profesori de filosofie... predau unii gramatica, alţii sinteza, alţii poetica şi se încearcă şi lucruri mai înalte* ».

Este foarte probabil ca POČAPSKI, rector al şcoalei din Kiev, să fi organizat şi pe aceea dela Iaşi, pe cât s'a putut, după modelul celei pe care o condusese înainte. Astfel credem că şi la şcoala lui VASILE LUPU să se fi învăţat aceleaşi obiecte care se predau la Kiev între anii 1632—1640 şi anume: trei limbi (slavona, greaca, latina), cântarea bisericească pe note de *muzichie*, catehismul, *arîtmetica*, poezia, retorica, filosofia şi teologia.

Aceste informaţii le-am culese din: *Istoria Românilor* de A. D. XENOPOL, vol. VII; *Istoria literaturii române vechi* de N. CARTOJAN, vol. II şi *Istoria literaturii române vechi* de SEXTIL PUŞCARIU.

GEORGE G. ENESCU.

DIVERSE

Sporirea bibliotecii „Gazeta Matematică"

N. ABRAMESCU. Lecţiuni de geometrie analitică. Fascicola I, ediţia IV.

N. ABRAMESCU. Lecţiuni de geometrie analitică. Fascicola II, ediţia IV. Cursuri litografiate, editate cu sprijinul cooperativei „Victoria studenţească". Lito, Schildkraut. Cluj.

Donate de d-na VICTORIA N. ABRAMESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1637. *Luându-se în toate modurile posibile semnele plus şi minus în expresia:*

$$a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n \qquad (1)$$

se obţin 2^{n-1} *valori distincte. Să se găsească în urmă valoarea expresiunilor:*

$$\Sigma (A_i - A_j)^6 \quad , \quad \Sigma (A_i + A_j)^6 \quad , \quad (i \neq j)$$

A_k *fiind una din valorile expresiunii* (1).

GR. ORĂŞANU.

Prima soluţiune. Să notăm cu B_1^{n-1}, $B_2^{n-1}, \ldots B_t^{n-1}$, $(t=2^{n-1})$, cele 2^{n-1} valori obţinute prin toate alternativele de semn în expresiunea $\pm b_1 \pm b_2 \pm \ldots \pm b_{n-1}$, şi cu B_1^n, $B_2^n \ldots B_u^n$ $(u=2^n)$ aceleaşi valori deduse din $\pm b_1 \pm b_2 \pm \ldots \pm b_n$.

Obţinem toate valorile B_i^n adăugând şi scăzând din fiecare B_k^{n-1} pe b_n:

$$\begin{aligned} &B_1^{n-1} + b_n, \; B_2^{n-1} + b_n, \ldots B_t^{n-1} + b_n \\ &B_1^{n-1} - b_n, \; B_2^{n-1} - b_n, \ldots B_t^{n-1} - b_n \end{aligned} \qquad (1)$$

Diferenţa $B_i^n - B_j^n$ poate lua următoarele valori

$$B_p^{n-1} - B_q^{n-1} \; , \; B_p^{n-1} - B_q^{n-1} + 2b_n \; , \; B_p^{n-1} - B_q^{n-1} \; , \; B_p^{n-1} - B_q^{n-1} - 2b_n$$

după cum B_i, B_j se găsesc în acelaşi rând sau nu în şirurile (1).

Deci

$$\begin{aligned} \Sigma_i \Sigma_j (B_i^n - B_j^n)^2 &= 2\Sigma_i \Sigma_k (B_i^{n-1} - B_j^{n-1})^2 + \Sigma_i \Sigma_k (B_i^{n-1} - B_j^{n-1} + 2b_n)^2 \\ &+ \Sigma_i \Sigma_k (B_i^{n-1} - B_j^{n-1} - 2b_n)^2 = 4\Sigma_i \Sigma_k (B_i^{n-1} - B_j^{n-1})^2 \\ &+ 2 \cdot (2_n^{n-1})^2 (2b_n)^2. \end{aligned} \qquad (2)$$

Cum $B_i^{n-1} - B_j^{n-1}$ nu conţine pe b_n, iar expresiunea (2) este simetrică în raport cu $b_1, b_2 \ldots b_n$, deducem

$$\Sigma_i \Sigma_j (B_i^n + B_j^n)^2 = 2^{2n+1} \sum_1^n b_i^2 \qquad (3)$$

La fel suma $B_i^n + B_j^n$ $(i \neq j)$, poate lua valorile

$$\begin{aligned} &B_p^{n-1} + B_q^{n-1} + 2b_n \; (p \neq q) \quad , \quad B_p^{n-1} + B_q^{n-1}, \\ &B_p^{n-1} + B_q^{n-1} - 2b_n \; (p \neq q) \quad , \quad B_p^{n-1} + B_q^{n-1} \end{aligned}$$

deci, notând cu accente sumele care exclud valorile egale ale indiciilor, avem

$$\begin{aligned}\Sigma'_i \Sigma'_j \left(B_i^n + B_j^n\right)^2 &= 2\Sigma_i \Sigma_j \left(B_i^{n-1} + B_j^{n-1}\right)^2 + \Sigma'_i \Sigma'_k \left(B_i^{n-1} + B^{n-1} + 2b_n\right)^2 \\ &+ \Sigma'_i \Sigma'_j \left(B_i^{n-1} + B_j^{n-1} - 2b_n\right)^2 \\ &= 2\Sigma_i \Sigma_j \left(B_i^{n-1} + B_j^{n-1}\right)^2 + 2\Sigma'_i \Sigma'_k \left(B_i^{n-1} + B^{n-1}\right)^2 \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} \left(2^{n-1} - 1\right) (2b_n)^2. \qquad (4)\end{aligned}$$

După un raţionament similar cu cel pentru (2), deducem

$$\Sigma'_i \Sigma'_j \left(B_i^n + B_j^n\right)^2 = 2^{n+2} \left(2^{n-1} - 1\right) \sum_1^n b_i^2 \qquad (5)$$

Observăm acum că diferenţa $A_i - A_j$ din problemă este egală cu $B_i^{n-1} - B_j^{n-1}$ unde, *de data aceasta*, B_i^{n-1} se deduce din expresia $\pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n$, deci aplicând direct relaţia (3) avem

$$\Sigma_i \Sigma_j \left(A_i - A_j\right)^2 = \Sigma_i \Sigma_j \left(B_i^{n-1} - B_j^{n-1}\right)^2 = 2^{2n-1} \sum_2^n a_i^2 \qquad (6)$$

La fel $A_i + A_j = 2a_1 + B_i^{n-1} + B_j^{n-1}$, deci

$$\begin{aligned}\Sigma'_i \Sigma'_j \left(A_i + A_j\right)^2 &= 2^{n-1} \left(2^{n-1} - 1\right) (2a_1)^2 + 4a_1 \Sigma'_i \Sigma'_j \left(B_i^{n-1} + B_j^{n-1}\right) \\ &+ \Sigma'_i \Sigma'_j \left(B_i^{n-1} + B_j^{n-1}\right)^2.\end{aligned}$$

Să observăm că valorile B_i^{n-1} sunt două câte două egale şi de semne contrare, deci $\Sigma'_i \Sigma'_j \left(B_i^{n-1} + B_j^{n-1}\right) = 0$. Utilizând formula (5) obţinem

$$\Sigma_j \Sigma_j \left(A_i + A_j\right) = 2^{n+1} \left(2^{n-1} - 1\right) a_1^2 + 2^{n+1} \left(2^{n-2} - 1\right) \sum_2^n a_i^2. \qquad (6)$$

A doua soluţiune. Această de a doua soluţiune ne va permite şi o *generalizare*. Să observăm că

$$\Sigma_i \Sigma_j e^{z\left(B_i^n - B_j^n\right)} = \Sigma_i e^{zB_i^n} \cdot \Sigma_j e^{-zB_j^n} = \left(\Sigma_i e^{zB_i^n}\right)^2 \qquad (7)$$

deoarece valorile B_i^n fiind două câte două egale şi de semne contrarii, şirul $-B_j^n$ va reproduce, în altă ordine de aranjare, şirul B_i^n.

Pe de altă parte

$$\Sigma_i e^{zB_i^n} = \left(e^{zb_1} + e^{-zb_1}\right)\left(e^{zb_2} + e^{-zb_2}\right) \ldots \left(e^{zb_n} + e^{-zb_n}\right). \qquad (8)$$

Insă

$$e^{zb} + e^{-zb} = 2\left(1 + \frac{z^2 b^2}{2!} + \frac{z^4 b^4}{4!} + \ldots\right). \qquad (9)$$

Inlocuind în (8) și desvoltând după puterile lui z, obținem prin identificarea coeficienților lui z:

$$\Sigma_i (B_i^n)^{2k} = 2^n \cdot (2k)! \, \Sigma'_{i_1} \Sigma'_{i_2} \dots \Sigma'_{i_s} \frac{b_{i_1}^{2\alpha_1} b_{i_2}^{2\alpha_2} \dots b_{i_s}^{2\alpha_s}}{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)! \dots (2\alpha_s)!} \quad (A)$$

unde sumele se extind asupra tuturor valorilor pentru care $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = k$.

La fel

$$(e^{zb} + e^{-zb})^2 = e^{2zb} + e^{-2zb} + 2 = 2\left(2 + \frac{2^2 z^2 b^2}{2!} + \frac{2^4 z^4 b^4}{4!} + \dots\right). \quad (10)$$

De unde din (7), cu ajutorul relațiilor (8) și (10), obținem prin identificarea puterilor lui z:

$$\Sigma_i \Sigma_j (B_i^n - B_j^n)^{2k} = 2^{2n} (2k)! \, \Sigma'_{i_1} \Sigma'_{i_2} \dots \Sigma'_{i_s} 2^{2k-s} \frac{b_{i_1}^{2\alpha_1} b_{i_2}^{2\alpha_2} \dots b_{i_s}^{2\alpha_s}}{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)! \dots (2\alpha_s)!} \quad (B)$$

unde sumele trebuesc luate pentru toate valorile ce satisfac $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = k$. Din (B) pentru $k = 1$, $k = 2$ obținem

$$\Sigma_i \Sigma_j (B_i^n - B_j^n)^2 = 2^{2n+1} \sum_1^n b_i^2$$

$$\Sigma_i \Sigma_j (B_i^n - B_j^n)^4 = 2^{2n+3} \left(\sum_1^n b_i^4 + 3 \Sigma'_i \Sigma'_j b_i^2 b_j^2 \right).$$

Să observăm că

$$\Sigma_i \Sigma_j \, e^{z(B_i^n + B_j^n)} = \left(\Sigma_i \, e^{z B_i^n} \right)^2 \quad (11)$$

și că deci $\Sigma_i \Sigma_j (B_i^n + B_j^n)^{2k} = \Sigma_i \Sigma_j (i^n - B_j^n)^{2k}$, ceeace se obține din comparația relației (11) cu (7) sau ținând seamă că B_i^n sunt două câte două egale și de semne contrarii. Prin urmare relația (B) ne dă și suma $\Sigma_i \Sigma_j (B_i^n + B_j^n)^{2k}$. Pentru aceeași sumă în care $i \neq j$, avem

$$\Sigma'_i \Sigma'_j (B_i^n + B_j^n)^{2k} = \Sigma_i \Sigma_j (B_i^n + B_j^n)^{2k} - 2^{2k} \Sigma_i (B_i^n)^{2k}.$$

Ținând seamă de ultima observație și de relația (A), avem

$$\Sigma'_i \Sigma'_j (B_i^n + B_j^n)^{2k} =$$

$$= 2^{n+2k} (2k)! \, \Sigma'_{i_1} \Sigma'_{i_1} \dots \Sigma'_{i_s} (2^{n-s} - 1) \frac{b_{i_1}^{2\alpha_1} b_{i_2}^{2\alpha_2} \dots b_{i_s}^{2\alpha_s}}{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)! \dots (2\alpha_s)!} \quad (C)$$

de unde pentru $k = 1$, $k = 2$

$$\Sigma'_i \Sigma'_j (B_i^n + B_j^n)^2 = 2^{n+2} (2^{n-1} - 1) \sum_1^n b_i^2$$

$$\Sigma'_i \Sigma'_j (B_i^n + B_j^n)^4 = 2^{n+4} \left[(2^{n-1} - 1) \sum_1^n b_i^4 + 6 (2^{n-2} - 1) \sum_1^{n\prime}{}_i \sum_1^{n\prime}{}_j b_i^2 b_j^2 \right]$$

Pentru calculul sumelor $\Sigma_i \Sigma_j (A_i - A_j)^{2k}$, $\Sigma'_i \Sigma'_j (A_i + A_j)^{2k}$ procedând ca la prima soluţiune obţinem pe rând

$$\Sigma_i \Sigma_j (A_i - A_j)^{2k} = \Sigma_i \Sigma_j (B_i^{n-1} - B_j^{n-1})^{2k} \qquad (12)$$

unde de data aceasta, B_i^{n-1} se referă la una din valorile

$$\pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n .$$

Membrul al doilea al relaţiei (12) este cunoscut prin (B). Apoi, observând că $\Sigma'_i \Sigma'_j (B_i^{n-1} + B_j^{n-1})^{2p+1} = 0$, avem

$$\Sigma'_i \Sigma'_j (A_i + A_j)^{2k} = \Sigma'_i \Sigma'_j (B_i^{n-1} + B_j^{n-1} + 2a_1)^{2k}$$

$$= \Sigma'_i \Sigma'_j (B_i^{n-1} + B_j^{n-1})^{2k} + 4C_{2k}^2 a_1^2 \Sigma'_i \Sigma'_j (B_i^{n-1} + B_j^{n-1})^{2k-2}$$

$$+ 16\, C_{2k}^4 a_1^4 \Sigma'_i \Sigma'_j (B_i^{n-1} + B_j^{n-1})^{2k-4} + \ldots$$

relaţie în care înlocuind sumele cunoscute prin relaţia (C) ne conduce la formula generală pe care n'o mai scriem din cauza complicaţiei de notaţie. Pentru $k = 2$, obţinem

$$\Sigma'_i \Sigma'_j (A_i + A_j)^4 = 2^{n+3} \left[(2^{n-2} - 1) \sum_2^n a_i^4 + 6 (2^{n-3} - 1) \sum_2^n{}'_i \sum_2^n{}'_j a_i^2 a_j^2 \right]$$

$$+ 24 a_1^2 . 2^{n+1} (2^{n-2} - 1) \sum_2^n{}_i a_i^2 .$$

N. G. R.

Problema a fost rezolvată în chiar anul propunerii ei de AUGUST VASILESCU, un distins corespondent, mort la 20 Iunie 1918 în o luptă aeriană (A se vedea *Gazeta Matematică*, vol. jubilar, decada a 5-a, pag. 46).

PROBLEMA 2591. *Fiind dat un triunghiu* ABC *şi două puncte* M *şi* N *în planul său, să se arate că dacă paralelele duse din* N *la cevienele lui* M *determină pe laturile corespunzătoare ale triunghiului* ABC *trei puncte colineare sau picioarele a trei ceviene, atunci şi* M *se bucură de aceeaşi proprietate faţă de cevienele lui* N.

L. HAMBURGER.

Această problemă este un caz particular al teoremei stabilită de N. BOTEA în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVIII, pag. 243, punctul 2°. Totuşi, problema 2591, fiind anterioară teoremei lui N. BOTEA îşi păstrează originalitatea ei; dar încadrarea ei în

această teoremă generală are avantajul că pune în evidenţă originea proiectivă a proprietăţii din enunţ, deşi exprimarea ei are o formă afină.

D-nii I. CURCHI şi M. MARGULIUS au rezolvat problema analitic. D-l N. N. MIHĂILEANU, în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXIX, pag. 441, punctul 9° consideră cazul particular când unul din punctele M sau N este ortocentrul triunghiului.

S'au primit soluţiuni bune şi dela d-nii: † N. G. BOTEA (când era student); M. GRÜNBAUM, I. MURĂROIU şi I. C. VASILIU.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 3312. *Se cer patratele de forma* dmszu, *care sunt patrate scrise şi sub forma* mdsuz.

GH. VASILIU.

Grupa *zu* trebuind să fie terminaţie de pătrat perfect odată cu *uz* nu putem avea de cât

$$zu = 00\ ,\ 44\ ,\ 16 \text{ sau } 69.$$

Examinăm fiecare caz în parte.

1°. $zu = 00$. Trebue, conform enunţului ca numerele de câte 3 cifre *dms* şi *mds* să fie simultan pătrate perfecte, M^2 şi N^2.

M şi N sunt cuprinse între 10 şi 32. Ridicând la pătrat aceste numere nu găsim soluţie de cât pentru

$$15^2 = 225 = 225$$

unde $d = m$.

2°. $zu = 44$. Numerele M şi N ale căror pătrate se termină în $s44$ sunt de forma[1] $500n \pm (150s - 138)$ unde s poate fi ori care din cifrele 0, 1,... 9. Ţinând seamă că M şi N sunt cuprinse între 100 şi 316 inclusiv, şi dând lui s toate valorile precedente se găsesc următoarele 9 numere ale căror pătrate de câte 2 cifre se termină în $s44$:

112, 138, 162, 188, 212, 238, 262, 288, 312.

Ridicând aceste numere la pătrat se găseşte că numai

$$M^2 = N^2 = 212^2 = 44844 = 44844$$

răspunde enunţului.

---

1) I. V. MĂTIEŞ. *Pătrate isofinale.* G. M. XLIX, pag. 397.

3°. $zu = 16$. Numerele ale căror pătrate se termină în $s16$ sunt de forma[1] $500n \pm (50s - 4)$ unde s are valorile 0, 1,... 9. Se găsesc următoarele 13 numere

4, 46, 54, 96, 104, 146, 154, 196, 204, 246, 254, 296, 304

pe care ridicându-le la pătrat ne dau următoarele grupe de soluții $154^2 = 23716$ cu $181^2 = 32761$ și $246^2 = 60516$ cu $81^2 = 06561$.

3°. $zu = 69$. Procedând ca la 2°, pentru numerele de forma $250n - (150s + 87)$ se găsește soluția

$$137^2 = 18769 \quad \text{cu} \quad 286^2 = 81796.$$

Problema nu a fost rezolvată de cât de d-l Lt. Col. E. S. IACOB, care în 1943 când era Căpitan a găsit primele 2 soluții dela 2° și soluția dela 3°.

Un actual corespondent anunță că problema este rezolvată în exercițiul 36, pag. 196, Vol. XXX. Este adevărat că acel exercițiu, propus de d-l GH. VASILIU, are același enunț însă nu este rezolvat complet, nu dă de cât soluțiile 22500, 44100 și 44944. Poate că acesta a și fost motivul că redactorul de pe vremuri a pus din nou chestiunea sub formă de problemă propusă.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5022. *Se dă un triunghiu* ABC *înscris în cercul* O *și circumscris cercului* I. *Fie* A', B', C' *intersecțiile bisectoarelor interioare ale lui* ABC *cu cercul* O; A'' *diametrul opus lui* A' *în* O; A_a *intersecția lui* O *cu* A''I; L *intersecția lui* $A'A_a$ *cu* BC; L_b, L_c *intersecțiile lui* LI *cu* AC *și* AB; V_a *centrul cercului* $A_a L_b L_c$. *Se cere să se demonstreze că:*

1°. $A_a L_b$ *și* $A_a L_c$ *trec respectiv prin* B', C'.

2°. *Punctele* M, N *construite analog cu* L *sunt colineare cu* L.

3°. *Punctele* O, V_a, A_a *sunt colineare.*

4°. *Dreapta* AA' *trece prin* V_a.

5°. *Cercul* $A_a L_b L_c$ *este tangent laturilor* AB, AC.

G-L GH. BUICLIU.

Soluție dată de d-l MIRCEA D. POPA.

Vom demonstra întâi punctul 2°.

2°. Fie A_1 punctul de tangentă al cercului I cu latura BC. Dreptele A'A'', IA_1 fiind paralele, avem:

$$\sphericalangle A'A''I = \sphericalangle A_1 I A_a \quad \text{și} \quad \sphericalangle A''A'I = \sphericalangle A'I A_1. \qquad (1)$$

---

1) I. V. MĂTIEȘ. *Pătrate isofinale.* G. M. XLIX, pag. 397.

Notând cu r raza cercului I şi cu D_1 proecţia lui I pe AB avem:

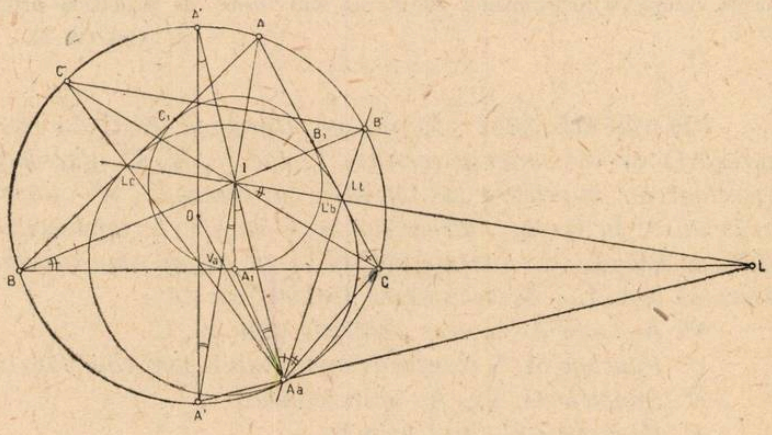
$$IA \sin \frac{A}{2} = r$$

Observând că $\sphericalangle A'A''B = \sphericalangle A'AB$ şi ţinând seamă că $A'I = A'B$, se scoate din triunghiul dreptunghic $A'BA''$

$$IA' = A'A = 2R \sin \frac{A}{2}$$

$$\therefore \quad IA \cdot IA' = IA'' \cdot IA_a = 2R \cdot r = A'A'' \cdot IA_1$$

$$\therefore \quad \frac{A'A''}{IA''} = \frac{IA_a}{IA_1} \qquad (2)$$



Triunghiurile $IA'A''$, IA_1A_a având unghiurile din I şi A'' egale şi laturile adiacente proporţionale, sunt asemeni, deci:

$$\sphericalangle IA_a A_1 = \sphericalangle IA'A''$$

şi ţinând seamă de (1), rezultă că A'I este tangentă cercului A_1IA_a. Dar acest cerc trece prin L pentru că unghiurile IA_1L şi IA_aL sunt drepte. Dreapta A'IA fiind tangentă la acest cerc, este perpendiculară pe diametrul IL al acestui cerc. Se ştie că perpendicularele în I pe dreptele IA, IB, IC întâlnesc laturile triunghiului ABC în trei puncte colineare. Deci punctele L, M, N sunt colineare.

1°. Notăm cu L'_b intersecția lui $A_a B'$ cu AC. Pe figură se vede că

$$B' A_a C = \frac{B}{2}$$

$$\sphericalangle I A_a L'_b = \sphericalangle A'' A_a B' = \frac{\pi}{2} - (\sphericalangle B' A_a C + \sphericalangle C A_a L) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{B+A}{2}\right) = \frac{C}{2}$$

Patrulaterul $IA_a CL'_b$ este inscriptibil, deci

$$\sphericalangle CI L'_b = \sphericalangle CA_a L'_b = \sphericalangle CA_a B' = \frac{B}{2}$$

Ținând seamă de această relațiune și de faptul că $\sphericalangle A'IA$ este exterior triunghiului IAC, se deduce

$$\sphericalangle A'I L'_b = \sphericalangle A'IC + \sphericalangle CIL'_b = \frac{A+C}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Rezultă că A'IA este perpendiculară pe IL'_b și că deci IL'_b se confundă cu IL. Prin urmare L'_b se confundă cu L_b. Deci $A_a L_b$ trece prin B', la fel $A_a L_c$ trece prin C'.

3°. Se știe și se poate demonstra ușor că $B'C' \perp AI$. Triunghiurile $A_a B'C'$, $A_a L_b L_c$ având laturile $B'C'$, $L_b L_c$ paralele, cercurile (O) și (V_a), circumscrise lor sunt tangente în A_a, deci punctele O, V_a, A_a sunt colineare.

4°. S'a demonstat la 1° că $AA' \perp L_b L_c$. Cum triunghiul $L_b AL_c$ este isoscel, punctul I este mijlocul lui $L_b L_c$, deci AA' este mediatrice în triunghiul $A_a L_b L_c$.

5°. Măsura unghiului $B' A_a C'$ fiind jumătate din arcul B'AC', avem

$$\sphericalangle B' A_a C' = \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} = \sphericalangle AL_b I = \sphericalangle AL_c I$$

ceeace arată că cercul (V_a) este tangent laturilor AB, AC.

O foarte bună soluție, pe considerații puțin diferite a dat d-l Ion Gh. Costescu.

PROBLEMA 5893. *Să se pună expresia*

$$E = a^4 - a^2b^2 + b^4$$

sub forma unei sume de două patrate. Să se studieze reciproca acestei proprietăți.

M. Ghermănescu.

Putem scrie

$$E = (a^2 - b^2)^2 + a^2b^2 = A^2 + B^2. \qquad (1)$$

Reciproc, fiind date numerele întregi A şi B, dacă egalitatea (1) este adevărată în întregi, atunci, ori numerele date A şi B sunt de forma

$$A = a^2 - b^2 \ , \quad B = ab, \qquad (2)$$

ori există alte două numere întregi A_1, B_1, astfel ca

$$A_1^2 + B_1^2 = A^2 + B^2 \ , \quad A_1 = a^2 - b^2 \ , \quad B_1 = ab. \qquad (3)$$

Din (3), deducem

$$A_1^2 + 4B_1^2 = (a^2 + b^2)^2,$$

deci A_1 şi $2B_1$ sunt numere pitagorice. Prin urmare, *fiind date numerele* A *şi* B, *dacă există o egalitate de forma* $A^2+B^2=A_1^2+B_1^2$, *în care* A_1 *şi* $2B_1$ *sunt numere pitagorice, expresia* $A^2 + B^2$ *se poate pune sub forma* $a^4 - a^2b^2 + b^4$. *Dacă* $A^2 + B^2$ *este un număr prim, trebue ca* A *şi* 2B *să fie numere pitagorice.*

Ultima parte rezultă dintr'o teoremă pe care am stabilit-o pentru numerele prime.

Exemple. 1°. Fie $A = 12$, $B = 7$; $12^2 + 14^2 \neq k^2$, însă $24^2 + 7^2 = 25^2$, deci $A = 12$, $B = 7$ sau $ab = 12$, $a^2 - b^2 = 7$, care dau $a = 4$, $b = 3$.

2°. Fie $A = 21$, $B = 1$. Avem $21^2 + 2^2 \neq k$, $42^2 + 1^2 \neq k^2$, deci nu găsim valori întregi pentru a şi b.

Notă. 1°. Aproape toţi corespondenţii, care s'au ocupat de această problemă, s'au mulţumit să scrie egalitatea (1), conform primei forme a enunţului, apărut incomplet, fără să se ocupe de reciprocă. Numai trei corespondenţi au vorbit despre reciprocă, dar au scris cu totul altceva.

2°. Propunem să se cerceteze dacă există doi întregi a şi b, astfel ca expresia dată să se pună în două moduri sub forma unei sume de două patrate. In caz când nu există asemenea numere, rezultă că $a^4 - a^2b^2 + b^4$ *este totdeauna un număr prim.*

3°. Putem arăta că se pot determina valori pentru a şi b, care fac expresia E întreagă şi care se poate scrie sub două sau mai multe forme ca o sumă de două patrate.

Se găseşte uşor identitatea

$$16\,E = [(2b - \sqrt{3}\,a)^2 + a^2]\,[(2b + \sqrt{3}\,a)^2 + a^2]$$

şi este destul a lua $a = \sqrt{3}\,c$ sau $b = \sqrt{3}\,c$, unde c este întreg, pentru a avea

$$E = (b^2 - 3bc + c^2)\,(b^2 + 3bc + c^2).$$

M. G.

PROBLEMA 6285. C_p^q *fiind simbolul combinărilor, se cere să se rezolve în raport cu* n *ecuaţiile*

$$C_n^p = m\, C_n^{p-2} \quad \text{şi} \quad C_n^p = m\, C_{n-2}^{p-2},$$

determinând forma întregului m *aşa încât soluţiile să fie acceptabile.*

ANDREI DOBRESCU.

Se găseşte imediat că prima ecuaţie se scrie:

$$n^2 - (2p-3)\, n + [(p-2)\,(p-1) - (p-1)\, pm] = 0,$$

a cărei soluţie este:

$$n = \frac{2p-3 \pm \sqrt{1+4\,(p-1)\, pm}}{2}.$$

Pentru ca valorile lui n să fie acceptabile, trebuie să avem:

$$1+4\,(p-1)\, pm = (2k+1)^2,$$

k fiind un întreg pozitiv.

Deducem:

$$m = \frac{k\,(k+1)}{(p-1)\, p}.$$

Este evident că *m este întreg dacă fie* k, *fie* $k+1$, *sunt multipli ai produsului* $(p-1)\, p$.

Rezultă:

$$m = r\,[(p-1)\, pr + 1]. \tag{1}$$

sau

$$m = r\,[p-1)\, pr - 1], \tag{2}$$

r fiind un întreg pozitiv oarecare.

Să presupunem însă că nici k, *nici* $k+1$, *nu sunt multipli ai produsului* $(p-1)\, p$.

Deosebim 4 cazuri:

1°. $k = \mathcal{M}\,(p-1)$. Fie $k = (p-1)\, q$, q fiind un întreg pozitiv.

Deducem:

$$m = \frac{q\,[(p-1)\, q+1]}{p}. \tag{3}$$

Faţă de p, q poate fi de forma:

$$q = pr + \alpha \tag{4}$$

unde r este un întreg pozitiv oarecare, iar α un întreg pozitiv $\leqslant p-1$.

[Excludem cazul $\alpha = 0$, care ne-ar da pentru m valoarea (1)]. Ţinând seamă de (4), (3) devine:

$$m = \frac{(pr+\alpha).\{p\,[(p-1)\,r+\alpha]-(\alpha-1)\}}{p}.$$

Cum factorul $pr+\alpha$ nu poate fi divizibil cu p, trebuie ca al doilea factor dela numărător să fie divizibil, ceea ce — evident — se întâmplă dacă $\alpha - 1 = 0$ căci $\alpha \leqslant p-1$.

Urmează:

$$m = [(p-1)\,r+1]\,(pr+1). \qquad (5)$$

Mai expeditiv se obţine (5), scriind relaţia (3) sub forma:

$$m = \frac{q\,[pq-(q-1)]}{p},$$

de unde se vede că, pentru ca m să fie întreg (afară de cazul $q = \mathcal{M}p$), este necesar şi suficient să avem $q - 1 = pr$.

2°. $k = \mathcal{M}p$. Fie $k = pq$, unde q este un întreg pozitiv. Deducem:

$$m = \frac{q\,(pq+1)}{p-1}.$$

Raţionând întocmai ca la cazul 1°, obţinem:

$$m = [(p-1)\,r-1]\,(pr-1). \qquad (6)$$

3°. $k+1 = \mathcal{M}\,(p-1$. Punând $k+1 = (p-1)\,q$ şi raţionând ca la 1°, găsim pentru m valoarea (6).

4°. $k+1 = \mathcal{M}p$. Intocmai ca mai sus, găsim pentru m valoarea (5).

In concluzie, *pentru ca ecuaţia*

$$C_n^p = m\,C_n^{p-2}$$

să aibă soluţii acceptibile, trebuie ca m *să aibă una din valorile* (1), (2), (5), (6), cărora le corespund pentru n valorile:

$(p-1)\,(pr+1)$, $(p-1)\,(pr+1)-1$, $(p-1)\,(pr+2)$, $(p-1)\,pr-1$.

Cât priveşte ecuaţia:

$$C_n^p = m\,C_{n-2}^{p-2};$$

aceasta se scrie:

$$n^2 - n - (p-1)\,pm = 0,$$

a cărei soluţie este:

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\,(p-1)\,pm}}{2}.$$

Se obţin pentru m valorile (1), (2), (5), (6), cărora le corespund pentru n valorile:

$$(p-1)\,pr+1\ ,\quad (p-1)\,pr\ ,\quad p\,[(p-1)\,r+1]\ ,\quad (p-1)\,(pr-1).$$

Notă. 1°. D-l MIRCEA D. POPA (student-inginer Bucureşti) a obţinut, pe o cale lungă şi cu ocoluri, formele (1) şi (2) pentru m.

2°. D-nii: VIRGIL G. CONSTANTINESCU, D-TRU I. CRĂCEA (Liceul „Radu Greceanu" Slatina), I. MUNTEANU, ILIE POPESCU (Colegiul „N. Filipescu" Predeal) şi IOAN I. NOVAC (Liceul „Bălcescu" Brăila), au dat începuturi de soluţie, arătând numai că întregul m este câtul dintre produsul a două numere întregi consecutive şi produsul altor două numere întregi consecutive.

3°. D-nii: NICOLAE M. BUJOR (Liceul „Fraţii Buzeşti" Craiova), PAUL CONSTANTINESCU, VASILE DIACONU, ION MĂNCESCU şi D-TRU STOIAN (Colegiul „N. Filipescu" Predeal) au dat începuturi şi mai anemice de soluţii (aproape identice ale celor dela Colegiul „N. Filipescu").

4°. Au mai dat soluţii parţiale d-nii: M. R. CONSTANTINESCU, VALERIU-PANDELE A. PETCU, ŞT. GR. FIRESCU, E. A. DODU; ANDRÉ DONEAUD (Liceul „Titu Maiorescu" Bucureşti), MIRCEA IOSIFESCU (Liceul „Sf. Petru şi Pavel" Ploieşti), MIRCEA D. VOINEA (C. N. C. I.), A. I. VARGĂ (student -inginer). T. M. HANGAN, LONGIN N. ANDRONESCU şi PAUL N. CIUCESCU.

EXERCIŢII

17. *Intre unghiurile unui triunghiu avem*

$$\frac{\Sigma \sin A\ (\cos B\ \cos C+\cos A)}{\Sigma \cos A\ (\sin B\ \sin C-\cos A)} = \operatorname{tg}A\ \operatorname{tg}B\ \operatorname{tg}C.$$

I. A. BARBU.

R. Se ţine seamă de

$$\cos A=\cos\,[\pi-(B+C)]=-\cos\,(B+C)$$

şi se găseşte că membrul I devine

$$\frac{\Sigma \sin A}{\Sigma \cos A} = \Sigma \operatorname{tg}A = \operatorname{tg}A\ \operatorname{tg}B\ \operatorname{tg}C.$$

18. *Să se găsească numerele de 2 cifre, care scrise în baza 18 sunt egale cu triplul răsturnatelor scrise în baza 7.*

I. I. ŢIŢEICA.

R. Dacă ab este numărul căutat trebue să avem

$$18a+b=3\,(7b+a)\quad \therefore\quad 3a=4b \qquad (1)$$

Numărul $7b+a$ fiind în baza 7 atât b cât şi a sunt mai mici ca 7, aşa că (1) dă numai soluţia

$$a=4,\ b=3 \quad \text{cu} \quad ab=43.$$

19. *Ecuaţia*

$$e^x (a \cos a - x \sin a) = a$$

admite rădăcina $x = ai$ $\qquad i = \sqrt{-1}$.

M. R. CONSTANTINESCU.

R. Ţinând seamă de

$$e^{ai} = \cos a + i \sin a$$

şi înlocuind în ecuaţia dată pe x prin ai se găseşte

$$(\cos^2 a - i^2 \sin^2 a)\ a \equiv a.$$

PROBLEME PROPUSE

6441. Fie $A_1B_1C_1$ dreapta lui SIMSON a unui punct M faţă de triunghiul ABC înscris în cercul de centru O. Să se arate că centrele cercurilor MAB_1C_1, MBC_1A_1, MCA_1B_1 se găsesc pe cercul de diametru MO.

G-L GH. BUICLIU.

6442. Se dă triunghiul isoscel ABC cu unghiul din A obtuz şi cercul cu centrul I pe BC, tangent la AB şi AC. O tangentă variabilă la cercul I taie dreapta AB în M şi dreapta AC în R. Să se găsească poziţia acestei tangente pentru care cercul de diametru MR este tangent înălţimii CC' a triunghiului ABC.

D. V. STOICA.

6443. Să se rezolve în numere reale, sistemul:

$$x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2 = A \quad , \quad x^3z + y^3x + z^3y = B \quad , \quad xyz = C.$$

Cazuri particulare:

$A = 103$, $B = 65$, $C = 6$ şi $2B^2 - 9AC = 0$, $3^2 . A^3 = 2^9 . C^5$.

INGINER O. ORĂNESCU.

6444. Să se scrie ecuaţia parabolelor cu vârful într'un punct fix şi tangente unei drepte fixe D ce nu conţine punctul fix.

Să se examineze dacă aceste parabole au o înfăşurătoare, în afară de dreapta fixă D.

Să se determine apoi locul focarelor şi înfăşurătoarea directoarelor acestor parabole.

M. GHERMĂNESCU.

6445. Să se studieze și să se reprezinte grafic funcțiunile:

$$(A)\quad y=\pm\sqrt{\frac{x^3-8}{x^3-1}}\ ;\quad (B)\quad y=\pm\sqrt{\frac{x^4-1}{x^4-16}}.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6446. Să se demonstreze următoarele identități între unghiurile unui triunghiu ABC:

$$(1)\quad \cos A+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C-A}{2}=4\cos\frac{2A+B}{4}\cos\frac{B+B-A}{4}\cos\frac{C+A}{4}$$

$$(2)\quad \cos A-\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C-A}{2}=4\cos\frac{\pi-2A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi+A-C}{4}$$

$$(3)\quad \sin A+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C-A}{2}=1+4\sin\frac{\pi-2A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi+A-C}{4}$$

$$(4)\quad \sin 2A\sin(A+B-C)+\sin B\sin(C-3A)+\sin(2A+B)\sin(2A-B)=0.$$

MARCEL D. COTARIU.

6447. Se cere: 1°. Să se construiască curba a cărei ecuație, în coordonate dreptunghiulare, este

$$y^2(a^3-x^3)=a^5.$$

2°. Să se arate că aria închisă de curbă și asimptota ei verticală este împărțită de axa ordonatelor în două părți, una fiind dublul celeilalte.

3°. Să se găsească centrul de greutate al ariei mici, presupusă omogenă.

4°. Să se generalizeze la curbe având ca ecuație:

$$y^n(a^p-x^p)=a^{n+p}.$$

B. BARBĂLAT.

6448. Să se găsească poziţia de echilibru a unui punct M, situat în planul unui triunghiu ABC, atras de vârfurile triunghiului cu forţe proporţionale cu laturile triunghiului. Se vor studia toate cazurile posibile, presupunând că din fiecare vârf acţionează forţe proporţionale cu orice latură a triunghiului.

EMIL MORŢUN.

6449. JULES VERNE, în romanul „*De la terre à la lune*" a prevăzut că în momentul pornirii obuzului din tunul ce avea să arunce călători în lună, se va produce un şoc puternic asupra obiectelor şi persoanelor din interiorul obuzului. Faţă de vitesa de 16.000 m/sec cu care el presupunea că obuzul iese din tun, pe lungimea de 220 m cât este parcursul obuzului în ţeavă şi de durata de 0,0275 secunde în care se face acest parcurs, acceleraţia medie imprimată obuzului este de

$$16.000 : 0{,}0275 = 580.000 \text{ m/sec},$$

iar apăsarea (forţa) asupra unui călător de 70 kg greutate ar fi fost de

$$580.000 \times 70 : 9{,}81 = 4.150.000 \text{ kg}$$

destul de mare pentru a-l strivi în timpul de 0,0275 sec. cât durează aplicarea acestei forţe. Totuşi JULES VERNE a presupus că şocul va putea fi anulat prin anumite mijloace.

Să se găsească un mijloc simplu — (hidraulic sau altul) — pentru a micşora efectul şocului şi să se calculeze în ce măsură acest efect ar fi putut fi micşorat.

N. V. K.

6450. Să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$2f(x) \cdot y'' + f'(x) \cdot y' - f''(x) \cdot y = 0$$

unde $f(x)$ este o funcţiune dată.

IOSIF HITZIG.

ERATĂ. In enunţul exerciţiului 11 dela pag. 220 din acest volum se înlocueşte c prin a.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Andronescu N. Longin-Romulus (6290, 386, 416, 22, 38); *Athanasiu C. Mihail-Luciliu* (6386, 416, 7, 29, E); *Berdan C.* (6386, 438, E, P); *Bucur A. N.* (6422, 4); *Constantinescu G. Virgil* (3725, 4132, 72, 557, 634, 5117, 813, 6134, 61, 310, 9, 27, 411, 5, 6, 22, 4, E, P); *Crăcea I. D.* (3318, 4172, 634, 60, 717, 5123, 67, 739, 57, 65, 805, 13. 61, 71, 907, 8, 42, 52, 66, 70, 99, 6053, 84, 140, 60, 1, 8, 230, 45, 53, 61, 84, 6, 7, 402, 11, 24); *Crăciunescu E.* (P); *Dodu A. E.* (6287, 8, 94, 6, 7, 310, 4, 40, 50, 1, 86, E); *Georgescu Răducanu* (P); *Ionescu Valentin* (6322, 54, 9, 78, 412); *Măncescu N. I.* (6105, 314, 23, 5, 7, 59, 85, 404, 12, 3, 6, 20, E); *Marinescu E. Em.* (N, P); *Munteanu T. I.* (6323, 7, 78, 86, 94, 5, 6, 420); *Nedelcu Fl.* Ing. (P); *Nedelcu F. Mariana* (6394, 406, P); *Nestorescu C. D.* (6424); *Niculescu I. Paul* (6424); *Novac I. I.* (5312, 6273, 86, 7, 8, 90, 6, 314, 24, 7, 30, 1, 3, 40, 50, 4, 62, 78, 86, 91, 412); *Petcu Al. Valeriu* (5060, 649, 6180, 1, 209, 42, 87, 90, 3, 424, E, R); *Popovici D. Dan* (6354, 78, 95); *Puşcaşu M. Silviu* (E, P); *Roşu V. C.* (6322, 3, 50, 4, 9, 412, 6, 20); *Soare V. M.* (5914, A, E, P); *Şuta I. M.* (6392); *Teodorescu St. Ioan*, Ploeşti (5294, 806, P); *Thébault V.* (A); *Tibăr I. Aurel* (6402, 16, 31, A, E); *Vargă I. A.* (1702, 6394, 415, 22, 6, 7, 8, 38); *Vasiliu M. Mircea* (6395).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *« Gazeta Matematică »*.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate, cu preţul de 800 lei volumul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—X, XII, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 150

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 180

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . Lei 500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . Lei 250

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 100

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.500

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 320

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 400

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 100

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* Lei 250

PENTRU BIBLIOTECI ŞI AUTORITĂŢI TOATE PREŢURILE SE TRIPLEAZĂ

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LIII abonamentele sunt:

Pentru profesori, studenţi şi elevi. . . . . Lei 480

Pentru autorităţi şi biblioteci . . . . . Lei 1.500

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1947 la 1 Iunie 1948 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este:

Pentru profesori, studenţi şi elevi . . . . . Lei 180

Pentru autorităţi şi biblioteci. . . . . Lei 400

Abonamentele se pot plăti la cont CEC Nr. 26220 sau se pot trimite unde se trimite şi corespondenţa, pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 10.143.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIII

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1948

SUMARUL

1. Asupra focarelor elipsei lui Steiner . *Em. E. Marinescu.*
2. Raport pentru decernarea premiului „Nicolae G. Botea" . . . . . *I. S. Antoniu, E. Botea, Ş. Gheorghiu.*
3. Raport pentru premiul de aritmetică „Ion Ionescu" . . . . . *G-l G. Buicliu, N. Georgescu-Roegen.*
4. Note matematice: 19—20.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 345.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2108, 5196, 6035, 6088, 6331.
10. Exerciţii: 20—23.
11. Probleme propuse: 6451—6460.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALA
1948

9677

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti, (Casa „*Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie compusă în prezent din d-nii: N. Georgescu-Roegen, Licenţiat în Matematici; C. C. Teodorescu, Inginer, Profesor la Politehnica Bucureşti; Al. D. Bunescu, Inginer (Casier).

Şedinţele următoare ale Soc. „*Gazeta Matematică*":

Marţi 23 Martie ora 18: Adunarea materiei pentru Nr. 8, numirea comisiunei pentru concursul *Gezetei Matematice* şi decernarea premiului „GH. E. FILIPESCU".

Marţi 6 Aprilie ora 18: Facerea copertei pentru Nr. 8.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1947 sunt indicate în tabla de materii a volumului LII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 6391, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 400, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 50, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 60.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La «*Gazeta Matematică*» se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . „ 150
— **Medalia comemorativă, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a «*Gazetei Matematice*» . . . . . „ 500**

LICEUL „SF. LAZĂR" - SIBIU
Biblioteca Profesorilor
No. 8277
9677

ASUPRA FOCARELOR ELIPSEI LUI STEINER

In cele ce urmează, voi arăta câteva proprietăţi ale focarelor primei elipse a lui STEINER, circumscrisă triunghiului ABC şi înscrisă în triunghiul său anticomplimentar LMN. Se ştie că centrul acestei elipse este G, baricentrul ambelor acestor triunghiuri şi că normalele în A, B, C sunt înălţimile triunghiului ABC.

Faţă de ABC, reamintim notaţiile: H ortocentrul; A', B', C' picioarele înălţimilor; h_a, h_b, h_c lungimile înălţimilor; A_a, B_b, C_c picioarele medianelor; m_a, m_b, m_c lungimile medianelor; ω unghiul lui BROCARD şi F_1 şi F_2 focarele elipsei lui STEINER. Avem:

$$\overline{F_1A} + \overline{F_2A} = \overline{F_1B} + \overline{F_2B} = \overline{F_1C} + \overline{F_2C} = 2\delta \qquad (1)$$

δ fiind semi-axa mare a elipsei.

a) Fie acum A_1, B_1, C_1 ; A_2, B_2, C_2 picioarele cevienelor duse prin F_1 şi F_2 în raport cu ABC.

Razele vectoare (AA_1, AA_2), (BB_1, BB_2), (CC_1, CC_2) fiind egal înclinate pe AA', BB', CC', avem:

$$\overline{AA_1} = \overline{AA_2} \quad , \quad \overline{BB_1} = \overline{BB_2} \quad , \quad \overline{CC_1} = \overline{CC_2}.$$

Notând cu F_1', F_1'', G_l proiecţiile focarelor şi a lui G pe MN, se deduce:

$$\overline{F_1'F_1} + \overline{F_1''F_2} = 2\overline{GG_l} = \frac{4}{3}h_a \qquad (2)$$

(deoarece $GG_l = \frac{1}{3}$ din înălţimea corespunzătoare în trunghiul anticomplementar). Insă

$$AF_1F_1' \sim AA_1A' \quad \text{şi} \quad AF_2F_1'' \sim AA_2A'$$

adică:

$$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{F_1F_1'}}{\overline{AA'}} \quad , \quad \frac{\overline{AF_2}}{\overline{AA_2}} = \frac{\overline{F_2F_1''}}{\overline{AA'}} \qquad (3)$$

Adunând relaţiile (3) şi ţinând seamă de (2), rezultă:

$$\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \frac{\overline{AA_1}}{ha}(\overline{F_1F_1'} + \overline{F_2F_1''}) = \frac{4}{3}\overline{AA_1}.$$

Prin analogie:

$$\overline{BF_1} + \overline{BF_2} = \frac{4}{3}\overline{BB_1} \quad , \quad \overline{CF_1} + \overline{CF_2} = \frac{4}{3}\overline{CC_1},$$

cari duse în (1) arată că:

$$\overline{AA_1} = \overline{AA_2} = \overline{BB_1} = \overline{BB_2} = \overline{CC_1} = \overline{CC_2} = \frac{3}{2}\delta = \rho. \qquad (4)$$

Deci: *cevienele duse prin focarele elipsei lui* STEINER, *circumscrisă triunghiului* ABC, *sunt egale*[1].

b) Există relațiile:

$$\overline{F_1A} + \overline{F_1B} + \overline{F_1C} = \overline{F_2A} + \overline{F_2B} + \overline{F_2C} = 2\rho$$
$$\overline{F_1A}^2 + \overline{F_1B}^2 + \overline{F_1C}^2 = \overline{F_2A}^2 + \overline{F_2B}^2 + \overline{F_2C}^2 \qquad (5)$$

Prima se deduce ușor, observând ca F_1 fiind un punct oarecare în planul ABC, iar A_1, B_1, C_1, picioarele cevienelor, duse prin F_1, avem: [2]

$$\frac{\overline{F_1A}}{\overline{AA_1}} + \frac{\overline{F_1B}}{\overline{BB_1}} + \frac{\overline{F_1C}}{\overline{CC_1}} = 2,$$

deducem ținând seamă de (4):

$$\frac{\overline{F_2A}}{\overline{AA_2}} + \frac{\overline{F_2B}}{\overline{BB_2}} + \frac{\overline{F_2C}}{\overline{CC_2}} = 2.$$

Relația a doua rezultă imediat [3], fiindcă F_1 și F_2 sunt simetrice față de G.

c) Deasemeni:

$$\frac{\overline{F_1A}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{A_2A_a}}{\overline{A_1A_a}}, \quad \frac{\overline{F_1B}}{\overline{F_2B}} = \frac{\overline{B_2B_b}}{\overline{B_1B_b}}, \quad \frac{\overline{F_1C}}{\overline{F_2C}} = \frac{\overline{C_2C_c}}{\overline{C_1C_c}}.$$

Fie $2\varphi_a$ unghiul opus laturii F_1F_2 în triunghiul F_1AF_2. Avem:

$$\overline{F_1F_2}^2 = \overline{F_1A}^2 + \overline{F_2A}^2 - 2\overline{F_1A}\cdot\overline{F_2A}\cos 2\varphi_a \qquad (6)$$

și relația medianei, față de același triunghiu:

$$\overline{F_1A}^2 + \overline{F_2A}^2 = \frac{8}{9}m_a^2 + \frac{\overline{F_1F_2}^2}{2} \qquad (7)$$

ținând seamă că:

$$\overline{F_1A} + \overline{F_2A} = \frac{4}{3}\rho \qquad (8)$$

și pe figură: $h_a = \rho\cos\varphi_a$, din (8) și (7) deducem:

$$\overline{F_1A} \times \overline{F_2A} = \frac{4}{9}\rho^2\left(\frac{\rho^2 - m_a^2}{\rho^2 - h_a^2}\right) \qquad (9)$$

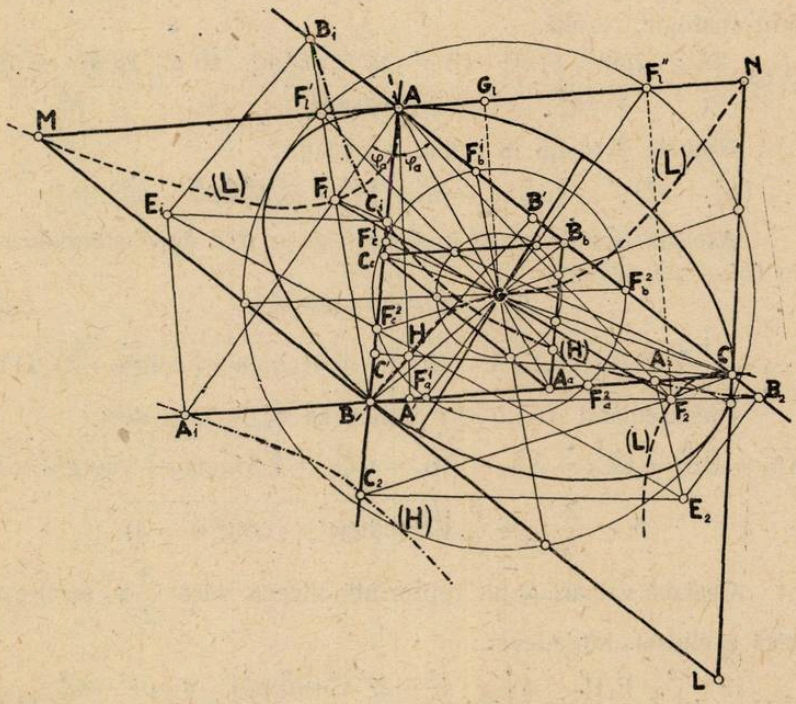
---

1) A se vedea nota matematică 20 din acest număr.
2) *Exercices de Géometrie*, FGM. pag. 75, nr. 165.
3) *Exercices de Mécanique*, FGM. pag. 605, nr. 1162.

iar (8) și (9) duc la ecuația:

$$u^2 - \frac{4}{3}u + \frac{4}{9}\rho^2\frac{\rho^2 - m_a^2}{\rho^2 - h_a^2} = 0, \text{ care rezolvată, dă:}$$

$$\overline{F_1A} \ , \ \overline{F_2A} = \frac{2}{3}\rho\left[1 \pm \sqrt{\frac{m_a^2 - m_a^2}{\rho^2 - h_a^2}}\right]$$



observând că:

$$\sqrt{m_a^2 - h_a^2} = \overline{A'A_a} \ , \ \sqrt{\rho^2 - h_a^2} = \overline{A_1A'}, \text{ avem:}$$

$$\overline{F_1A} \ , \ \overline{F_2A} = \frac{2}{3}\rho\left[1 \pm \frac{\overline{A_1A_a}}{\overline{A_1A'}}\right] \quad \text{ori} \quad \frac{\overline{A_1A'} + \overline{A'A_a} = \overline{A_1A_a}}{\overline{A_2A'} - \overline{A'A_a} = \overline{A_2A_a}}$$

rezultă:

$$\overline{F_1A} = \frac{2}{3}\rho\frac{\overline{A_2A_a}}{\overline{A_1A'}} \ , \ \overline{F_2A} = \frac{2}{3}\rho\frac{\overline{A_1A_a}}{\overline{A_2A'}}$$

cum $\overline{A_1A'} = \overline{A_2A'}$ prin împărţire avem prima relaţie dela *c)*. In acelaşi mod se obţin relaţii analoage.

d) Din (6) şi (8) deducem:

$$\overline{F_1F_2^2} = \frac{32}{9}\rho^2 - 4\,\overline{F_1A}\,.\,\overline{F_2A} - \frac{16}{9}m_a^2 \text{ şi cu ajutorul lui (9)}$$

$$\overline{F_1F_2^2} = \frac{16}{9}\left[2\rho^2 - \rho^2\frac{m_a^2-\rho^2}{h_a^2-\rho^2} - m_a^2\right] = \frac{16}{9}\frac{\rho^4 - 2\rho^2 h_a^2 + h_a^2 m_a^2}{\rho^2 - h_a^2}$$

prin analogie, rezultă:

$$\overline{F_1F_2^2} = \frac{16}{9}\frac{\rho^4-2\rho^2h_a^2+h_a^2m_a^2}{\rho^2-h_a^2} = \frac{16}{9}\frac{\rho^4-2\rho^2h_b^2+h_b^2m_b^2}{\rho^2-h_b^2} = \frac{16}{9}\frac{\rho^4-2\rho^2h_c^2+m_c^2h_c^2}{\rho^2-h_c^2}.$$

Primele 2 relaţii în ρ duc la ecuaţia:

$$(h_a^2 - h_b^2)\rho^4 - (m_a^2h_a^2 - m_b^2h_b^2)\rho^2 + h_a^2h_b^2(m_a^2 - m_b^2) = 0.$$

Această ecuaţie, pusă în funcţie de a, b, c după simplificare cu $(b^2 - a^2)$ devine:

$$2\rho^4 - \Sigma a^2\rho^2 + 6S^2 = 0 \qquad (10)$$

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{\Sigma a^2 \pm \sqrt{(\Sigma a^2)^2 - 48S^2}} = \sqrt{S(\operatorname{cotg}\omega \pm \sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3})} \qquad (11)$$

Presupunând $a < b < c$ trebue ca $\rho_1 > h_a$ şi deci:

$$\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1} = \overline{AA_2} = \overline{BB_2} = \overline{CC_2} = \sqrt{S(\operatorname{cotg}\omega + \sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3})}$$

şi $$\delta = \frac{2}{3}\rho_1 = \frac{2}{3}\sqrt{S\,(\operatorname{cotg}\omega + \sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3})}.$$

Cealaltă valoare ρ_2 nu reprezintă altceva decât $\frac{3}{2}\varphi$, semi-axa mică a elipsei. Intr'adevăr:

$$\varphi^2 = \left(\frac{2}{3}\rho_1\right)^2 - \frac{\overline{F_1F_2^2}}{4} = \frac{4}{9}\left[\rho^2 - \frac{\rho^4 - 2\rho^2h_a^2 + h_a^2m_a^2}{\rho^2 - h_a^2}\right] = \frac{4}{9}h_a^2\frac{\rho^2 - m_a^2}{\rho^2 - h_a^2} \qquad (12)$$

şi deducem:

$$\varphi^2 = \frac{4}{9}h_a^2\frac{\rho^2 - m_a^2}{\rho^2 - h_a^2} = \frac{4}{9}h_b^2\frac{\rho^2 - m_b}{\rho^2 - h_b^2} = \frac{4}{9}h_c^2\frac{\rho^2 - m_c^2}{\rho^2 - h_c^2}.$$

Eliminând pe (ρ) între primele două ecuaţii, avem succesiv

$$\frac{9\varphi^2 - 4h_a^2}{9\varphi^2 - 4h_b^2} = \frac{h_a^2}{h_b^2}\cdot\frac{9\varphi^2 - 4m_a^2}{9\varphi^2 - 4m_b^2} \quad \text{sau:}$$

$$81\varphi^4(a^2 - b^2) - 36(a^2m_b^2 - b^2m_a^2)\varphi^2 + 64S^2(m_b^2 - m_a^2) = 0.$$

Sau: $$27\varphi^4 - 24\,S\,\operatorname{cotg}\omega\,\varphi^2 + 16S^2 = 0$$

$$\therefore \quad \varphi_{1,2} = \frac{2}{3}\sqrt{S\,(\operatorname{cotg}\omega \pm \sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3})}$$

adică semi-axele elipsei. Deducem aria:

$$\mathcal{A} = \pi\delta\varphi = \frac{4}{9}\pi S\sqrt{(\operatorname{cotg}\omega + \sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3})(\operatorname{cotg}\omega - \sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3})} = \frac{4}{9}\pi\sqrt{3}S$$

de unde rezultă, relaţia din FGM. *Exercices de Géometrie*, pag. 1113 nr. 2241:

$$\frac{\text{aria el STEINER}}{\text{aria tr. ABC}} = \frac{\text{aria cerc. circum. tr. ABC}}{\text{aria tr. echilat. înscris}}$$

deducem distanţa focală:

$$f = (\delta^2 - \varphi^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{S^2\,(\operatorname{cotg}^2\omega - 3)}$$

şi făcând legătura cu cele stabilite în G. M., Vol. L, pag. 349 de d. A. DOBRESCU, deducem:

$$f^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{R\sqrt{3}}{W'W''}$$

W' şi W'' fiind cele 2 centre isodinamice ale triunghiului ABC.

e) Comparând (12) cu (9) obţinem:

$$\overline{F_1A}\cdot\overline{F_2A} = \frac{\rho^2\varphi^2}{h_a^2}$$

şi analoagele. Rezultă:

$$\frac{\overline{F_1A}\cdot\overline{F_2A}}{a^2} = \frac{\overline{F_1B}\cdot\overline{F_2B}}{b^2} = \frac{\overline{F_1C}\cdot\overline{F_2C}}{c^2} = \left(\frac{\rho\varphi}{2S}\right)^2.$$

f) Punctele F_1 *şi* F_2 *sunt situate pe cubica lui* LUCAS (L) *circumscrisă lui* ABC, *ce trece prin* G, H, *punctul lui* GERGONNE, *punctul lui* NAGEL, *vârfurile triunghiului anticomplementar lui* ABC, *etc.*

Să dovedim proprietatea pentru F_1. Inseamnă că perpendicularele din A_1, B_1, C_1 pe laturile BC, CA, AB sunt concurente, deci trebue îndeplinită condiţia:

$$\overline{A_1B}^2 - \overline{A_1C}^2 + \overline{B_1C}^2 - \overline{B_1A}^2 + \overline{C_1A}^2 - \overline{C_1B}^2 = 0.$$

Fiindcă $|\overline{A_1B} + \overline{A_1C}| = a$, $|\overline{B_1C} + \overline{B_1A}| = b$, $|\overline{C_1A} + \overline{C_1B}| = c$,

rezultă: $$2a\cdot\overline{A_1B} + 2b\,\overline{B_1C} + 2\,\overline{C_1A}\cdot c = \Sigma a^2 \qquad (13)$$

Față de triunghiul AA_1B, neglijând că F_1 e în exteriorul lui ABC, vom scrie:

$$\rho^2 = \overline{A_1B}^2 + c^2 - 2\overline{A_1B}\,c\,\cos B \quad \therefore \quad \overline{A_1B_{1,2}} = c\cos B \pm \sqrt{\rho^2 - h_a^2};$$

$$\overline{B_1C_{1\,2}} = a\cos C \pm \sqrt{\rho^2 - h_b^2} \quad ; \quad \overline{C_1A_{1,2}} = b\cos A \pm \sqrt{\rho^2 - h_c^2}.$$

Inlocuind aceste valori în (13), presupusă adevărată, și observând că $2\Sigma ac\,\cos B = \Sigma a^2$, relația (13) se reduce la:

$$\Sigma \pm \sqrt{a^2\rho^2 - 4S^2} = 0$$

această relație, făcută rațională duce la:

$$\Sigma (a^2\rho^2 - 4S^2)^2 - 2\Sigma (b^2\rho^2 - 4S^2)\,(c^2\rho^2 - 4S^2) = 0$$

ori $\Sigma (a^2\rho^2 - 4S^2)^2 = \rho^4 \Sigma a^4 - 8\rho^2 S^2 \Sigma a^2 + 48S^4$

și $-\Sigma (b^2\rho^2 - 4S^2)(c^2\rho^2 - 4S^2) = -\rho^4 \Sigma b^2 c^2 + 8\rho^2 S^2 \Sigma a^2 - 48S^4$

și relația considerată devine:

$$\rho^4 (\Sigma a^4 - 2\Sigma b^2 c^2) + 8\rho^2 S^2 \Sigma a^2 - 48S^4 = 0$$

cum $16S^2 = -(\Sigma a^4 - 2\Sigma b^2 c^2)$, deducem:

$$2\rho^4 - \Sigma a^2 \rho^2 + 6S^2 - 0$$

adică tocmai (10). Proprietatea e demonstrată atât pentru F_1 cât și pentru F_2. Deci: *Focarele elipsei lui* STEINER *se găsesc pe cubica lui* LUCAS.

Referindu-ne la triunghiul LMN, deoarece F_1 și F_2 sunt puncte invers izogonale și colineare cu G, focarele elipsei lui STEINER circumscrisă triunghiul ABC se găsesc pe cubica celor 17 puncte[1] a cărei ecuație este:

$$\alpha^2 (c^2\beta^2 - b^2\gamma^2) + \beta (a^2\gamma^2 - c^2\alpha^2) + \gamma (b^2\alpha^2 - a^2\beta^2) = 0$$

și care nu este altceva decât transformata prin puncte anticomplementare a cubicei lui LUCAS, referitoare la ABC și definită de relația:

$$a^2 \frac{(\beta - \gamma)}{\beta + \gamma} + b^2 \frac{(\gamma - \alpha)}{\gamma + \alpha} + c^2 \frac{(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} = 0.$$

g) Fie E_1 și E_2 corespunzătoarele punctelor F_1 și F_2 pe cea de a doua cubică a lui LUCAS. *Punctele* E_1 *și* E_2 *sunt simetrice față de* H.

---

1) *Ex. mécanique* par FGM. pag. 772.

Mijlocul lui $\overline{E_1E_2}$ (deoarece A_1 şi A_2 sunt simetrice faţa de A') se află pe înălţimea AA'. Pentru acelaşi motiv se află şi pe BB' şi pe CC' deci în punctul lor comun, H.

Se remarcă deasemeni, că E_1E_2 e paralelă cu axa mare a elipsei deci şi cu una din asimptotele hiperbolei lui KIEPERT.

h) Punctele A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 *se găsesc pe o conică* (H).

Proprietatea e demonstrată ţinând seamă că cevienele (AA_1, AA_2), (BB_1, BB_2), (CC_1, CC_2) aparţin unor cercuri egale, de raze ρ şi de centre A, B, C. (E cazul probl. 21 din „*Coordonate baricentrice*" de C. COŞNIŢĂ pag. 123).

i) Paralelele duse prin G *la* AA_1, BA_1, CC_1, AA_2, BB_2, CC_2 *taie laturile opuse ale triunghiului* ABC *în 6 puncte situate pe cercul principal al celei de a doua elipse a lui* STEINER *circumscrisă triunghiului* $A_aB_bC_c$ *şi înscrisă în* ABC.

Deoarece G este echiparalelul punctelor F_1 şi F_2 (e uşor de văzut), voi enunţa cazul mai general:

Fie M_1 un punct oarecare în planul ABC, iar M_a^1, M_b^1, M_c^1 picioarele cevienelor duse prin M_1. Cercurile de centre A, B, C şi de raze AM_a^1, BM_b^1, CM_c^1 taie a doua oară laturile lui ABC în M_a^2, M_b^2, M_c^2. Paralelele din P — echiparalelul lui M_1 — la cevienele AM_a^1, AM_a^2, BM_b^1, BM_b^2, CM_c^1, CM_c^2 taie laturile opuse ale lui ABC în 6 puncte situate pe un cerc.

Într'adevăr, după definiţia punctelor echiparalele, paralelele duse din P la AM_a^1, BM_b^1, CM_c^1 şi mărginite la laturile opuse sunt egale între ele. Insemnând cu ρ_1 lungimea lor comună s'a arătat[1] că:

$$\rho_1 = \frac{l_a l_b l_c}{\Sigma l_b l_c} \qquad (14)$$

dar triunghiurile $AM_a^1M_a^2$, $BM_b^1M_b^2$, $CM_c^1M_c^2$ fiind isoscele şi triunghiurile cu vârful comun în G şi laturile paralele lor sunt isoscele. Cercul enunţat mai sus are deci centrul în P şi rază ρ_1 definită ca la (14). Când P coincide cu G, $\rho_1 = \frac{1}{3}\rho$, adică raza cercului principal al celei de a doua elipsă a lui STEINER.

---

1) G. M. Vol. XXXIII, pag. 243.

j) O consecinţă e următoarea: *Paralelele duse prin* G *la cevienele corespunzătoare focarelor elipsei lui* STEINER *circumscrisă lui* ABC, *întâlnesc laturile respective ale triunghiurilor complimentare sau anticomplimentare de ordinul* n *faţă de* ABC *în 6 puncte situate pe cercurile principale ale elipselor lui* STEINER *înscrise în triunghiurile corespunzătoare.*

Cu alte cuvinte, dacă unui triunghiu ABC îi circumscriem sau înscriem *n* triunghiuri anticomplimentare sau complimentare şi ne oprim la unul din aceste triunghiuri construind cevienele AA_1, BB_1, CC_1; AA_2, BB_2, CC_2 corespunzătoare focarelor elipsei lui STEINER circumscrise acelui triunghiu, paralelele din G la cele 6 ceviene întâlnesc laturile respective ale tuturor triunghiurilor considerate în şase puncte situate pe cercurile principale ale elipselor lui STEINER înscrise în acele triunghiuri.

Notă. In *Gazeta Matematică*, Vol. XXXI, pag. 408, d-l N. AGRONOMOF arată că în planul triunghiului ABC există 2 puncte P_1 şi P_2 astfel că cevienele duse prin acele puncte şi mărginite la laturile opuse sunt egale. D-sa numeşte punctele P_1 şi P_2 izocentrele triunghiului ABC, fără însă a arăta că aceste puncte sunt focarele elipsei lui STEINER, circumscrisă lui ABC, Astfel, D-sa stabileşte cu ajutorul calculului baricentric, valoarea comună a cevienelor egale trecând prin P_1 şi P_2.

$$l_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\Sigma a^2 + 4S\sqrt{3}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\Sigma a^2 - 4S\sqrt{3}}{2}}\right].$$

Tot în acel articol, d-l N. AGRONOMOF dă următoarea construcţie simplă a punctelor P_1 şi P_2.

„*Construim pe latura* BC *triunghiul echilateral* BCA_1 *spre exterior şi* BCA_2 *spre interior. Atunci:*

$$l_1 = \frac{1}{2}(\overline{AA_1} + \overline{AA_2})$$

Se determină coordonatele baricentrice ale izocentrelor

$$l_1 \pm \sqrt{4l_1^2 - 3a^2}\ ,\quad l_1 \pm \sqrt{4l_1^2 - 3b^2}\ ,\quad l_1 \pm \sqrt{4l_1^2 - 3c^2}.$$

Se arată încă în acel articol că P_1 şi P_2 sunt colineare cu G, fără a se arăta că sunt simetrice faţă de G.

Distanţa P_1P_2 e dată de expresia:

$$\overline{P_1P_2}^2 = \frac{16}{9}\sqrt{\Sigma a^4 - \Sigma a^2 b^2}$$

fără însă a se menţiona că această lungime este egală cu dubla distanţă focală, a elipsei lui STEINER circumscrisă triunghiului ABC.

EMIL E. MARINESCU.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „NICOLAE G. BOTEA"

Cercetând activitatea corespondenţilor *Gazetei Matematice*, elevi de liceu sau studenţi, din volumul LII al revistei, activitate referitoare la Geometria *triunghiului* sau a tetraedrului, am făcut următoarele constatări:

1. Faţă de ultimii ani activitatea a fost mai întinsă în suprafaţă şi adâncime.

2. Faţă de restul corespondenţilor se detaşează numele d-lor: P. P. DRĂGHICESCU şi EMIL E. MARINESCU, premianţii anilor trecuţi.

Domnul P. P. DRĂGHICESCU student, are publicate următoarele: articol „Pe marginea unei note" pag. 316; nota Nr. 3, 79, O generalizare; probleme propuse: 6281, 6335; singur rezolvitor la problemele 5708, 5573.

Domnul EMIL MARINESCU are publicată activitatea în timpul când era elev la liceul „Aurel Vlaicu" din Bucureşti: nota Nr. 9, pag. 172, Despre centrele izodinamice; problemele propuse 6295, 6363, 6374; singur rezolvitor la problema 5993, soluţie foarte bună la problema 6115.

Cantitativ activitatea d-lui P. P. DRĂGHICESCU este mai mare, calitativ activităţile sunt egale; condiţiile iniţiale, vârsta, anii de experienţă matematică sunt în favoarea d-lui EMIL E. MARINESCU cari deşi mai tânăr, realizează lucruri tot atât de frumoase ca d-l P. P. DRĂGHICESCU.

Propunem a fi premiat d-l EMIL E. MARINESCU.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL NICOLAE BOTEA
Ing. I. S. ANTONIU, Ing. EMIL BOTEA
şi ŞERBAN GHEORGHIU.

Adunarea generală din 17 Februarie 1948 a aprobat să fie premiat atât d-l E. MARINESCU, cât şi d-l P. P. DRĂGHICESCU decernându-se fiecăruia ca premiu câte un volum din *Mecanica Raţională* de A. G. IOACHIMESCU.

RAPORT PENTRU PREMIUL DE ARITMETICĂ „ION IONESCU"

Regretatul ION IONESCU ţinea cu orice preţ ca premiul de aritmetică să se acorde, chiar dacă în cursul unui an publicarea materialului cu subiecte de aritmetică era mai redusă, cum este în vol. LII la care se referă acest raport. In volumul LII s'au publicat soluţii numai la 8 probleme de aritmetică. Nu s'a publicat nici un articol şi n'a apărut decât o notă de aritmetică.

Totuşi ţinând seamă de dezideratul regretatului Profesor Inginer ION IONESCU, în memoria căruia s'a atribuit numele premiului de aritmetică, am căutat să desprindem printre corespondenţii, elevi de liceu, ale căror nume sunt publicate în Vol. LII, pe acela care s'a impus mai mult şi am găsit pe d-l P. P. TEODORESCU elev la liceul Matei Basarab, care este singurul rezolvitor la problema 5527, este citat printre rezolvitorii problemei 6270 şi a propus problema 6360 de aritmetică. In afară de acestea redacţia posedă dela d-l P. P. TEODORESCU multe probleme de aritmetică, note, exerciţii şi probleme propuse, care nu sunt încă publicate.

Atât pentru activitatea generală a d-lui P. P. TEDORESCU, cât şi pentru activitatea sa la aritmetică propunem să i se acorde premiul de aritmetică « ION IONESCU » pentru Vol. LII.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI DE ARITMETICĂ „Ion Ionescu"

G-l GH. BUICLIU, N. GEORGESCU ROEGEN.

Acest raport a fost citit şi aprobat de Adunarea generală în şedinţa dela 17 Februarie 1948.

NOTE MATEMATICE

19. *Formula lui* THABIT BEN KORRAH *asupra numerelor amiabile.* D-l P. P. DRĂGHICESCU reproduce [1] după J. DUPUIS regula lui THABIT BEN KORRAH după care numerele

$N_1 = 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 1)$ şi $N_2 = 2^n(3 \cdot 2^n - 1)(3 \cdot 2^{n-1} - 1)$

sunt amiabile, dacă factorii din paranteze sunt numere prime.

1) G. M. vol. L, pag. 183.

Imi propun să arăt cum se poate ajunge la această regulă, căutând să determin condițiile ca numerele $N_1 = 2^n P$ și $N_2 = 2^n P_1 P_2$ unde P, P_1 și P_2 sunt numere prime impare să fie amiabile, adică să satisfacă egalitățile:

$$s(N_1) = s(N_2) = N_1 + N_2 \qquad (1)$$

unde s (N) este suma divizorilor lui N, inclusiv N.

Din (1) se deduce

$$(2^{n+1} - 1)(P+1) = (2^{n+1} -)(P_1 + 1)(P_2 + 1) = 2^n (P + P_1 . P_2) \qquad (2)$$

Fie

$$P = 2^\alpha p - 1 \; ; \; P_1 = 2^{\alpha_1} p_1 - 1 \; ; \; P_2 = 2^{\alpha_2} p_2 - 1$$

unde p, p_1 și p_2 sunt numere impare.

Din prima egalitate din (2) se deduce

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \; , \; p = p_1 p_2$$

deci

$$(2^{n+1} - 1) 2^\alpha p = 2^n (2^\alpha p - 1 + 2^{\alpha_1 + \alpha_2} p_1 p_2 - 2^{\alpha_1} p_1 - 2^{\alpha_2} p_1 + 1)$$

$$\therefore \qquad 2^{\alpha_1 + n} p_1 + 2^{\alpha_2 + n} p_2 = 2^{\alpha_1 + \alpha_2} p_1 . p_2 . \qquad (3)$$

Rezultă că p_1 trebue să se dividă prin p_2 și că p_2 trebue să se dividă prin p_1 deci

$$p_1 = p_2 = q$$

și cum P_1 trebue să fie diferit de P_2, $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Voi presupune $\alpha_1 < \alpha_2$ deci $\alpha_2 = \alpha_1 + k$, $\qquad k > 0$.

Din (3) rezultă

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 + n \; , \; \alpha_2 = n \; , \; q = 2^{\alpha_2 - \alpha_1} + 1 = 2^k + 1.$$

Prin urmare: *Numerele*

$$N_1 = 2^n (2^{2n-k} q^2 - 1) \text{ și } N_2 = 2^n (2^{n-k} q - 1)(2^n q - 1)$$

unde $q = 2^k + 1$ *sunt amiabile ori de câte ori numerele din paranteze sunt prime.*

Observații. 1. Grupele de numere (4) sunt singurele de forma presupusă, care pot fi amiabile.

2. Pentru $k = 1$ se obține regula THABIT BEN KORRAH.

3. Când k este par, numărul $2^{2n-k} q^2 - 1$ fiind diferența a 2 patrate se descompune într'un produs de 2 factori, deci nu este prim. Deasemenea dacă $k = 3$, $q = 2^3 + 1 = 9$ și cum unul din

numerele $(n-3)$ şi n este par, rezultă că factorii din paranteze dela N_2 nu pot fi primi în acelaş timp. Conform acestor observaţii, în (4) nu trebuesc încercate decât valorile impare ale lui k diferite de 3.

4. Există soluţiuni pentru $k > 1$. Astfel pentru $k = 5$, $n = 8$ deci $q = 2^5 + 1 = 33$, numerele

$$2^3 . 33 - 1 = 263 \; ; \; 2^8 . 33 - 1 = 8447 \; ; \; 2^{11} . 1089 - 1 = 2230271$$

sunt prime. Prin umare numerele:

$$N_1 = 2^8 . 2230271 \text{ şi } N_2 = 2^8 . 263.8447$$

sunt amiabile.

I. B. FLORESCU.

20. *Observare asupra focarelor elipsei lui* STEINER [1]. Proprietatea focarelor F_1 şi F_2 ale elipsei lui STEINER, că cevienele corespunzătoare sunt egale, este bine cunoscută. Această proprietate a fost demonstrată de BROCARD în MATHESIS (1896, pag. 219). In acelaş volum din MATHESIS, (pag. 221) J. NEUBERG publică următoarea demonstraţie simplă a acestei propoziţiuni, pe care cred că este instructiv a o reproduce.

Fie f_1 şi f_2 punctele unde paralela dusă prin G laturei BC întâlneşte respectiv pe AF_1 şi AF_2. Dreapta $f_1 f_2$ este perpendiculară pe bisectoarea interioară a unghiului F_1AF_2 (această bisectoare interioară fiind chiar înălţimea vârfului A), iar G mijlocul lui F_1F_2. Rezultă:

$$Af_1 = Af_2 = \frac{1}{2}(AF_1 + AF_2) = \delta$$

$$\therefore \; AA_1 = AA_2 = \frac{3}{2}\delta \quad \text{şi} \quad BB_1 = BB_2 = CC_1 = CC_2 = \frac{3}{2}\delta$$

ceeace demonstrează propoziţiunea noastră.

Identitatea dintre ecuaţiunea în ρ obţinută la $\S f$ şi ecuaţiunea (10), pune în evidenţă o proprietate caracteristică a focarelor primei elipse a lui STEINER. Aceste puncte sunt singurele puncte, la distanţă finită, de pe cubica lui LUCAS simetrice în raport cu centrul de gravitate al triunghiului.

---

1) A se vedea articolul d-lui E. MARINESCU din acest număr.

La §f s'a arătat că focarele reale se găsesc pe cubica lui LUCAS. Un calcul absolut analog, arată că şi focarele imaginare se găsesc deasemeni, pe aceeaşi cubică. Pe de altă parte, cubica lui LUCAS şi simetrica sa în raport cu G au 9 puncte comune. Dintre acestea 3 sunt la infinit, două sunt confundate în G astfel că nu mai rămân decât 4 la distanţă finită şi anume focarele primei elipse a lui STEINER.

Ş. G.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Universitatea din Bucureşti. Facultatea de Ştiinţe. Secţia Fizică

Sesiunea Octombrie 1947. Examenul de admitere în anul I

I. Se dau punctele A $(\alpha - 2, 0)$, B $(\alpha - 2, \alpha - 2)$, C $(0, \alpha - 2)$.

1. Să se scrie ecuaţiile laturilor triunghiului ABC.

2. Să se scrie ecuaţia cercului Γ circumscris acestui triunghiu.

3. Să se arate că Γ este tangent dreptei $x + y = 0$ şi să se afle coordonatele punctului de contact.

4. Să se scrie ecuaţia cercului Γ' de rază egală cu a cercului Γ, tangent exterior acestui cerc în punctul de contact aflat la Nr. 3.

(Candidaţii al căror număr de ordine este par vor lua $\alpha=0$, impar, $\alpha=4$).

II. Ecuaţia

$$4xy^3 - 7x^2y^2 + 4x^3y - 16 = 0$$

defineşte pe y ca funcţie implicită de x. Se va calcula derivata y' şi se va înlocui $x = 2$ în ecuaţia funcţiunii şi a derivatei.

III. Intr'un triunghiu oarecare, bisectoarea unui unghiu împarte latura opusă în părţi proporţionale cu laturile unghiului.

BIBLIOGRAFIE

Acta Bolyaiana. Tomus I (Fasciculus 2). GH. PIC: Asupra grupurilor de substituţii lineare care lasă n puncte neschimbate. T. V. VESCAN: O explicaţie relativistă a anomaliei spinului. Urmează alte articole cu subiecte ştiinţifice dar nu de matematică.

Analele Româno-Sovietice. Vol. II, Noembrie—Decembrie 1947.

Bulletin de la Société Mathématique de France. Etat de la société mathématique de France au 30 Novembre 1947. Publică lista conferinţelor societăţii în anii 1946, 1947 şi lista memhrilor societăţii. Printre membrii acestei societăţi sunt şi conaţionalii noştri d-nii: Prof. TH. ANGHELUŢĂ, Prof. R. BĂDESCU, Prof. G. CĂLUGĂREANU, I. CÂRSTOIU, Prof. N. CIORĂNESCU, Prof.

I. CUREA, Prof. M. GHERMĂNESCU, Prof. N. GHIRCOIAŞU, Prof. C. IACOB, Prof. D. V. IONESCU, Prof. D. I. MANGÉRON, Prof. P. SERGESCU, I. I. STAMATE, Prof. S. STOILOV, Prof. V. VÂLCOVICI, dintre care numai trei nu sunt membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*. GH. B.

Intermédiaire des Recherches Mathématiques. Tome 3. Fascicule 12; N-os 0953 à 1050. Octobre 1947.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVII Nr. 12. Februarie 1948. M. GHERMĂNESCU: Conica celor nouă puncte a unui triunghiu. C. COŞNIŢĂ: O teoremă relativă la conice şi cuadrice. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse. Tabla de materii.

Revista Ştiinţifică a Liceului Institutului Român din Sofia. Nr. 4. 1947. Numărul pe care l-am primit cuprinde 103 pagini text, o pagină albă şi 2 pagini erată. Are formatul 202/238 mm şi este scos la Gestätner. Pe copertă este scrisă următoarea cugetare semnată G. ŢIŢEICA:

« Judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă. Adevărul curat, drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţii noastre ».

Pe prima foaie după copertă d-l TR. GIURGIUMAN, care pare a fi redactorul revistei, cere scuze cititorilor pentru întârzierea apariţiei revistei şi pentru greşelile de formă şi poate chiar de fond ale revistei, greşeli inerente când „cel ce poartă grija apariţiei este şi redactor şi tipograf". Cunoaştem greutăţile scoaterii unei reviste, şi, în ce ne priveşte, trecem şi peste greşelile de fond şi de formă, şi felicităm iniţiativa Institutului Român din Capitala Bulgariei. Spre deosebire de numeroasele reviste care au apărut şi au dispărut, în cursul vremurilor pe la liceele noastre, revista de care ne ocupăm este scoasă de profesorii liceului pentru complectarea cunoştinţelor didactice ale elevilor şi stimularea profesorilor. Astfel concepută, revista are sorţi de reuşită şi-i dorim din plin să reuşească. Sumarul numărului 4 (regretăm că nu am primit şi primele 3 numere) este următorul:

D. BRATU; Teoria lui KASSEL şi combinaţia ionică. TR. GIURGIUMAN: Planete şi electroni. T. GIURGIUMAN: Despre curcubeu. D. BRATU: Despre hidrogenul supra greu. Note ştiinţifice. Probleme propuse la bacalaureat în Bulgaria. (Problemele sunt urmate de răspunsuri şi sunt traduse din bulgăreşte de d-l TR. GIURGIUMAN). Probleme propuse la fizică. (21 de probleme, propuse de d-l D. BRATU).

Revista publică tot felul de chestiuni de ştiinţă redactate în româneşte sau franţuzeşte. GH. B.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol XXXIII. Nr. 4. Iaşi Oct.—Dec. 1947.

RADU BĂDESCU în colaborare cu d-ra CORNELIA NANEŞ. Culegere de probleme tehnice propuse la examenele de matematici generale şi mecanică. Litografiat şi editat sub îngrijirea Stud. Ing. OCTAVIAN BILUSEAC, Bucureşti 1946.

A. G. IOACHIMESCU. Culegere de Probleme de Mecanică. Ediţia a III-a revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA. Tipografia „Rotativa", Bucureşti.

CERERI

345. In ce carte sau tratat românesc se studiază amănunţit despre bazele de numeraţie ?

I. I. PISANCA.

DIVERSE

a) Adunările Societăţii „Gazeta Matematică"

Adunarea generală dela 17 Februarie 1948 a ales ca membri ai Societăţii *Gazeta Matematică* pe: Ing. PAUL BUNESCU, Ing. TUDOR V. CUCU, Ing. NICOLAE I. GRADIN, Prof. DORA IACOVACHE, Prof. EMIL ŞERBAN şi Ing. ALEXANDRU TAUBER.

Adunarea generală dela 24 Februarie 1948 a ales ca membri ai Societăţii *Gazeta Matematică* pe Prof. AUREL DRĂGULĂNESCU şi Ing. OVIDIU M. STĂNCIULESCU.

b) Cedarea dreptului de autor

D-l Profesor V. MARIAN, prin scrisoarea dela 7 Februarie 1948, a renunţat la dreptul de autor asupra *Elementelor lui* EUCLID în folosul fondului de tipărit *Gazeta Matematică.*

c) Donaţie

D-l Prof. N. ANIŢESCU trimite 2.300 lei din partea elevilor Liceului „T. Vladimirecu" din Târgu-Jiu pentru fondul *Gazeta Matematică.* Mulţumim şi pe această cale d-lui Prof. N. ANIŢESCU şi elevilor săi.

d) Din activitatea d-lui Prof. P. Sergescu

La Congresul Internaţional de Istoria Ştiinţelor ţinut la Lausanne între 4 şi 10 Septembrie 1947, colegul nostru d-l Profesor P. SERGESCU a fost ales preşedinte al Academiei Internaţionale de Istoria Ştiinţelor şi al Uniunii Internaţionale de Istoria Ştiinţelor. D-l Profesor P. SERGESCU este şi secretarul executiv al acestor asociaţii ştiinţifice, calitate care înseamnă *sufletul activităţii asociaţiilor.* In afară de aceasta d-l Prof. P. SERGESCU este membru *activ*, în adevărata accepţiune a cuvântului, la *International Council of Scientific Unions*, redactor *activ* la *« Archives Internationalles d'Histoire des Sciences »* şi *director* al unei colecţii din seria *« Actualités »* intitulată *« Histoire des Mathématiques »* şi din care prima fascicolă intitulată *« Recherches sur l'infini mathématique à l'établissement du calcul infinitésimal »* este scrisă de d-l P. SERGESCU.

La litera *b) Personale* punctul 2, dela pag. 341, Vol. LII am arătat şi alte activităţi peste hotare ale d-lui Prof. P. SERGESCU.

Revenim cu adăugirile de față pentru a sublinia că cu toată această neobosită activitate științifică peste hotare, d-l Prof. P. SERGESCU este mereu cu gândul la *Gazeta Matematică* căreia îi trimite aproape lunar scrisori cu sugestii și informații și pe care se străduește să o facă cât mai cunoscută și în străinătate. În același timp d-l Prof. P. SERGESCU veghiază și conduce de departe cunoscuta revistă « *Mathematica* », care apare la Cluj cu colaborări foarte serioase și în condițiuni de invidiat.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2108. *h_a, h_b, h_c, a, b. c fiind înălțimile și laturile triunghiului* ABC *să se calculeze unghiurile acestui triunghiu, când există relația*

$$\frac{h_a}{a}+\frac{h_b}{b}=1 \qquad \text{știind că} \qquad \sin C=\frac{1}{n}$$

n fiind întreg și pozitiv.

S. LEIBOVITZ.

Soluție. Eliminăm înălțimile dintre relația de condiție și

$$a h_a = b h_b = ab \sin C \quad \text{și obținem} \quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=n.$$

Notăm $b = at$ deci

$$t^2 - nt + 1 = 0$$

de unde

$$t=\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\left(n \pm \sqrt{n^2-4}\right), \quad \frac{1}{t}=\frac{a}{b}=\frac{1}{2}\left(n \mp \sqrt{n^2-4}\right)$$

Avem apoi

$$t=\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin(A+C)}{\sin A}=\cos C+\sin C \operatorname{cotg} A$$

$$\therefore \operatorname{cotg} A=\frac{t-\cos C}{\sin C}=n\left(t-\varepsilon\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) \qquad (\varepsilon=\pm 1)$$

$$\therefore \operatorname{cotg} A = n\left(\frac{n \pm \sqrt{n^2-4}}{2}-\varepsilon\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\right);$$

și analog

$$\operatorname{cotg} B = n\left(\frac{n \mp \sqrt{n^2-4}}{2}-\varepsilon\frac{\sqrt{n^2-4}}{n}\right).$$

Observări: 1°. Condiția ca n să fie întreg este inutilă.

2°. Pentru realitatea soluțiilor trebue ca $n \geq 2$ deci unghiul C cuprins între O și 30°, în care caz luăm $\varepsilon = 1$ sau între 150° și 180°, atunci $\varepsilon = -1$.

3°. Dacă $n = 2$, obținem

$$\operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg} B = 2 - \sqrt{3} \text{ sau } 2 + \sqrt{3}$$

ceea ce se justifică și direct, fiindcă sau $C = 30°$, $A = B = 75°$ sau $C = 150°$ și $A = B = 15°$.

4°. Au rezolvat problema și au fost anunțați pe copertele Vol. XIX E. N. BARISIEN; Vol. XX ST. GHIOLU, C. LAZĂR, V. MARCU, D. PERIEȚEANU, M. ROMANESCU și GH. ZAPAN; Vol. XXI M. GHERMĂNESCU și A. POPESCU; Vol. XXXVI N. N. MIHĂILEANU.

Recent s'a primit o bună soluție, pe o cale mai lungă, de la d-l P. P. TEODORESCU (Lic. „Matei Basarab", București).

PROBLEMA 5196. *Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, luate câte o singură dată, să se formeze patru numere care să fie dividentul, împărțitorul, câtul și restul unei împărțiri.*

V. THÉBAULT.

Problema comportă 5 cazuri, după numărul cifrelor celor 4 numere ce se cer.

Cazul I. $abcd = def \times g + hij$ cu $hij < def$.

Acest caz formează obiectul problemei 5716, propusă tot de d-l V. THÉBAULT și rezolvată la pag. 701, Vol. XLIX, *Gazeta Matematică*.

Cazul II. $abcd = efgh \times i + j$.

Acest caz formează obiectul problemei 1994, propusă de d-l V. THÉBAULT și rezolvată în *Revista Matematică din Timișoara*, Vol. XXIV, pag. 7.

Cazul III. $abcd = efg \times hi + j$.

Procedând prin încercări analoage cu acelea făcute, în locurile citate la cazurile precedente am găsit următoarele 49 soluții, scrise în ordinea crescândă a lui *abcd*.

$1368 = 029 \times 47 + 5$; $1576 = 032 \times 49 + 8$; $1795 = 028 \times 64 + 3$; $1847 = 369 \times 05 + 2$;
$1973 = 246 \times 08 + 5$; $2764 = 031 \times 89 + 5$; $2793 = 041 \times 68 + 5$; $2835 = 471 \times 06 + 9$;
$2845 = 036 \times 79 + 1$; $2917 = 364 \times 08 + 5$; $3178 = 529 \times 06 + 4$; $3251 = 047 \times 69 + 8$;
$3659 = 041 \times 87 + 2$; $3921 = 045 \times 87 + 6$; $3950 = 146 \times 27 + 8$; $3975 = 049 \times 81 + 6$;
$4068 = 239 \times 17 + 5$; $4126 = 589 \times 07 + 3$; $4738 = 052 \times 91 + 6$; $4852 = 693 \times 07 + 1$;
$5287 = 406 \times 13 + 9$; $5346 = 297 \times 8 + 0$; $5702 = 146 \times 39 + 8$; $5746 = 302 \times 19 + 8$;

$5796=483\times12+0$; $5827=064\times91+3$; $5930=126\times47+8$; $6214=073\times85+9$;
$6324=071\times89+5$; $6374=108\times59+2$; $6413=072\times89+5$; $6425=713\times09+8$;
$6457=208\times31+9$; $6813=074\times92+5$; $6839=402\times17+5$; $7059=168\times42+3$;
$7248=105\times69+3$; $7254=186\times39+0$; $7413=926\times08+5$; $7450=196\times38+2$;
$7465=082\times91+3$; $7632=159\times48+0$; $7641=083\times92+5$; $7845=201\times39+5$;
$8093=674\times12+5$; $8396=157\times28+0$; $9058=124\times73+6$; $9408=627\times15+3$;
$9571=208\times46+3$.

Intru cât atât *efg* cât şi *hi* sunt mai mari ca *j*, se poate considera în acest caz câte o soluţie în plus pentru fiecare soluţie căci este indiferent care din numerele *efg* şi *hi* este considerat ca împărţitor şi care cât.

Cazul IV. $abcd = efg \times h + ij$.

Pentru acest caz am găsit următoarele 135 soluţii:

$0527=146\times3+89$; $0583=126\times4+79$; $0583=129\times4+67$; $0629=183\times3+74$;
$0642=183\times9+75$; $0765=249\times3+18$; $0768=149\times5+23$; $0793=182\times4+65$;
$0817=256\times3+49$; $0835=192\times4+67$; $0849=132\times6+57$; $0917=284\times3+65$;
$0937=142\times6+85$; $0943=125\times7+68$; $0946=123\times7+85$; $0962=183\times5+47$;
$1069=258\times4+37$; $1279=405\times3+64$; $1297=308\times4+65$; $1345=208\times6+97$;
$1390=658\times2+74$; $1409=678\times2+53$; $1498=205\times7+63$; $1508=239\times6+74$;
$1546=209\times7+83$; $1570=496\times3+82$; $1576=392\times4+08$; $1624=307\times5+89$;
$1670=524\times3+98$; $1743=206\times8+95$; $1780=562\times3+94$; $1805=293\times6+47$;
$1807=349\times5+62$; $1840=253\times7+69$; $1847=369\times5+02$; $1854=609\times3+27$;
$1859=302\times6+47$; $1879=625\times3+04$; $1903=265\times7+48$; $1930=268\times7+54$;
$1973=246\times8+5$; $2047=681\times3+54$; $2049=678\times3+15$; $2074=675\times3+19$;
$2081=679\times3+54$; $2109=675\times3+84$; $2169=708\times3+45$; $2184=705\times3+69$;
$2190=357\times6+48$; $2405=389\times6+71$; $2405=398\times6+17$; $2457=816\times3+09$;
$2467=301\times8+59$; $2509=618\times4+37$; $2531=407\times6+89$; $2560=847\times3+19$;
$2581=369\times7+01$; $2590=368\times7+14$; $2590=841\times3+67$; $2710=653\times4+18$;
$2765=908\times3+41$; $2806=395\times7+41$; $2807=914\times3+65$; $2835=471\times6+09$;
$2893=406\times7+51$; $2896=413\times7+05$; $2908=713\times4+56$; $2917=364\times8+05$;
$2941=367\times8+05$; $2961=739\times4+05$; $2980=731\times4+56$; $3106=752\times4+98$;
$3124=607\times5+89$; $3128=509\times6+74$; $3178=529\times6+04$; $3250=791\times4+86$;
$3267=401\times8+59$; $3295=806\times4+71$; $3706=912\times4+58$; $3712=406\times9+58$;
$3726=405\times9+81$; $3752=416\times9+08$; $3706=912\times4+58$; $3802=415\times9+67$;
$4126=589\times7+03$; $4180=592\times7+36$; $4210=596\times7+38$; $4285=709\times6+31$;
$4291=608\times7+35$; $4312=709\times6+58$; $4608=917\times5+23$; $4701=923\times5+86$;
$4760=591\times8+32$; $4803=792\times6+51$; $4806=531\times9+27$; $4810=793\times6+52$;
$4817=963\times5+02$; $4852=693\times7+01$; $4905=813\times6+27$; $4907=812\times6+35$;
$4973=621\times8+05$; $5079=843\times6+21$; $5097=632\times8+41$; $5230=871\times6+94$;
$5390=672\times8+14$; $5403=897\times6+21$; $5437=601\times9+28$; $5471=908\times6+23$;
$5482=601\times9+73$; $5483=902\times6+71$; $5781=642\times9+03$; $5902=736\times8+14$;
$5923=846\times7+01$; $6023=741\times8+95$; $6104=759\times8+32$; $6123=754\times8+91$;
$6310=894\times7+52$; $6341=792\times8+05$; $6350=792\times8+14$; $6412=703\times9+85$;

$6423=708\times9+51$; $6425=713\times9+08$; $6802=751\times9+43$; $7263=801\times9+54$;
$7265=903\times8+41$; $7413=926\times8+05$; $7431=825\times9+06$; $7435=826\times9+01$;
$7461=932\times8+05$; $7502=936\times8+14$; $7504=832\times9+16$; $7512=834\times9+06$;
$7602=843\times9+15$; $7630=952\times8+14$; $7640=951\times8+32$.

Cazul V. $abcd = ef.gh + ij$ cu $ij < ef$.

Pentru acest caz am găsit următoarele 47 soluţii:

$0589=46\times12+37$; $0687=54\times12+39$; $0746=59\times12+38$; $0763=49\times15+28$;
$0793=48\times16+25$; $0796=58\times13+42$; $0806=49\times17+23$; $0859=64\times13+27$;
$0859=68\times12+43$; $0873=69\times12+45$; $0874=65\times13+29$; $0879=24\times36+15$;
$0892=65\times13+47$; $0895=67\times13+24$; $0865=49\times17+32$; $0967=34\times28+15$;
$0975=68\times14+23$; $0984=56\times17+32$; $0987=63\times15+42$; $1368=29\times47+05$;
$1549=23\times67+08$; $1576=32\times49+08$; $1736=32\times54+08$; $1930=67\times28+54$;
$2704=85\times31+69$; $2764=31\times89+05$; $2793=41\times68+05$; $2845=36\times79+01$;
$2854=36\times79+10$; $2905=47\times61+38$; $2935=48\times61+07$; $2970=81\times36+54$;
$3569=41\times87+02$; $3701=51\times76+28$; $3902=71\times54+68$; $3904=51\times76+28$;
$3910=58\times67+24$; $3910=82\times47+56$; $5203=84\times61+79$; $5403=69\times78+21$;
$5701=69\times82+43$; $5807=62\times93+41$; $5827=64\times91+03$; $6029=74\times81+35$;
$6813=74\times92+05$; $7465=82\times91+03$; $7641=83\times92+05$.

Acolo unde ij este mai mic şi de cât ef şi decât gh se pot considera 2 soluţii, ca în exemplele

$0967=34\times28+15$; $6029=74\times81+35$; etc.

căci împărţitorul poate fi ori 34 ori 28, sau, ori 74 ori 81.

Observaţiuni. 1°. Această problemă nu a fost încercată de nici un corespondent, de şi metoda de rezolvarea ei a fost dată în soluţia problemei 5716 la pag. 701, Vol. XLIX.

2°. D-l V. THÉBAULT, un pasionat al proprietăţilor şi curiozităţilor numerelor, a mai găsit multe proprietăţi analoage pentru numerele care se scriu întrebuinţând câte o singură dată pe fiecare din cele 10 cifre ale sistemului zecimal. Aceste proprietăţi sunt publicate în supliment la *Mathesis*, Vol. LV.

3°. Dacă nu se ţine seamă de faptul că cele 4 numere sunt rezultate dela o împărţire, deci că restul este mai mic de cât împărţitorul atunci se mai găsesc următoarele soluţii întregi ale ecuaţiei $A = B \times C + D$ în care numerele A, B, C, D se scriu întrebuinţând o singură dată pe fiecare prin cele 10 cifre.

Pentru cazul I· $357=8\times026+149$; $358=2\times097+164$; $369=5\times017+284$;
$457=8\times016+329$; $459=6\times012+387$; $465=8\times017+329$; $473=5\times069+128$;
$469=7\times012+385$; $478=3\times061+295$; $475=6\times031+289$; $481=5\times037+296$;
$481=6\times037+259$; $482=5\times069+137$; $492=8\times017+356$; $497=5\times063+182$;
$506=2\times179+348$; $523=4\times086+179$; $523=4\times089+167$; $526=8\times019+374$;
$532=4\times089+176$; $547=9\times031+268$; $567=2\times038+491$; $569=8\times012+473$;
$583=7\times041+296$; $583=7\times062+149$; $586=7\times021+439$; $587=6\times029+413$;
$589=4\times067+321$; $589=3\times107+248$; $613=4\times089+257$; $615=2\times089+437$;

$615=8\times047+239$; $619=7\times023+458$; $619=7\times053+248$; $625=8\times019+473$;
$631=4\times089+275$; $628=5\times097+143$; $635=8\times027+419$; $637=4\times012+589$;
$639=5\times071+284$; $647=5\times093+182$; $648=5\times071+293$; $651=2\times089+473$;
$658=9\times043+271$; $671=3\times029+584$; $671=8\times054+239$; $675=8\times023+491$;
$679=4\times082+351$; $682=7\times041+395$; $684=3\times159+207$; $685=2\times139+407$;
$685=4\times092+317$; $685=7\times042+391$; $690=2\times158+374$; $691=4\times027+583$;
$694=2\times157+380$, $695=3\times071+482$; $697=3\times082+451$; $697=4\times103+285$;
$704=2\times159+386$; $709=3\times148+265$; $714=2\times089+536$; $715=3\times082+469$;
$715=9\times028+463$; $718=4\times039+562$; $719=8\times012+653$; $721=4\times038+569$;
$721=4\times089+365$; $729=3\times015+684$; $735=6\times081+249$; $742=3\times019+685$;
$743=9\times062+185$; $745=9\times013+628$; $749=6\times083+251$; $751=4\times028+639$;
$751=8\times064+239$; $758=9\times014+632$; $760=3\times154+298$; $761=3\times092+485$;
$761=9\times053+284$; $761=8\times054+329$; $764=3\times158+290$; $781=4\times039+625$;
$781=4\times063+529$; $782=3\times041+609$; $784=2\times139+506$; $784=5\times031+629$;
$784=9\times061+235$; $784=9\times052+316$; $791=8\times046+523$; $791=8\times056+243$;
$793=4\times068+521$; $798=3\times156+420$; $812=5\times063+497$; $814=5\times037+629$;
$817=6\times049+523$; $817=6\times094+253$; $821=6\times047+539$; $823=4\times016+759$;
$826=5\times079+431$; $826=5\times097+341$; $826=7\times041+539$; $829=4\times053+817$;
$829=5\times031+674$; $829=6\times043+571$; $831=6\times042+579$; $832=4\times019+756$;
$835=6\times094+271$; $847=3\times052+691$; $847=3\times106+529$; $847=7\times031+692$;
$850=3\times127+469$; $851=3\times029+764$; $851=3\times074+629$; $852=9\times014+736$;
$853=4\times021+769$; $853=7\times062+419$; $859=3\times046+729$; $859=6\times073+421$;
$859=7\times061+432$; $862=3\times049+715$; $862=7\times053+491$; $862=9\times013+745$;
$864=2\times137+590$; $891=3\times042+765$; $892=3\times106+574$; $897=3\times165+402$;
$907=4\times156+283$; $907=4\times168+235$; $915=6\times072+483$; $921=3\times045+786$;
$921=6\times078+453$; $921=8\times072+365$; $925=6\times013+847$; $925=7\times041+638$;
$925=8\times061+438$; $928=4\times053+716$; $941=8\times072+365$; $945=6\times012+873$;
$945=8\times023+761$; $946=3\times025+871$; $948=3\times126+570$; $951=8\times026+743$;
$952=6\times013+874$; $953=8\times024+761$; $954=2\times137+680$; $962=3\times185+404$;
$970=3\times148+526$; $971=8\times042+635$; $971=8\times056+423$; $975=6\times024+831$;
$976=4\times031+852$; $980=3\times176+452$; $982=7\times063+541$.

Pentru cazul III avem:

$1576=04\times392+8$; $1879=03\times625+4$; $2835=06\times471+9$.

La cazul V se adaugă următoarele soluţii în care restul este mai mare decât fiecare din primii 2 factori:

$0457=16\times23+89$; $0479=18\times25+65$; $0489=12\times36+57$; $0493=17\times25+68$;
$0538=16\times29+74$; $0546=12\times39+78$; $0547=16\times29+83$; $0618=14\times39+72$;
$0649=12\times48+73$; $0682=13\times45+97$; $0742=19\times36+58$; $0783=18\times36+95$;
$0834=17\times46+52$; $0986=27\times35+41$; $1047=26\times38+59$; $1570=13\times64+98$;
$1590=36\times42+78$; $1590=32\times47+86$; $2036=34\times58+98$; $3025=48\times61+97$;
$3071=48\times62+95$; $3205=41\times76+89$; $4130=56\times72+98$; $4180=56\times73+92$.

In fine pentru cazul general din această notă avem şi soluţii de forma

$abcd=e\,.\,fg+hij$ **şi anume**

$0345=2\times89+167$; $0354=2\times89+176$; $0357=6\times18+249$; $0357=8\times26+149$;
$0358=2\times97+164$; $0359=8\times24+167$; $0364=7\times25+189$; $0365=2\times84+197$;

$0367=4\times18+295$; $0369=5\times17+284$; $0457=8\times16+329$; $0459=6\times12+387$;
$0465=8\times17+329$; $0467=9\times38+125$; $0467=3\times95+182$; $0468=7\times12+857$;
$0472=6\times19+358$; $0473=5\times69+128$; $0475=6\times31+289$; $0476=5\times39+281$;
$0478=3\times61+295$; $0481=6\times37+259$; $0481=5\times37+961$; $0482=5\times69+137$;
$0482=9\times35+167$; $0492=8\times17+350$; $0495=3\times78+261$; $0497=5\times63+182$;
$0498=2\times71+356$; $0498=7\times25+316$; $0517=6\times28+349$; $0518=3\times74+296$;
$0519=2\times86+347$; $0519=3\times84+267$; $0523=4\times89+167$; $0526=4\times97+138$;
$0526=7\times49+183$; $0526=8\times19+374$; $0537=8\times21+469$; $0537=6\times18+429$;
$0539=6\times28+471$; $0541=2\times76+389$; $0541=2\times86+379$; $0541=7\times36+289$;
$0541=7\times39+268$; $0567=8\times41+239$; $0569=8\times12+473$; $0583=7\times62+149$;
$0589=4\times67+321$; $0613=5\times79+248$; $0613=7\times45+298$; $0615=8\times47+239$;
$0615=2\times89+437$; $0618=5\times29+473$; $0619=8\times43+275$; $0619=7\times23+458$;
$0628=5\times97+143$; $0629=3\times14+587$; $0631=7\times48+295$; $0635=8\times27+419$;
$0647=5\times93+182$; $0649=7\times18+523$; $0657=2\times83+491$; $0657=8\times41+329$;
$0658=9\times43+271$; $0658=3\times79+421$; $0671=2\times93+485$; $0671=3\times29+584$;
$0671=8\times54+239$; $0673=4\times21+589$; $0675=8\times23+491$; $0682=7\times41+395$;
$0683=5\times21+479$; $0684=5\times71+329$; $0685=4\times92+317$; $0685=7\times42+391$;
$0695=3\times71+482$; $0697=3\times82+451$; $0698=4\times27+583$; $0714=2\times89+536$;
$0715=3\times82+469$; $0715=9\times28+463$; $0718=4\times39+562$; $0721=4\times38+569$;
$0728=9\times65+143$; $0729=3\times15+684$; $0735=6\times81+239$; $0736=9\times58+214$;
$0741=5\times93+286$; $0742=3\times19+685$; $0745=9\times13+628$; $0749=6\times83+251$;
$0749=8\times12+653$; $0749=6\times38+521$; $0751=3\times24+689$; $0751=4\times28+639$;
$0751=8\times64+239$; $0758=9\times14+632$; $0761=2\times84+593$; $0761=8\times54+329$;
$0761=3\times92+485$; $0761=9\times53+284$; $0763=9\times58+241$; $0781=4\times39+625$;
$0781=4\times63+529$; $0784=9\times61+235$; $0790=3\times54+628$; $0793=6\times52+481$;
$0812=5\times63+497$; $0814=5\times37+629$; $0821=6\times47+539$; $0814=6\times37+592$;
$0823=4\times16+759$; $0826=5\times79+431$; $0826=5\times97+341$; $0826=9\times31+547$;
$0826=7\times59+413$; $0829=4\times53+617$; $0829=6\times43+571$; $0829=5\times13+764$;
$0829=5\times31+674$; $0831=6\times42+579$; $0831=7\times26+649$; $0835=2\times97+641$;
$0839=7\times41+652$; $0847=2\times93+651$; $0847=3\times52+691$; $0847=5\times31+692$;
$0851=3\times74+629$; $0851=3\times29+764$; $0853=4\times21+769$; $0853=7\times62+419$;
$0859=3\times46+721$; $0859=6\times73+421$; $0859=7\times31+642$; $0859=7\times34+621$;
$0859=7\times61+432$; $0862=7\times53+491$; $0862=3\times49+715$; $0862=9\times13+745$;
$0874=9\times61+325$; $0892=7\times63+451$; $0912=8\times47+536$; $0915=6\times72+483$;
$0916=3\times58+742$; $0916=8\times53+472$; $0916=8\times43+572$; $0921=3\times45+786$;
$0921=6\times78+453$; $0921=8\times56+473$; $0924=8\times71+356$; $0925=4\times36+781$;
$0925=4\times78+613$; $0925=6\times13+847$; $0925=8\times61+437$; $0928=3\times61+745$;
$0928=7\times45+613$; $0928=4\times53+716$; $0941=3\times25+876$; $0945=2\times76+813$;
$0945=6\times12+873$; $0945=8\times23+761$; $0946=3\times25+871$; $0951=8\times26+743$;
$0953=8\times24+761$; $0953=8\times42+617$; $0957=6\times24\times813$; $0963=2\times74+815$;
$0968=4\times27+853$; $0971=8\times42+635$; $0975=6\times24+831$; $0976=4\times31+852$;
$0982=7\times63+541$; $1025=6\times98+437$; $1027=4\times83+695$; $1027=4\times98+635$;
$1037=6\times92+485$; $1037=2\times96+845$; $1037=9\times68+425$; $1039=6\times82+547$;
$1039=8\times64+527$; $1042=7\times98+356$; $1042=9\times76+358$; $1049=6\times32+857$;
$1052=8\times32+796$; $1052=3\times86+794$; $1052=9\times74+386$; $1063=2\times58+947$;
$1063=2\times94+875$; $1063=4\times59+827$; $1063=7\times24+895$; $1064=8\times39+752$;

$1064=9\times23+857$; $1069=7\times35+824$; $1072=9\times43+685$; $1074=2\times53+968$;
$1075=2\times46+983$; $1075=4\times28+963$; $1085=6\times23+943$; $1087=6\times94+523$;
$1093=8\times46+725$; $1098=3\times45+862$; $1203=5\times4.+968$; $1203=6\times54+879$;
$1205=3\times86+947$; $1205=8\times46+937$; $1205=8\times96+437$; $1206=3\times87+945$;
$1207=4\times56+983$; $1207=4\times68+935$; $1240=7\times83+659$; $1243=5\times67+908$;
$1246=8\times37+950$; $1263=9\times84+507$; $1273=8\times46+905$; $1345=9\times82+607$;
$1302=6\times54+978$; $1306=7\times54+928$; $1324=6\times79+850$; $1326=8\times47+950$;
$1340=6\times98+752$; $1340=8\times96+572$; $1345=9\times82+607$; $1352=4\times68+740$;
$1360=7\times54+982$; $1402=9\times85+637$; $1405=6\times97+823$; $1432=6\times97+850$;
$1452=6\times87+950$; $1502=8\times96+734$; $1534=7\times82+960$; $1540=8\times72+963$;
$1540=8\times76+932$,

Vom publica la note ori ce noui soluţii, ni s'ar comunica la această problemă şi la observaţiile dela sfârşit.

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 6035. *Să se studieze mişcarea unui punct material de masă* m *cunoscând momentele cantităţii sale de mişcare în raport cu trei puncte date situate în planul mişcării.*

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţia I, dată de d-l EMIL I. CONSTANTINESCU (Politehnica Bucureşti).

Fie în planul mişcării un sistem de axe xOy şi cele trei puncte fixe date:

$$A\ (x_a,\ y_a)\ ;\ B\ (x_b,\ y_b)\ ;\ C\ (x_c,\ y_c).$$

Să considerăm la *momentul t,* mobilul situat într'un punct M $(x,\ y)$ şi având *viteza* v *de componente* v_x şi v_y pe axele de coordonate.

Notăm cu $\mathfrak{M}_a$, $\mathfrak{M}_b$ şi $\mathfrak{M}_c$ *momentele cantităţii de mişcare* mv *în raport respectiv cu* A, B *şi* C avem:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_a &= mv_y\,(x-x_a) - mv_x\,(y-y_a)\\ \mathfrak{M}_b &= mv_y\,(x-x_b) - mv_x\,(y-y_b)\\ \mathfrak{M}_c &= mv_y\,(x-x_c) - mv_x\,(y-y_c)\end{aligned} \qquad (1)$$

Eliminând pe v_x şi v_y între aceste trei ecuaţii şi simplificând obţinem relaţia:

$$\begin{vmatrix} x-x_a & y-y_a & \mathfrak{M}_a\\ x-x_b & y-y_b & \mathfrak{M}_b\\ x-x_c & y-y_c & \mathfrak{M}_c \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Derivând relaţiile (1) în raport cu timpul şi ţinând seama că:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad ; \quad \frac{dv_x}{dt} = w_x \quad ; \quad \frac{dv_y}{dt} = w_y$$

(w_x, w_y componentele după axe ale vectorului acceleraţiei w) obţinem după simplificare:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}'_a &= mw_y (x - x_a) - mw_x (y - y_a) \\ \mathfrak{M}'_b &= mw_y (x - x_b) - mw_x (y - y_b) \\ \mathfrak{M}'_c &= mw_y (x - x_c) - mw_x (y - y_c) \end{aligned} \tag{3}$$

($\mathfrak{M}'_a$, $\mathfrak{M}'_b$, $\mathfrak{M}'_c$ reprezintă *derivatele în raport cu timpul* ale cantităţilor $\mathfrak{M}_a$, $\mathfrak{M}_b$, $\mathfrak{M}_c$).

Eliminând între aceste relaţii pe w_x şi w_y obţinem determinantul:

$$\begin{vmatrix} x - x_a & y - y_a & \mathfrak{M}'_a \\ x - x_b & y - y_b & \mathfrak{M}'_b \\ x - x_c & y - y_c & \mathfrak{M}'_c \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

Notând:

$$\begin{aligned} p &= \mathfrak{M}_a (y_b - y_c) + \mathfrak{M}_b (y_c - y_a) + \mathfrak{M}_c (y_a - y_b) \\ q &= -[\mathfrak{M}_a (x_b - x_c) + \mathfrak{M}_b (x_c - x_a) + \mathfrak{M}_c (x_a - x_b)] \\ r &= \mathfrak{M}_a (x_b y_c - x_c y_b) + \mathfrak{M}_b (x_c y_a - x_a y_c) + \mathfrak{M}_c (x_a y_b - x_b y_a) \end{aligned} \tag{5}$$

prin desvoltarea determinanţilor (2) şi (4) căpătăm:

$$px + qy + r = 0 \quad ; \quad p'x + q'y + r' = 0 \tag{6}$$

în care p', q', r' sunt *derivatele* lui p, q, r *în raport cu timpul.*

Prin rezolvarea sistemului de ecuaţii (6) se determină *coordonatele mobilului* M (x, y) *în funcţie de timp:*

$$x = \frac{qr' - q'r}{pq' - p'q} = \varphi(t) \quad ; \quad y = \frac{p'r - pr'}{pq' - p'q} = \psi(t) \tag{7}$$

Ecuaţia *traectoriei* se poate obţine eliminând timpul între relaţiile (7); *viteza* v şi *acceleraţia* w se obţin calculând componentele lor:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad ; \quad w_x = \frac{d^2x}{dt^2} \quad ; \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{8}$$

Soluția II. Având în vedere soluția problemei 5689 publicată în G. M. Vol. XLVIII pag. 281, *mărimea* cantității de mișcare *mv* este dată de relația:

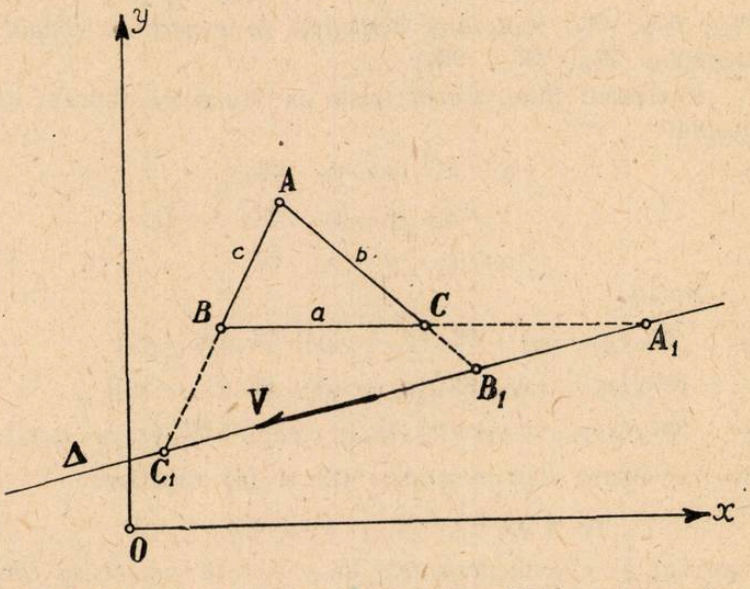
$$mv = \frac{k}{2S} \tag{9}$$

în care:

$$k = \sqrt{a^2(\mathfrak{M}_b - \mathfrak{M}_a)(\mathfrak{M}_c - \mathfrak{M}_a) + b^2(\mathfrak{M}_a - \mathfrak{M}_b)(\mathfrak{M}_c - \mathfrak{M}_b) + c^2(\mathfrak{M}_a - \mathfrak{M}_c)(\mathfrak{M}_b - \mathfrak{M}_c)}$$

$$a = \overline{BC} \quad , \quad b = \overline{CA} \quad , \quad c = \overline{AB}$$

iar S suprafața triunghiului ABC.



După cum s'a arătat în problema 5689 menționată, *suportul* Δ al *vectorului mv* taie laturile triunghiului în punctele

$$A_1(x_1, y_1) \quad ; \quad B_1(x_2, y_2) \quad ; \quad C_1(x_3, y_3)$$

astfel încât:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{\mathfrak{M}_b}{\mathfrak{M}_c} \quad ; \quad \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{\mathfrak{M}_c}{\mathfrak{M}_a} \quad , \quad \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{\mathfrak{M}_a}{\mathfrak{M}_b} \tag{10}$$

punctele A_1; B_1; C_1 fiind respectiv *exterioare* sau *interioare* după cum rapoartele $\frac{\mathfrak{M}_b}{\mathfrak{M}_c}$; $\frac{\mathfrak{M}_c}{\mathfrak{M}_a}$; $\frac{\mathfrak{M}_a}{\mathfrak{M}_b}$ sunt *pozitive* sau *negative.*

Coordonatele punctelor A_1, B_1, C_1 sunt respectiv:

$$A_1\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_b\,\mathfrak{M}_c - x_c\,\mathfrak{M}_b}{\mathfrak{M}_c - \mathfrak{M}_b} \\ y_1 = \dfrac{y_b\,\mathfrak{M}_c - y_c\,\mathfrak{M}_b}{\mathfrak{M}_c - \mathfrak{M}_b} \end{cases} ; \quad B_1\begin{cases} x_2 = \dfrac{x_c\,\mathfrak{M}_a - x_a\,\mathfrak{M}_c}{\mathfrak{M}_a - \mathfrak{M}_c} \\ y_2 = \dfrac{y_c\,\mathfrak{M}_a - y_a\,\mathfrak{M}_c}{\mathfrak{M}_a - \mathfrak{M}_c} \end{cases}$$

$$C_1\begin{cases} x_3 = \dfrac{x_a\,\mathfrak{M}_b - x_b\,\mathfrak{M}_a}{\mathfrak{M}_b - \mathfrak{M}_a} \\ y_3 = \dfrac{y_a\,\mathfrak{M}_b - y_b\,\mathfrak{M}_a}{\mathfrak{M}_b - \mathfrak{M}_a} \end{cases} \tag{11}$$

Ecuația suportului vectorului *mv* este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Inlocuind în (12), valorile x_1; y_1; x_2; y_2 prin egalele lor din (11), dezvoltând determinantul și ținând seama de notațiile (5) obținem:

$$px + qy + r = 0. \tag{13}$$

Familia de drepte (13) *înfășoară traectoria.* Obținerea curbei care reprezintă traectoria se va face prin *eliminarea parametrului variabil, timpul, între ecuația (13) și derivata ei în raport cu timpul:*

$$p'x + q'y + r' = 0 \tag{14}$$

Regăsim astfel sistemul de ecuații (6) prin a căror rezolvare se determină toate elementele caracteristice mișcării: *poziția* mobilului, *viteza* și *accelerația* sa la un moment oarecare (formulele 7 și 8).

Observația I. Intrucât $\mathfrak{M}_a$, $\mathfrak{M}_b$, $\mathfrak{M}_c$ reprezintă *momentele cantității de mișcare mv* în raport cu punctele A, B, C rezultă că *derivatele lor în raport cu timpul* $\mathfrak{M}'_a$, $\mathfrak{M}'_b$, $\mathfrak{M}'_c$ vor reprezenta *momentele forței* F = *mw*, care produce mișcarea mobilului, în raport cu aceleași puncte. Această proprietate este exprimată analitic prin relațiile (3), iar ecuația (14) reprezintă *suportul comun* al forței F și al accelerației *w*.

Mărimea forței F ne este dată prin urmare, în conformitate cu soluția problemei 5689 menționată mai sus, de formula:

$$F = \frac{k_1}{2S} \tag{15}$$

$$k_1 = \sqrt{a^2(\mathfrak{M}'_b - \mathfrak{M}'_a)(\mathfrak{M}'_c - \mathfrak{M}'_a) + b^2(\mathfrak{M}'_a - \mathfrak{M}'_b)(\mathfrak{M}'_c - \mathfrak{M}'_b) + c^2(\mathfrak{M}'_a - \mathfrak{M}'_c)(\mathfrak{M}'_b - \mathfrak{M}'_c)}$$

iar accelerația w are *mărimea:*

$$w = \frac{F}{m} = \frac{k_1}{2mS}. \tag{16}$$

Observația II. Cazuri particulare importante ale mișcării.

a) $\mathfrak{M}_a = C_1$; $\mathfrak{M}_b = C_2$; $\mathfrak{M}_c = C_3$, (C_1, C_2, C_3 *constante*)

Rezultă $\mathfrak{M}'_a = \mathfrak{M}'_b = \mathfrak{M}'_c = 0$ și din formulele (15) și (16): $F = 0$, $w = 0$. Mișcarea este *rectilinie uniformă* cu *viteza constantă* dată de formula (9), traectoria fiind *dreapta* (13) în care p, q, r sunt *constanți*.

Pentru $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $v = 0$ suntem în cazul *echilibrului.*

b) $\frac{\mathfrak{M}_a}{\mathfrak{M}_b} = C_1$; $\frac{\mathfrak{M}_b}{\mathfrak{M}_c} = C_2$; $\frac{\mathfrak{M}_a}{\mathfrak{M}_c} = C_1 \cdot C_2$; ($C_1$, C_2 *constante).*

Mișcarea este *rectilinie*, traectoria fiind dreapta dată de ecuația (13); viteza, accelerația și forța sunt *variabile.*

c) $\mathfrak{M}_a = C_1 =$ constant, $\mathfrak{M}_b$ și $\mathfrak{M}_c$ variabile cu timpul.

Rezultă $\mathfrak{M}'_a = 0$ și deci forța F *trece* în tot timpul mișcării *prin punctul* A. Suntem în cazul mișcării datorită unei *forțe centrale.*

Studiul problemei poate fi continuat pentru a se determina componentele accelerației în coordonate intrinseci după direcția normalei și tangentei la traectorie, rază de curbură etc.

Lăsăm acest studiu în seama corespondenților *Gazetei Matematice.*

S'a primit o soluție bună, diferită de precedentă, dela d-l E. N. WEGENER.

AL. ST.

PROBLEMA 6088. *Să se arate că*

$$\sum_{i=1}^{i=n} \operatorname{tg} 2^{i-1}x + \sum_{i=1}^{i=n} \operatorname{cotg} 2^i x = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\sin 2^i x} = \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} 2^n x.$$

M. R. CONSTANTINESCU.

Soluție dată de d-nii: I. KINSKY (Student Politehnica, Timișoara); P. P. TEODORESCU (Lic. „Matei Basarab", București); E. WEGENER, A. I. VARGĂ, M. COTARIU, M. D. PETCULESCU (Studenți Politehnica, București); Cpt. M. GRUMĂZESCU; M. G. IOSIFESCU (Lic. „Sf. Petru și Pavel", Ploești); M. A. BARBAIANI,

C. C. DIACONU (Lic. „A. Vlaicu", Bucureşti); C. CORDUNEANU, I. T. MUNTEANU, MARINEL MARINESCU, C. ROŞU (Col. „N. Filipescu", Predeal); V. STĂNCESCU, M. MIHĂLCIOIU, M. M. VASILIU (Lic. Armatei, Craiova); R. SP. HARET (Lycée Français, Bucureşti); AL. MINCULESCU, MIRCEA VLAD, R. M. ZAHARIA (Lic. militar, Iaşi); G. G. VRÂNCEANU (Lic. militar, Timişoara); C. C. ŢINCU (Lic. „C. Diaconovici Loga", Timişoara); VALERIU PANDELE A. PETCU (Lic. „Mihai Viteazul", Bucureşti); GH. D. BRAŞOVEANU (Craiova); GEORGE ENESCU (Elev particular, Bucureşti); D. I. CRĂCEA, LONGIN N. ANDRONESCU, VIRGIL G. CONSTANTINESCU (Lic. „A. Greceanu", Slatina), I. N. MĂNCESCU.

Folosim identitatea

$$\operatorname{tg} ix + \operatorname{cotg} 2ix = \frac{1}{\sin 2ix}$$

uşor de demonstrat. Dând lui i valori dela 1 la n şi adunând se găsesc primii 2 termeni ai identităţii din enunţ.

La fel, plecând dela identitatea

$$\operatorname{cotg} ix - \operatorname{cotg} 2ix = \frac{1}{\sin 2ix}$$

dând lui i valorile $1, 2 \ldots n$ şi adunând se găsesc ultimii 2 termeni ai identităţii de demonstrat.

Au rezolvat foarte bine problema şi pe alte căi d-nii: P. D. COLUMBEANU, ILIE N. CONSTANTINESCU, I. E. HARGHEL, M. G. IOSIFESCU, MIRCEA D. POPA, VASILE MARCEL C. POPA, Z. SEGAL, LONGIN N. ANDRONESCU.

PROBLEMA 6331. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii*

$$x+y+z+u=11\,;\quad x+y+zu=10\,;\quad x+yzu=17\,;\quad xyzu=30.$$

ANTON I. VARGĂ.

Inmulţind cu x ecuaţia a treia şi din rezultat scăzând pe a patra se obţine

$$x^2-17x+30=0 \quad \therefore \quad x_1=2 \quad \text{şi} \quad x_2=15$$

Inlocuind pe rând în primele 3 ecuaţii se obţin sistemele:

I. $y+z+u=9 \quad ; \quad y+zu=8 \quad ; \quad yzu=15; \quad x_1=2$

II. $y+z+u=-4; \quad y+zu=-5; \quad yzu=2; \quad x_2=15$

Procedând la fel cu aceste sisteme găsim că sistemul I dă

$$y^2 - 8y + 15 = 0 \quad \therefore \quad y_1 = 5 \text{ şi } y_2 = 3$$

iar sistemul II dă

$$y^2 + 5y + 2 = 0 \quad \therefore \quad y_3 = \frac{-5+\sqrt{17}}{2} \text{ şi } y_4 = \frac{-5-\sqrt{17}}{2}.$$

Inlocuind pe x şi y în I şi II prin valorile lor găsim următoarele 4 sisteme pentru determinarea lui u şi z:

$$u + z = 4;\ uz = 3 \text{ cu } x_1 = 2,\ y_1 = 5 \qquad (1)$$

$$u + z = 6;\ uz = 5 \text{ cu } x_1 = 2,\ y_2 = 3 \qquad (2)$$

$$u+z = -\frac{3+\sqrt{17}}{2};\ uz = -\frac{5+\sqrt{17}}{2} \text{ cu } x_2 = 15,\ y_3 = \frac{-5+\sqrt{17}}{2} \qquad (3)$$

$$u+z = \frac{-3+\sqrt{17}}{2};\ uz = \frac{-5+\sqrt{17}}{2} \text{ cu } x_2 = 15,\ y_4 = \frac{-5-\sqrt{17}}{2} \qquad (4)$$

Rezolvind aceste ultime 4 sisteme obţinem următorul tabel al soluţiilor sistemului din enunţ.

x	y	u	z
2	5, 5, 3, 3,	1, 3, 1, 5	1, 3, 5, 1
15	$\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$	$\frac{-3-\sqrt{17}+\sqrt{66+14\sqrt{17}}}{4}$	$\frac{-3-\sqrt{17}-\sqrt{66+14\sqrt{17}}}{4}$
15	$\frac{-5+\sqrt{17}}{2}$	$\frac{-3-\sqrt{17}-\sqrt{66+14\sqrt{17}}}{4}$	$\frac{-3-\sqrt{17}+\sqrt{66+14\sqrt{17}}}{4}$
15	$\frac{-5-\sqrt{17}}{2}$	$\frac{-3+\sqrt{17}+\sqrt{66-14\sqrt{17}}}{4}$	$\frac{-3+\sqrt{17}-\sqrt{66-14\sqrt{17}}}{4}$
15	$\frac{-5-\sqrt{17}}{2}$	$\frac{-3+\sqrt{17}-\sqrt{66-14\sqrt{17}}}{4}$	$\frac{-3+\sqrt{17}+\sqrt{66-14\sqrt{17}}}{4}$

Din cauza simetriei se pot permuta literele x, y, u, z între ele, aceasta nu înseamnă însă că avem şi alte sisteme de soluţii.

Soluţie dată de MARIANA F. NEDELCU (Lic. „Aurel Vlaicu", Bucureşti); VIRGIL G. CONSTANTINESCU şi PAUL N. CIUCESCU (Lic. „R. Greceanu", Slatina); M. R. CONSTANTINESCU, LUCILIU

M. C. ATHANASIU, (Studenţi Politehnica Bucureşti); EM. I. VĂRZARU (Lic. armatei, Craiova); P. P. TEODORESCU, GH. GH. RISTEA (Lic. Matei Basarab, Bucureşti); VASILE C. BĂRBULESCU (Cotmeana, Argeş); DAN E. VASILIU, E. A. DODIC, MIHAI-VLAD I. DĂSCĂLESCU (Lic. „Mihai Viteazul", Bucureşti); DAMIAN V. CORNEA (Lic. „N. Filipescu", Predeal); GH. I. COSMA (Lic. R. Sărat); I. M. PUŢUREANU (Student, Bucureşti); I. T. MUNTEANU, VAL. A. PETCU, I. FILIMON (Student, Cluj), LONGIN N. ANDRONESCU.

Notă. 1°. Soluţia precedentă este redijată după soluţia primită de la d-şoara MARIANA FL. NEDELCU şi de la d-l VIRGIL GH. CONSTANTINESCU.

2°. D-nii M. R. CONSTANTINESCU, L. ATHANASIU au rezolvat şi sistemul mai general

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_n$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}\, x_n = a_{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 + x_2\, x_3 \ldots x_n = a_2$$
$$x_1\, x_2 \ldots x_n = a_1.$$

3°. Au rezolvat problema fără însă a da rezultate numerice complete sau exacte, d-nii: P. D. COLUMBEANU, AL. GH. MORAITE, M. V. SOARE (Studenţi, Politehnica Bucureşti); VALERIU CONSTANTINESCU, V. BAGHINĂ, SOFRONIE I. ŞTEFĂNESCU (Lic. armatei, Craiova); I. T. BIRĂNAŞ, SILVIU M. PUŞCAŞU (Student, Politehnica Timişoara); D. N. FÂNARU (Grigoreni, Bacău); AUREL D. MOROIANU (Lic. armatei, Timişoara); I. CRĂCEA (Lic. „Radu Greceanu", Slatina); I. P. GHERASIM (Lic. „N. Gane", Fălticeni); N. AL. BUCUR (Lic. T. Maiorescu", Bucureşti); RADU C. CURSARU (Lic. R.-Sărat); GH. COCEŞ (Lic. Mihai Viteazul, Timişoara); G. ENESCU (Politehnica Bucureşti); CLAUDIU C. IONESCU-BUJOR (Clasa IV, Lic. „Mihai Viteazul", Bucureşti); I. I. NOVAC (Politehnica, Timişoara).

EXERCIŢII

20. *Să se găsească patratele perfecte de 5 cifre ştiind că numărul format de primele 4 cifre dela stânga este număr prim.*

C. BERDAN.

R. Fie *abcde* patratul cerut. Cifra *d* nu poate fi decât una din cifrele 1, 3, 7 sau 9 căci altfel *abcd* nu este prim. Dând pe rând lui *d* aceste valori se găsesc următoarele 15 soluţii:

$106^2 = 11236$; $146^2 = 21316$; $154^2 = 23716$; $164^2 = 26896$;
$206^2 = 42436$; $226^2 = 51076$; $236^2 = 55696$; $244^2 = 59536$;
$254^2 = 64516$; $256^2 = 65536$; $274^2 = 75076$; $286^2 = 81796$;
$296^2 = 87616$; $304^2 = 92416$; $314^2 = 98596$.

Consideraţia ultimelor 2 cifre terminale ale patratelor perfecte stabileşte cu uşurinţă că d are numai valoarea 6, deci rădăcina se termină în 4 sau 6, ceeace uşurează găsirea soluţiilor.

21. *Să se determine curba* (M), *descrisă de un punct* M *ştiind că triunghiul* OMT, *având vârful* O *fix iar vârful* T *la intersecţia tangentei în* M *la* (M) *cu o dreaptă fixă trecând prin* O, *este isoscel.*

CEZAR BOERESCU.

R. Vom stabili ecuaţiile diferenţiale ale curbelor (M) pentru cele 3 cazuri posibile:

$$1^0.\ OM = MT\ ;\quad 2^0.\ OM = OT\ ;\quad 3^0.\ OT = MT.$$

Se ia OT ca axă de x. Fie M (x, y) şi

$$Y - y = y'(X - x) \tag{1}$$

tangenta în M la (M). Din (1) se deduce $T\left[\frac{xy' - y}{y'}, 0\right]$.

1°. Avem

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2\ ;\quad \overline{MT}^2 = \left(x - \frac{xy' - y}{y'}\right)^2 + y^2 = \frac{y^2 + y'^2\, y^2}{y'^2}$$

$$\therefore \qquad xy' = \pm y \tag{2}$$

$$2^0. \qquad x^2 + y^2 = \left(\frac{xy' - y}{y'}\right)^2 \quad \therefore \quad y'^2\, y = y - 2xy' \tag{3}$$

$$3^0. \qquad \left(\frac{xy' - y}{y'}\right)^2 = \frac{y^2 + y'^2\, y^2}{y'^2} \quad \therefore \quad x^2\, y' - 2xy = y'\, y^2 \tag{4}$$

Ecuaţiile diferenţiale (2), (3) şi (4) dau soluţiile problemei.

22. *Să se descompună în factori expresia*

$$E = 2a\,(b-c)\,(p-b)\,(p-c)^2 + (a-b)\,(a+c)\,(p-c)^2 - (a+b)\,(a-c)\,(p-b)^2$$

ştiind că $a + b + c = 2p$.

GH. A. GRIGORE

R. Se găseşte

$$E = a\,(b-c)\,(a^2 - b^2 - c^2 + bc).$$

23. *Să se găsească valorile lui* x, y *şi* z care verifică ecuaţia

$$2yz + 3xz + 4xy + 2(3z + 4y + 6x) + xyz + 24 = 0,$$

LT.-COL. E. ST. IACOB.

R. Ecuaţia se pune sub forma

$$(x+2)(y+3)(z+4) = 0 \quad \therefore \quad x = -2\ ;\quad y = -3\ ;\quad z = -4.$$

PROBLEME PROPUSE

6451. Fracția $1/n$, scrisă în sistemul de numerație B după regulile din sistemul zecimal, are pe 1 ca primă cifră după virgulă și pe 2 ca a doua cifră. Să se determine B cunoscând $n > 4$.

VICTOR ȘERBĂNESCU.

6452. Să se găsească numărul grupurilor (a_1, a_2, a_3) de numere întregi, $a_i \leqq 100$, astfel ca a_1, a_2, a_3 să fie prime două câte două.

N. GEORGESCU ROEGEN.

6453. Distanța dintre punctele lui BROCARD ale unui triunghiu este cel mult egală cu raza cercului lui EULER al triunghiului.

G-L GH. BUICLIU.

6454. P fiind un punct din planul triunghiului $A_1A_2A_3$, se consideră triunghiurile (T) circumscris triunghiului $A_1A_2A_3$ și astfel ca fiecare din vârfurile acestor triunghiuri să fie situat pe câte unul din cercurile PA_2A_3, PA_3A_1, PA_1A_2. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor (T) sunt ortogonale unui cerc fix ce trece prin P și că locul geometric al centrelor acestor cercuri este deasemenea un cerc.

In particular, dacă P coincide cu ortocentrul triunghiului $A_1A_2A_3$, cercurile circumscrise triunghiurilor (T) au același centru, punctul P.

ȘERBAN GHEORGHIU.

6455. Să se arate că dacă

$$\sin a_1 + \sin a_2 + \ldots + \sin a_n = 0$$

$$\cos a_1 + \cos a_2 + \ldots + \cos a_n = 0$$

atunci

$$\Sigma \sin 4a_1 = (\Sigma \sin 2a_1)(\Sigma \cos 2a_1) - 4 \Sigma \sin (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$\Sigma \sin 5a_1 = 5 \Sigma \sin (2a_1 + 3a_2) + 30 \Sigma \sin (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5).$$

MIRCEA ADAM.

6456. Fie D o dreaptă variabilă în planul triunghiului ABC dus prin reciprocul celui de al doilea punct al lui BROCARD; ea taie laturile BC, CA, AB, respectiv în M, N, P; fie D' dreapta lui LONGCHAMPS care determină intersecțiile M', N', P' cu aceleași laturi. Considerăm intersecțiile U = (PN', BC), V = (MP', AC). Să se arate că UV înfășoară elipsa lui STEINER înscrisă.

N. N. MIHĂILEANU.

6457. 1°. Se cere locul punctelor din plan ale căror proiecții ortogonale pe cinci drepte din plan se află pe aceeași parabolă. 2°. Să se afle locul focarului parabolei și înfășurătoarea axei. 3°. Ce se întâmplă când patru din drepte aparțin aceluiași fascicol?

MIHAIL I. FOCȘENEANU.

6458. Să se construiască curba:

$$x = a\frac{t^4 - t^2 + 1}{(t^2+1)^2}, \quad y = \frac{2at^2}{(t^2+1)^3}.$$

INGINER ALEX. ȘCODRANU.

6459. Să se calculeze integralele:

(A) $$\int \frac{dx}{(x^2 - 2x\cos\alpha + 1)\sqrt{x^2 - 2x\cos\beta + 1}}$$

(B) $$\int \frac{xdx}{(x^2 + 2x\cos\alpha + 1)\sqrt{x^2 + 2x\cos\beta + 1}}.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6460. Lichidul de densitate d, dintr'un cilindru de raza r, susține, la înălțimea h, un piston etanș de greutate p. Să se studieze mișcarea pistonului atunci când cilindrului i se imprimă o mișcare circulară de viteză unghiulară ω, în jurul axei sale.

I. GH. ZAMFIRESCU.

ERATĂ. La pag. 266 din numărul precedent rândul 8 de jos se înlocuește prin: *Oralul începe Vineri 7 Mai ora 8³⁰.*

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Andronescu N. Longin-Romulus (4613, 5129, 6233, 40, 6, 411); *Athanasiu C. Mihail-Luciliu* (6346, P); *Bal André* (6411, N); *Cernescu A. N.* (4520, 6271, 324, 7, 31, 3, 86); *Cernescu A. P.* (4786, 5129, 6386, 94, 5, 6, 412); *Constantinescu G. Virgil* (6132, 357, 72, 5, 426, 38, P, E); *Cosma I. Gh.* (6290, 350, 60, 86, E); *Cotariu D. M.* (6395, 8, 406, 7, 11, 2, 6, 20, 2, 4, 6, E); *Crăcea I. D.* (5134); *Crăciunescu E.* (P); *Dodu A. E.* (6378, 94, 411, 5, 6, 22, 4, 9, 38, E); *Ionescu-Bujor C. Claudiu* (6354); *Măncescu N. I.* (6088); *Marinescu E. Em.* (P); *Moga O. Georgeta* (6424); *Moraite Gh. Al.* (6319, P); *Munteanu T. I.* (6385); *Neguţ A. I.* (6416, 38, 45); *Păunescu St. Gh.* (6445); *Pisanca N. I.* (6233, P, E); *Râmboiu N. Septimiu* (5129, 6036, 8, 436, 41, 6); *Soare V. M.* (6386, 45, A); *Ştefănescu I. Sofronie* (6394, 5, 6, 9, 424, E); *Şuta M.* (6424); *Teodorescu P. P.* (6263, 4, 81, 8, 314, 62, 82, P, E); *Tibăr I. A.* (2655, 4513, 5009); *Vargă I. A.* (1753, 929, 2217, 64, 3632, 89, 4393, 791, 5059, 69, 72, 6443, 5, 6, 50); *Vasiliu M. M.* (6394, 6, 9, 416, 24).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *« Gazeta Matematică »*.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate, cu preţul de 800 lei volumul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—III, V—X, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică*. Ediţia a III-a. Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 300

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte*. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de probleme de Aritmetică*. Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 500

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie*. Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu*. Lei 150

XX. **I. I. Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă*. Partea I-a . . . . . Lei 180

XXI. **M. Ghermănescu**, *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.*. . Lei 500

XXII. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor*. . Lei 250

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte*. Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 100

XXIV. **A. G. Ioachimescu**, *Mecanica raţională*, Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.500

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid**. (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Mariah** . . . . . Lei 320

II. *Elementele lui* **Euclid**. (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 400

III. *Elementele lui* **Euclid**. (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul*. (Ediţia II-a) . . . . . Lei 100

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 250

PENTRU BIBLIOTECI ŞI AUTORITĂŢI TOATE PREŢURILE SE TRIPLEAZĂ

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Abonamentele care se fac după 24 Februarie 1948 costă . . . . . Lei 800

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1947 la 1 Iunie 1948 inclusiv. Costul abonamentului care se face după 24 Februarie 1948 este de . . . . . Lei 360

Abonamentele se pot plăti la cont CEC Nr. 26220 sau se pot trimite unde se trimite şi corespondenţa, pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 10.450.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIII

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1948

SUMARUL

1. Despre poligoanele armonice. . . . *V. Thébault.*
2. O problemă de actualitate . . . . . *R. Bădescu.*
3. Raportul comisiunei pentru premiul „Ing. Al. Roşu" . . . . . *A. D. Bunescu, Al. A. Roşu, D. Stan.*
4. Raport pentru premiul „Gh. Em. Filipescu" . . . . . *I. S. Antoniu, N. Petrulian, D. Stan, C. C. Teodorescu.*
5. Note matematice: 21—24.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2249, 4513, 4765, 5598, 6249, 6309, 6359.
11. Exerciţii: 24.
12. Probleme propuse: 6461—6470.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAŢIONALA

1948

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti, (Casa „*Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie compusă în prezent din d-nii: **N. Georgescu-Roegen**, Licenţiat în Matematici; **C. C. Teodorescu**, Inginer, Profesor la Politehnica Bucureşti; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier).

Şedinţele următoare ale Soc. „*Gazeta Matematică*":

Marţi 27 Aprilie ora 18: Adunarea materiei pentru Nr. 9, chestiuni în legătură cu concursul *Gazeta Matematică* şi decernarea premiului „AL. ROŞU".

Marţi 11 Mai ora 18: Rezultatul concursului *Gazeta Matematică* şi facerea copertei pentru Nr. 9.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1947 sunt indicate în tabla de materii a volumului LII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **63**91, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **4**00, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 50, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 60.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La «*Gazeta Matematică*» se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . . „ 150
— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a «*Gazetei Matematice*» . . . . . „ 500

DESPRE POLIGOANELE ARMONICE

Definiţii. Se numeşte *poligon armonic* un poligon inscriptibil într'un cerc O în planul căruia se găseşte un punct K ale cărui distanţe la laturile poligonului sunt proporţionale cu aceste laturi.

Punctul K se numeşte centrul simedianelor sau punctul lui LEMOINE al poligonului. Dreptele care unesc pe K cu vârfurile poligonului sunt simedianele acestuia.

Două figuri care au aceleaşi simediane se zic cosimediane.

Cercul de diametru OK este cercul lui BROCARD al poligonului.

In fine dacă $a, b, c, d, \ldots$ sunt laturile consecutive ale poligonului şi $x, y, z, t, \ldots$ distanţele lui K la aceste laturi, unghiul w definit de una din relaţiile

$$2x = a\,\mathrm{tg}w \quad , \quad 2y = b\,\mathrm{tg}w, \ldots$$

se numeşte unghiul lui BROCARD al poligonului armonic.

Teorema 1. *Inversele vârfurilor unui poligon regulat, faţă de un punct oarecare, sunt vârfurile unui poligon armonic de acelaşi număr de laturi.*

Fie A, B, C, ... vârfurile poligonului regulat dat şi A', B', C'.. diametralele opuse acestora în cercul O, circumscris poligonului. Să transformăm figura prin inversiune faţă de un punct arbitrar ca pol de inversiune. Cercul O se transformă într'un cerc X, iar diametrele sale AA', BB', CC',... se transformă într'un sistem coaxial [1] Y, Y_1, Y_2... şi axele radicale ale grupelor de cercuri (X, Y), (X, Y_1), (X, Y_2)... concură în acelaşi punct. Deci, dacă $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha', \beta', \gamma', \ldots$, sunt inversele sistemelor de puncte A, B, C,..., A', B', C',... atunci dreptele $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$... concură într'un punct K. Cum punctele A, B, C, B' formează evident un sistem armonic, inversele lor α, β, γ, β' vor forma de asemeni un sistem armonic. Dar dreapta $\beta\beta'$ trece prin K, deci distanţele lui K la dreptele $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ sunt proporţionale cu aceste segmente, ceea ce demonstrează teorema.

Corolare la teorema I. 1°. *Dacă 1, 2, 3,... n şi* K *sunt vârfurile şi centrul simedian al unui poligon armonic, atunci poligonul stelat cu laturile* (13), (24), (35),... *este de asemeni armonic şi are centrul simedianelor în* K.

1) Adică cercuri care au două câte două acelaşi ax radical, sau formând un *fascicol*. Axul radical comun trece prin polul de inversiune şi prin inversul lui O.

Fie p, p' distanţele lui K la AB, AC unde A, B, C sunt 3 vârfuri consecutive. Este uşor de văzut că raportul

$$\frac{p}{AB} : \frac{p'}{AC}$$

este egal cu raportul anarmonic (ABCA'), unde A' este intersecţia lui AK cu cercul O. Dar într'un poligon regulat raportul anarmonic (ABCA') este constant. Cum şi $\frac{p}{BA}$ este constant, rezultă că $\frac{p'}{AC}$ este de asemeni constant.

Corolar. 2°. *Ca la 1°, poligonul format de corzile* (14), (25), (36) *este un poligon armonic având centrul simedian în* K.

Corolar. 3°. *Vârfurile unui triunghiu oarecare pot fi considerate ca inversele vârfurilor unui triunghiu echilateral.*

Corolar. 4°. *Într'un patrulater armonic produsul a două laturi opuse este egal cu produsul celorlalte două laturi.*

Corolar. 5°. *Dacă 1, 2, 3,..., 2n sunt vârfurile unui poligon armonic de un număr pereche de laturi, poligoanele cu vârfurile în 1, 3, 5,..., 2n—1 şi în 2, 4,..., 2n sunt de asemenea armonice. Aceste trei poligoane au acelaşi centru simedian.*

Problemă. *Să se transforme un poligon armonic într'un poligon regulat.*

Fie AB o latură a poligonului armonic ABC..., O centrul său circumscris şi K centrul simedian. Fie S şi S' punctele limită ale cercului O şi al cercului O' al lui BOCARD al poligonului. Dacă A', B' sunt punctele în care SA, SB taie cercul O atunci A'B' *este latura poligonului regulat căutat.*

In adevăr, fie P intersecţia AB, A'B' şi C, C' intersecţiile lor cu OK. Polara lui S trece prin P şi S'; fascicolul P (SCS'C') este armonic, de unde avem succesiv

$$\frac{2}{SS'} = \frac{1}{SC} + \frac{1}{SC'} = \frac{1}{SK} + \frac{1}{SO}$$

$$\frac{SK-SC}{SK.SC} = \frac{SC'-SO}{SC'.SO}, \quad \frac{KC}{SC} : \frac{OC'}{SC'} = \frac{SK}{SO}$$

$$\frac{(K, AB)^{1)}}{(S, AB)} : \frac{(O, A'B')}{(S, A'B')} = \frac{SK}{SO}.$$

1) Notăm cu (K, AB) distanţa dela K la AB.

Cum AB este o latură a unui poligon armonic cu centrul simedian în K, raportul (K, AB):AB este constant şi pentrucă S, K, O sunt date, raportul SK:SO este de asemeni dat; deci raportul (O, A'B'):A'B' este constant şi prin urmare A'B' este constantă, ceea ce demonstrează problema.

Corolar. 6°. *Dreptele* S'A, S'B *întâlnesc cercul* (O, R) *a doua oară în* A", B", *simetricele lui* A', B' *în raport cu diametrul* DD' *al acestui cerc.*

Corolar. 7°. *Centrele de inversiune* S, S' *ale unui poligon armonic sunt conjugate armonic în raport cu centrul cercului circumscris şi cu centrul simedian.*

Teorema II. *Dacă* δ *este distanţa centrului simedian* K *la centrul* O *al cercului circumscris* (O, R), *atunci*

$$\operatorname{tg} w = \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{R^2}} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}.$$

Avem

$$(K, AB) = 2\,AB \operatorname{tg} w$$

şi cum poligonul de latură A'B' este regulat şi are n laturi

$$(O, A'B') = 2\,A'B' \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}, \quad \frac{\operatorname{tg} w}{\operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}} = \frac{SK}{SO},$$

iar pe de altă parte pentrucă O şi K sunt conjugate armonic în raport cu S, S', care la rândul lor sunt invers în raport cu (O, R), este lesne de văzut că

$$\frac{SK}{SO} = \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{R^2}} \quad \therefore \quad \operatorname{tg} w = \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{R^2}} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}.$$

Corolare la teorema II. 1°. $\delta^2 = R^2 \left(1 - \operatorname{tg}^2 w \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{n}\right)$.

1°. *Dacă două poligoane armonice de* m *şi de* n *laturi au acelaşi cerc circumscris şi acelaşi centru al simedianelor, tangentele unghiurilor lor* BROCARD *sunt între ele în raportul* $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{m} : \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}$.

2°. Fiind dat un cerc (O, R), latura A'B' a unui poligon regulat înscris de *n* laturi poate ocupa o infinitate de poziţii; rezultă că *într'un cerc se pot înscrie o infinitate de poligoane armonice având acelaşi centru simedian.*

3°. *Raportul armonic a patru vârfuri consecutive oarecare a unui poligon armonic este constant.*

Teorema III. *Dacă* $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ *sunt vârfurile consecutive ale unui poligon armonic de* n *laturi, atunci* A_1A_{n-1}, $A_2A_{n-2}, \ldots$ *sunt concurente.*

Dreapta A_0K taie cercul circumscris în A_0'. Punctele A_0, A_0' sunt conjugate armonic în raport cu punctele A_1, A_{n-1}. Deci A_1A_{n-1} trece prin polul α al dreptei A_0A_0'. La fel A_2A_{n-2} trece prin α, etc.

Corolar. *Perechile* A_1A_{n-1}, $A_2A_{n-2}, \ldots$ *aparţin unei involuţii cu punctele duble în* A_0, A_0'. *Vârfurile unui poligon armonic formează un număr de sisteme în involuţie egal cu numărul simedianelor.*

(Va urma) V. THÉBAULT.

O PROBLEMĂ DE ACTUALITATE

Orice stare de război impune ţărilor beligerante o raţionare a consumului intern, chiar pentru ţările producătoare cum este cazul României în domeniul agricol. Acelaşi lucru se întâmplă şi în perioadele de după război sau, pentru produsele agricole, după un lung interval de secetă, etc. Astfel, am asistat în ţara noastră la suprimarea fabricaţiei pâinii albe căci, pentru pâinea „integrală" se întrebuinţază toată făina obţinută prin măcinarea grâului, adică cu tărâţe cu tot, ceeace constituie bine'nţeles o mare economie.

Orice măsură prohibitivă atrage însă şi evaziunile, mai mult sau mai puţin profitabile după fiecare caz în parte. Astfel la exemplul făinii integrale, persoanele interesate sustrag o parte din făina albă pe care o vând la târgul negru astfel că pânea fabricată din făina rămasă va conţine o mai mare cantitate de

tărâțe decât pânea integrală obișnuită sau, cu alte cuvinte, o mai mare cantitate de substanțe minerale [1]. Pentru depistarea acestor evaziuni, autoritățile au încercat să efectueze unele verificări ce au eșuat adesea în fața ingeniozității fraudatorilor, ele nefiind întotdeauna bazate pe considerații științifice. Această problemă a fost studiată la Institutul de Cercetări Agronomice din București de către D-nii Prof. MIRCEA IONESCU și SIMION POPESCU [2], care i-au dat o soluție grafică bazată pe o serie de tablouri numerice. Noi vom da în acest articol o soluție matematică apropiată care poate rezolva în mod satisfăcător problema odată ce se caută numai o indicație aproximativă asupra fraudei comise, rezultatele obținute putând fi ușor corectate de erorile corespunzătoare.

Bobul de grâu conține în înveliș majoritatea substanțelor minerale și în interior o pudră de amidon care după măcinarea bobului și după trecerea făinii obținute printr'o sită deasă, formează făina albă din comerț. Invelișul însă nu poate fi măcinat atât de fin astfel ca să aibă același ordin de mărime ca și pudra de amidon; vom găsi deci în sită aproape toată tărâța, adică majoritatea substanțelor minerale.

Bazându-ne pe această observație și presupunând că o cantitate determinată de grâu, oricare ar fi proveniența ei, dă totdeauna aceeași cantitate de substanțe minerale [3], — cu mici abateri neglijabile în problema noastră, — vom putea face operațiile următoare :

Din 9 probe de făină integrală, vom trece printr'o sită întâi 90%, 80%, 70%, ... 10%, și apoi vom calcina câte 100 gr. *din făina rămasă în sită.* Luând apoi în abscisă extracțiile respective [4] și în ordonată cantitățile de cenușă obținute, vom putea

---

1) Tărâțele conțin cea mai mare parte din substanțele minerale aflate în boabele de grâu.

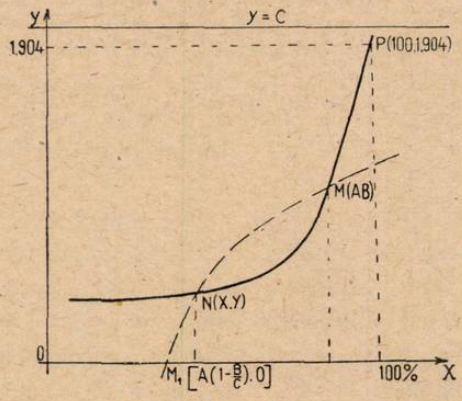
2) Buletinul Facultății de Agronomie din București, T. II. pag. pag. 47.

3) Se determină calculând făina de grâu și cântărind cenușa. Greutatea electolitrică a grâului pare să joace și ea un rol în această problemă, însă noi vom căuta să simplificăm chestiunea, neținând seamă de acest lucru.

4) Mai precis, vom desemna prin grad de extracție procentul de făină rămasă în sită, astfel că celor 9 probe le corespund în ordine gradele de extracție 10%, 20%, 30%, ... 90%, pe care le vom marca în abscisă.

trasa o curbă continuă ce dă cantităţile de săruri minerale corespunzând la o extracţie fixată dinainte [1].

Autorii care s'au ocupat de această chestiune: A. FORNET, K. MOHS, O. HALTMAYER, etc. [2], au obţinut curbe care diferă oarecum unele de altele, însă nu prea mult, astfel că, ţinând seamă de observările făcute de MOHS, vom considera ca valabilă în problema noastră curba indicată de acest autor [3].



Pentru a trata analitic problema, ar trebui să cunoaştem ecuaţia aproximativă a curbei care s'ar putea obţine printr'un procedeu oarecare de interpolaţie, însă această metodă ne conduce în general la un sistem prea complicat de ecuaţii. O simplificare poate fi adusă ţinând seamă de forma particulară a curbei, aşa că ne-am gândit să o reprezintăm prin iperbola echilateră

$$(y - k)\ (h - x) = l^2. \qquad (1)$$

Constantele h, k, l, vor fi determinate scriind că ecuaţia (1) e verificată pentru trei puncte date dinainte şi pe care le vom nota în general cu $A_1\ (a_1, b_1)$, $A_2\ (a_2, b_2)$, $A_3\ (a_3, b_3)$. Din sistemul corespunzător

$$(a_1 - h)\ (k - b_1) = l^2, \quad (a_2 - h)\ (k - b_2) = l^2, \quad (a_3 - h)\ (k - b_3) = l^2 \qquad (2)$$

---

1) Pentru gradul de extracţie 100%, — adică pentru făina netrecută prin sită, — vom obţine o cantitate de săruri minerale care nu poate fi depăşită fără să fi existat vreo fraudă la alcătuirea probei corespunzătoare. Aceasta este cantitatea maximă respectivă şi ea este presupusă invariabilă în în ipotezele noastre. O discuţie a acestei chestiuni a fost făcută în articolul citat mai sus astfel că noi nu vom mai insista asupra acestui punct.

2) Dr. A. FORNET. *Vom Mehl zum Brot.* 6 Aufl. 1936. Verlag P. Günther. Berlin. — K. MOHS. *Zeitschr. f. d. gesamte Getreide* ... Sept. 1933. — O. HALTMAYER *Zeitschr. f. d. gesamte Getreide* ... Jul. 1930.

3) Curba corespunde unui grâu de greutate hectolitrică 75 şi cu un conţinut mineral de 1,904%.

se deduc ecuațiile

$$k(a_1 - a_2) + h(a_1 - b_2) - (a_1 b_1 - a_2 b_2) = 0$$

$$k(a_2 - a_3) + h(b_2 - b_3) - (a_2 b_2 - a_3 b_3) = 0$$

care dau

$$h = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2) + a_2 a_3 (b_2 - b_3) + a_3 a_1 (b_3 - b_1)}{b_1 (a_2 - a_3) + b_2 (a_3 - a_1) + b_3 (a_1 - a_2)} \quad (3)$$

Constanta k se obține intervertind în această expresie literele a și b iar constanta l^2 ducând în prima relație (2) valorile găsite pentru h și k.

Astfel, pentru $A_1(100; 1{,}9)$, $A_2(80; 0{,}8)$, $A_3(40; 0{,}4)$, se găsesc valorile

$$h = \frac{340}{3}, \quad k = \frac{1}{15}, \quad l^2 = \frac{220}{9},$$

iar ecuația (1) devine

$$y = \frac{1}{15} + \frac{220}{1020 - 9x}. \quad (4)$$

O altă alegere a punctelor A_1 ar da o iperbolă asemănătoare care ar putea fi utilizată în intervalul în care ea se apropie cel mai mult de curba lui MOHS.

Să trecem acum la rezolvarea problemei de evaziune considerate. Fraudatorii trec făina integrală printr'o sită foarte fină, scoțând astfel pulberea de amidon ce constitue făina de patiserie, și fabrică pânea integrală din făina rămasă care conține deci mai multe substanțe minerale decât făina integrală inițială.

Mai general, dacă în loc de făină integrală am considera o extracție precisă, impusă de autorități de pildă, efectuând aceeași operație, fraudatorii ar sustrage făina albă și ar fabrica pânea corespunzătoare extracției impuse cu mai multe substanțe minerale decât ar fi permis.

Pentru a exprima analitic această operație, vom desemna prin A extracția fixată dinainte, prin B cenușa corespunzătoare, și prin x o altă extracție, — aceea sustrasă de fraudatori, — a cărei cenușă y este inferioară lui B. Aceste extracții vor putea fi desemnate simbolic prin $(0 - A)$ și $(0 - x)$, iar din punct de vedere analitic vom putea spune că punctele (A, B) și (x, y) aparțin curbei lui MOHS.

Ştiind că în A gr. făină (0—A) avem x gr. de făină (0—x), în 100 gr. din prima făină vom avea cantitatea

$$a = 100 \frac{x}{A} \text{ gr. de făină } (0 - x).$$

Apoi, observând că în 100 gr. de făină $(0 - x)$ avem y gr. de substanţe minerale, în cele A gr. de făină găsite vom avea

$$b = \frac{a \cdot y}{100} = \frac{x \cdot y}{A} \text{ gr. de substanţe minerale.}$$

Atunci, dacă din 100 gr. de făină $(0 - A)$ se scoate cantitatea A de făină $(0 - x)$, se obţine o făină desemnată simbolic prin $(x - A)$ în care nu mai sunt decât

$$B - b = \frac{AB - xy}{A} \text{ gr. de substanţe minerale.} \qquad (5)$$

Pe de altă parte, indicând prin C substanţele minerale conţinute în 100 gr. de făină $(x - A)$, cenuşa precedentă (5) care corespunde la $(100 - a)$ gr. de făină $(x - A)$, va fi dată de expresia

$$C \frac{100 - a}{100} = C \frac{A - x}{A}. \qquad (6)$$

Egalând atunci expresiile (5) şi (6), se găseşte relaţia

$$C = \frac{AB - xy}{A - x} \qquad (7)$$

care a fost dată de D-nii M. IONESCU şi S. POPESCU în articolul citat. Această ecuaţie se poate pune şi sub forma

$$xy + C(A - x) - AB = 0. \qquad (8)$$

şi ea reprezintă în planul xOy o iperbolă echilateră ale cărei asimptote sunt axa Oy şi dreapta $y + C$, şi trece bine'nţeles prin punctul (A, B).

Problema de evaziune considerată poate fi acum rezolvată cu ajutorul celor două iperbole (1) şi (8). Într'adevăr, să presupunem că guvernul impune vânzarea unei făini de tipul $(0 - A)$ sau de o extracţie superioară $(0 - A')$ pentru care indicele A' al extracţiei este mai mare decât A.

In primul caz, cantitățile A și B sunt cunoscute, ca și cenușa C de altfel, cenușă care a fost obținută din proba ridicată de autorități pentru analiză. Condiția (8), împreună cu ecuația (1) care reprezintă curba lui MOHS și care trece și ea prin punctul (A, B), ne dă sistemul

$$\begin{aligned} &xy - Cx - A(B - C) = 0 \\ &(y - k)(h - x) = (B - k)(h - A)^{1)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Aceste două iperbole au două puncte comune, punctul M (A, B) și punctul N (X, Y) care se obțin rezolvând sistemul (9); eliminând între aceste ecuații pe y, găsim ecuația

$$(k - C) \cdot X^2 + [h(C - B) + A(C - k)] \cdot X + Ah(B - C) = 0$$

care trebue să admită rădăcina A. A doua rădăcină ne va da coordonatele punctului căutat

$$X = h \cdot \frac{B - C}{k - C}, \quad Y = \frac{Ak + (h - A)C}{h}$$

și astfel avem sub o formă simplă gradul de extracție X corespunzător făinii sustrase de fraudatori.

Pentru a trata un caz simplu, să considerăm cazul făinii integrale, autoritățile nepermițând nici-o extracție de făină albă [2], și să presupunem că proba ridicată de organele de control a dat la analiză C = 2,56. In această ipoteză, curba (1) este dată de expresia (4) și se găsește X = 30%. Fraudatorii au sustras deci o făină albă a cărei extracție este de circa 30%.

In general, dacă B < C și dacă punctul (A, B) se găsește pe arcul de curbă stabilit de MOHS (pentru care $0 < A \leqslant 100$), punctul de intersecție al curbei (8) cu axa Ox, de abscisă $X_1 = A\left(1 - \frac{B}{C}\right)$, va fi cuprins în intervalul (0, A) ceeace corespunde la o fraudă reală.

Dacă B = C, este inutil să ne raportăm relațiilor (9) odată ce nu avem nicio fraudă, ecuția (8) reducându-se la X = 0 pentru $y \neq C$.

---

1) Coeficientul l^2 al ecuației (1) a fost determinat scriind că punctul (A, B) este situat pe curba lui MOHS.

2) Pentru făina integrală, A = 100 și B = 1, 9.

Dacă $B > C$, avem o imposibilitate căci nu putem concepe o sustragere a tărâței și nu a făinei albe.

Se pot generaliza aceste rezultate presupunând că autoritățile au permis vânzarea făinii de extracție $(0 — A')$ pentru care $A \leqslant A' \leqslant 100\%$, A fiind fixat dinainte. In aceste condițiuni, dacă $C > 1,9$, prima relație (9) ne va da ca mai sus gradul de extracție al făinii sustrase.

Dacă $B \leqslant C \leqslant 1,9$, nu există fraudă, iar dacă $B > C$, problema nu are sens.

RADU BĂDESCU.

RAPORTUL COMISIUNEI PENTRU PREMIUL „ING. ALEXANDRU ROȘU"

Subsemnații membri ai comisiunei pentru decernarea premiului „ING. AL. ROȘU", cuvenit celui mai harnic corespondent, elev de liceu, am cercetat vol. LII al *Gazetei Matematice* și am constatat cele ce urmează:

Cea mai bogată activitate a avut-o d-l P. P. TEODORESCU, elev în clasa VII a liceului Matei Basarab din București. Pe copertele *Gazetei* îl găsim cu cele mai multe probleme rezolvate (70) apoi exerciții, note, probleme propuse, cereri și chiar recreații. In cuprinsul vol. LII, îl găsim cu două probleme propuse (6345, de algebră și analiză combinatorie și 6360, de aritmetică și teoria numerelor) și 12 probleme rezolvate, ale căror soluții se găsesc publicate în acest volum și anume: șase de geometrie (5912, 5972, 6104, 6166, 6184, 6203), trei de aritmetică și teoria numerelor: 5527, 6139 și 6270, două de trigonometrie (6187 și 6225) și una de algebră (6206).

La problema de geometrie 5912, se face mențiunea că d-l „P. P. TEODORESCU" a dat o foarte bună soluție cu ajutorul coordonatelor baricentrice, iar la problema de aritmetică și teoria numerelor 5527, propusă de regretatul I. IONESCU, apare ca singur rezolvitor, publicându-se soluția redactată de d-sa, deși era atunci numai în clasa VI liceală.

Menţionăm, că d-l VIRGIL G. CONSTANTINESCU, elev în clasa VII a liceului *„Radu Greceanu"*, din Slatina, arată deasemeni multă hărnicie în vol. LII al *Gazetei Matematice* şi figurează pe coperte cu 65 probleme rezolvate, dar în cuprinsul volumului, nu figurează decât ca rezolvitor la 5 probleme: două de geometrie (6166, 6238) şi câte una de aritmetică, trigonometrie şi algebră (6139, 6187, 6206) pe când ceilalţi corespondenţi elevi de liceu, au arătat o activitate mult mai redusă.

Ca urmare la cele arătate mai sus, propunem ca premiul „ING. ALEX. ROŞU" să fie acordat d-lui P. P. TEODORESCU, azi elev în clasa VIII al liceului Matei Basarab din Bucureşti.

Valoarea premiului pentru acest an este de lei 5000, sumă donată de d-l AL. AL. ROŞU.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „ING. ALEX. ROŞU"
Ing. AL. D. BUNESCU, Avocat AL. AL. ROŞU
şi Ing. D. STOICA.

Acest raport a fost aprobat în Adunarea generală din 17/II 1948.

RAPORT PENTRU PREMIUL „GH. EM. FILIPESCU"

Examinând cererile depuse pentru premiul „GH. EM. FILIPESCU" de d-nii CIOC I. D-TRU, GRUMĂZESCU MIRCEA şi SOARE MIRCEA precum şi situaţia candidaţilor la cursul de Rezistenţa Materialelor, am stabilit următoarea clasificare:

In primul rând este d-l CIOC I. DUMITRU din anul V Construcţii, care a făcut complect cursul de Rezistenţa Materialelor, dând totdeauna examenele în prima sesiune, obţinând note bune şi arătând mare aplicaţie la lucrările practice şi la epure.

In al doilea rând este d-l GRUMĂZESCU MIRCEA, din anul IV Electromecanică.

In rândul al treilea este d-l SOARE MIRCEA din anul III Construcţii.

Ing. I. S. ANTONIU, Rector N. PETRULIAN,
Ing. D. STAN şi Prof. C. C. TEODORESCU.

In şedinţa dela 23 Martie 1948 s'a hotărât ca premiul „GH. EM. FILIPESCU" să se decearnă d-lui DUMITRU I. CIOC.

NOTE MATEMATICE

21. *Primii studenţi la „matematici şi filosofie în limba românească“.* IOAN ELIAD ne spune că cei dintâi studenţi la matematici şi filosofie în limba românească au fost:

IOAN ELIAD, IOAN PANDELE, ION MĂINESCU, IOAN CRĂSNARU, DANIIL TOMESCU şi CONSTANTIN PANCU (*Almanahul literar* al lui ELIAD, 1839).

Mai târziu, spune N. IORGA, alături de un conte SCARLAT ROSETTI, din viţa lui NICOLAE, ginerele BRÂNCOVEANULUI, erau fii de foarte mărunţi boiernaşi ca TEODOR PALADI şi poate MOROIU şi călugări care se pregăteau de studii mai înalte şi publicaţii ca EUFROSIN POTECA din părţile Teleajenului (*Istoria învăţământului românesc.* N. IORGA pag. 173).

LT.-COL. EUGEN ŞT. IACOB.

22. *Despre exerciţiul 29 Vol. LII pag. 356.* Se cer patratele de forma *abcbdbcba* multipli de 101. Am de observat următoarele la soluţia dată la pag. 356 Vol. LII:

1°. Nu era nevoie ca în tabloul valorilor lui a să figureze 2, 3, 7, 8 căci a este terminaţie de patrat perfect.

2°. Dacă se admite valoarea $a = 0$, atunci $b = 0$ şi patratul căutat este de forma oocodocoo, de unde se deduce soluţia formală

$$1010^2 = 001020100.$$

3°. Dacă $a = 0$ şi $c = 0$, atunci $d = 0$ iar nu 1 cum s'a imprimat, în tabloul de la soluţia exerciţiului.

DR. ANDRÉ BAL. (Givors, Franţa).

23. *Generalizarea unei inegalităţi.* Cu ocazia rezolvărei problemei 4993 (G. M. LII p. 44) a fost readusă în discuţie inegalitatea

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$$

propusă de ION IONESCU încă din 1926 (Prob. 3478 rezolvată în G. M. XXXII p. 194).

Demonstrarea acestei inegalităţi este imediată dacă considerăm cantităţile

$$x_1 = \frac{a+b}{b+c}, x_2 = \frac{c+a}{b+c}, x_3 = \frac{b+c}{c+a}, x_4 = \frac{a+b}{c+a}, x_5 = \frac{c+a}{a+b}, x_6 = \frac{b+c}{a+b},$$

în care a, b, c sunt pozitive şi ţinem seama că media aritmetică a n cantităţi pozitive este mai mare ca media lor geometrică

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} \geqslant \sqrt[6]{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6}$$

Pe aceeaşi cale, în ipoteza a n cantităţi pozitive a_1, a_2, ... a_n, găsim în general

$$\sum \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{a_{k+1} + \ldots + a_n} \geqslant \frac{k}{n-k} C_n^k$$

care în cazul $k = 1$ conduce la generalizarea dată cu ocazia rezolvării problemei 3478, iar în cazul $k = n - 1$ conduce la generalizarea dată de d-l MARIN ŞTEFAN unei alte inegalităţi cunoscute (G. M. XXXI p. 374).

Insfârşit dacă ţinem seama de inegalităţile dintre valorile medii (G. M. I, p. 414), putem scrie în general

$$\sum \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^m}{(a_{k+1} + \ldots a_n)^m} \geqslant \frac{k^m}{(n-k)^m} C_n^k$$

în care a_1, a_2, ... a_n sunt cantităţi pozitive, iar k, m, n sunt întregi şi pozitivi ($k < n$).

MIRCEA ADAM.

24. *Integrarea unei ecuaţii diferenţiale.* Sub acest titlu, s'a dat în nota dela pag. 744, Vol. LI, *Gazeta Matematică*, o soluţie pentru integrarea ecuaţiei diferenţiale:

$$(2x-1)y'' - (4x^2+1)y' + (4x^2 - 2x + 2)y = 0$$

care a fost propusă la examenul de capacitate la Bucureşti în 1935.

In cele ce urmează voi da o nouă soluţie, diferită şi de soluţia publicată la pag. 21 în *Revista Universitară Matematică Nr. 2* din 1937.

Căutând o soluție particulară de forma e^{rx}, scriem:

$$(2x-1)r^2e^{rx}-(4x^2+1)re^{rx}+(4x^2-2x+2)e^{rx}=0$$

$$\therefore \quad (2x-1)r-(4x^2+1)r+(4x^2-2x+2)=0$$

care este satisfăcută de $r=1$. Soluția particulară $y=e^x$, permite să-i scoborâm ordinul cu o unitate prin substituția $y=ze^x$ în urma căreia ecuația propusă devine:

$$(2x-1)z''+(-4x^2+4x-3)z'=0$$

$$\therefore \quad z'=u\ ,\ (2x-1)\frac{du}{dx}-(4x^2-4x+3)u=0$$

$$\therefore \quad \frac{du}{u}=\left(2x-1+\frac{2}{2x-1}\right)dx$$

$$\therefore \quad \mathrm{L}u=x^2-x+\mathrm{L}(2x-1)+\mathrm{C}$$

$$\mathrm{L}\frac{u}{2x-1}=x^2-x+\mathrm{C} \quad \therefore \quad u=(2x-1)e^{x^2-x+\mathrm{C}}$$

Deci

$$z=e^{x^2-x+\mathrm{C}}+\mathrm{C}_1 \quad \text{și} \quad y=\mathrm{C}_0e^{x^2}+\mathrm{C}_1e^x.$$

VIRGIL GHIȚESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Universitatea din București. Facultatea de Științe. Secția Matematici

Sesiunea Octombrie 1947. Anul I. Examene de fine de an

Algebră. 1. Să se găsească numărul maxim de vectori linear independenți în sistemul

$$(S)\quad \begin{aligned} v_1&=(2,-1,0,1,-2)\ ,\ v_2=(-2,-1,-4,5,-2),\\ v_3&=(-3,-1,-5,6,-2)\ ,\ v_4=(-3,1,-1,0,2),\\ v_5&=(-4,-1,-6,7,-2). \end{aligned}$$

Să se aleagă un sistem de vectori linear independenți din (S) și să se exprime linear cei rămași cu ajutorul celor aleși.

2. Se dau matricele

$$M=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{și} \quad N=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Să se determine a şi b astfel încât, punând $P = aM + bN$ să avem: $\alpha)$ $P^2 = U$ (matricea unitate); $\beta)$ $P^3 = O$; $\gamma)$ Să se scrie regula de înmulţire în inelul generat de matricele U şi $M + N$; idem pentru inelul generat de U, M şi N.

3. Să se găsească c. m. m. c. d. al polinoamelor

$$P(x) = x^{n+1} - (n+1)x + n \quad ; \quad Q(x) = (x-1)^3$$

$$R(x) = (1 - x^n)(1 + x) + 2nx^n(x - 1) - n^2 x^n (1 - x)^2.$$

Geometrie. I. Intr'un sistem de axe rectangulare se dau punctele $A(3a, 0)$, $B(0, 3a)$.

1°. Să se scrie ecuaţia conicei Γ circumscrisă triunghiului OAB, având centrul în punctul de concurs al medianelor triunghiului.

2°. Să se determine natura conicei şi ecuaţia ei redusă.

3°. Să se afle locul geometric al punctelor M din plan ale căror polare în raport cu conica Γ sunt tangente cercului (C), ce are centrul în origine şi este tangent la AB.

II. Să se afle ecuaţia cilindrului ce are ca bază cercul (C) de rază a, situat în planul xOy al unui sistem trirectangular de coordonate şi care este tangent axei Oy în O, generatoarele făcând unghiuri egale cu axele de coordonate.

Calcul diferenţial şi integral. 1. Pentru ce valori ale parametrului k, seria

$$\Sigma\left(\sqrt[3]{n^k + 1} - \sqrt[3]{n^k}\right)$$

este convergentă?

2. Fie

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

Potrivit formulei lui MACLAURIN putem scrie

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(\theta x).$$

Să se determine θ. Să se verifice că θ nu depinde decât de x şi de raportul $\frac{d}{e}$. Ce se întâmplă, dacă $d = 0$?

Din rezultatul obţinut să se deducă că ecuaţia de gradul al doilea

$$6\alpha x^2 + 3kx - \alpha - k = 0$$

are totdeauna o rădăcină cuprinsă între 0 şi 1, oricare ar fi parametrii k, α.

3. Să se calculeze

$$\int \frac{2\sin x + \sin 2x}{\cos x + \cos 2x}\, dx.$$

BIBLIOGRAFIE

Revista. Serie Segunda 16. Publicaciones de la Facultad de ciencias fisicomatematicas. Director: ING. ALEXANDRO DE ESTRADA. La Plata. Diciembre 1947. J. P. LOMBARDI: Movimento y estabilidad dinámica de un avion. R. GANS: Refrigeración por aire o por liquido. G. VALIRON: Prolongamiento analitico y funciones enteras. A. STURLA y E. CASTELLANO: Estudio quimico y metalografico de un riel de subterráneo roto en servicio. C. J. LUISONI: El método de GALERKIN aplicado a la resolución de los problemas de placas rectangulares empotradas. Sus ventajas sobros otros métodos.

Revista Matematică din Timişoara. Vol. XXVIII. Nr. 1. Martie 1948. Comitetul de colaborare al R M.T. V. ALACI: O metodă pentru a construi anumite clase de funcţii care au aceeaşi derivată. E. ARGHIRIADE: Asupra teoremei lui TERQUEM. Înştiinţare. Notă matematică. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 244. (Gazeta Matematică, XL, 266). In afară de cei citaţi în răspunsul dela pag. 273 din acest volum, mai profesa la şcoala lui VASILE LUPU şi călugărul grec BENEDICT DE LA VATOPEDI, care predase la Kiev şi după recomandaţia lui VASILE LUPU, chiar şi la Moscova unde fondase o tipografie. Acest BENEDICT aduna din Moldova manuscripte greceşti şi le trimetea Ţarului. La 1650 găsim încă pe acest călugăr în Moldova, unde îndeplinea şi sarcini politice şi ţinea corespondenţa lui VODĂ la Kiev. N. IORGA se întreabă în *« Istoria învăţământului românesc »* pag. 27, dacă: *« N'a fost printre profesori şi acel* EUSTRAŢIE LOGOFĂTUL, *întrebuinţat la pregătirea legislaţiei mai mult teoretice a lui* VASILE LUPU *şi capabil de a da, cum credem, frumoasa traducere, care cade tocmai în aceşti ani ai funcţionărei Colegiului? ».*

« La şcoala din Iaşi a lui VASILE LUPU *este sigur că* NICOLAE MILESCU *şi-a format ştiinţa de greceşte şi latineşte, şi apoi şi-a desăvârşit învăţătura la « Academia Constantinopolitană » patriarhală întemeiată pe vremea când Grecii aveau fruntaşi atât de învăţaţi ca dragomanul* PANAITI NIKUSIOS.

LT.-COL. EUG. ŞT. IACOB.

DIVERSE

Inmânare de premii

In şedinţa de Marţi 6 Aprilie 1948 s'au înmânat următoarele premii:

D-lui D. I. CIOC premiul „GH. EM. FILIPESCU" în sumă de 10.000 (zece mii) lei, donată de d-l Prof. Ing. D. STAN.

D-lui P. P. TEODORESCU premiul de aritmetică „I. IONESCU" în sumă de 1.000 (una mie) lei, donată de d-nii G-l GH. BUICLIU şi Prof. Ing. D. STAN.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2249. *Să se determine printr'o metodă directă cantitatea* a *astfel ca*

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}-a\log n\right]$$

să fie finită şi diferită de zero.

TR. LALESCU.

Prima Soluţie. Să observăm că pentru $x>0$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots=x-\theta\frac{x^2}{2}\quad\text{unde}\quad 0<\theta<1.$$

De aci

$$\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}=\frac{\theta_1}{2n^2}\ ,\quad \frac{1}{n+1}-\log\frac{n+2}{n+1}=\frac{\theta_2}{2(n+1)^2},\ldots$$

$$\ldots\frac{1}{n^2}-\log\frac{n^2+1}{n^2}=\frac{\theta_{n^2-n+1}}{2n^2}\qquad 0<\theta_i<1$$

şi prin urmare

$$\sum_n^{n^2}\frac{1}{s}-\log(n^2+1)+\log n=\sum_n^{n^2}\frac{\theta_{i^2-n+1}}{2i^2}\qquad(1)$$

însă $$\log n-\log(n^2+1)=-\log n-\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

şi $$\sum_n^{n^2}\frac{\theta_{i-n+1}}{2i^2}<\sum_n^{n^2}\frac{1}{2i^2}<\sum_n^{\infty}\frac{1}{2i^2}.$$

Observăm că seria $\sum_1^{\infty}\frac{1}{i^2}$ fiind convergentă

$$\lim_{n=\infty}\sum_n^{\infty}\frac{1}{2i^2}=0.$$

şi că $\lim_{n=\infty}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=0$; ţinând seamă de aceste două ultime limite, deducem din (1)

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}-\log n\right)=0.$$

Constatăm deci că dacă $a=1$, limita expresiei din problemă este zero, iar dacă $a\neq 1$, limita expresiei este $\pm\infty$, după cum a este mai mic sau mai mare decât 1.

A doua soluție. Se știe că

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\log n+c+\varepsilon_n$$

unde c este constanta lui EULER ($c=0{,}5772167$), iar ε_n un infinit mic în raport cu $\frac{1}{n}$. Din această relație deducem

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}=2\log n-\log(n-1)+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_{n-1}$$

și deci

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}-\log n\right)=0.$$

Restul ca la prima soluție.

N. G. R.

Problema a fost rezolvată în cursul apariției volumului XXI de D-l C. S. ȘTEFĂNESCU.

PROBLEMA 4513. *Să se găsească patratele perfecte de cinci cifre, astfel în cât suprimând o cifră oarecare din corpul lor, ele să rămână patrate perfecte de patru cifre (cu excepția patratelor berce și decapitate).*

AL. A. ROȘU.

Fie *abcde* un patrat perfect de 5 cifre așa în cât suprimând o cifră numărul obținut *acde*, *abde* sau *abce* să fie tot patrat perfect. Patratele berce [1] și decapitate [2] fiind omise, cazul când unul din numerele *bcde* sau *abcd* ar fi patrat perfect nu se examinează. Avem de considerat deci numai următoarele 3 cazuri:

1°. *abcde* și *acde* sunt simultan patrate perfecte. Trebue să avem

$$M^2=abcde \quad \text{și} \quad N^2=acde$$

$$\therefore \quad (M+N)(M-N)=1000(9a+b). \qquad (1)$$

1) G-L GH. BUICLIU: Patrate berce (G. M., Vol. XL, pag. 104).

2) E. ȘTEFĂNESCU: Patrate decapitate (G. M., Vol. XXX, pag. 205, 245, 365).

Dăm lui a pe rând valorile 1, 2, ..., 9. La fiecare valoare a lui a dăm lui b valorile 0, 1, ..., 9. Se obţin astfel 90 de numere de forma $1000\,(9a + b)$. Fie $\alpha > \beta$ doi divizori de aceeaşi paritate a unuia din aceste 90 numere. Din (1) se scoate

$$M = \frac{\alpha + \beta}{2}\ ,\quad N = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

cu condiţia $100 \leqslant M \leqslant 317$ şi $32 \leqslant N \leqslant 99$. Numerele M şi N care satisfac aceste condiţii dau soluţiile problemei pentru cazul 1°. Se găsesc următoarele 15 soluţii:

$115^2 = 13225$ cu $35^2 = 1225$; $135^2 = 18225$ cu $35^2 = 1225$

$140^2 = 19600$ cu $40^2 = 1600$; $150^2 = 22500$ cu $50^2 = 2500$; $145^2 = 21025$ cu $45^2 = 2025$

$155^2 = 24025$ cu $45^2 = 2025$; $187^2 = 34969$ cu $63^2 = 3969$

$189^2 = 35721$ cu $61^2 = 3721$; $191^2 = 36481$ cu $59^2 = 3481$

$193^2 = 37249$ cu $57^2 = 3249$; $195^2 = 38025$ cu $55^2 = 3025$; $215^2 = 46225$ cu $65^2 = 4225$

$225^2 = 50625$ cu $75^2 = 5625$; $265^2 = 70225$ cu $85^2 = 7225$; $290^2 = 84100$ cu $90^2 = 8100$

$305^2 = 93025$ cu $95^2 = 9025$.

2°. $abcde$ este patrat perfect simultan cu $abde$. Ca la 1° se găseşte

$$(M + N)\,(M - N) = 100\,(90a + 9b + c).$$

Dând cifrelor a, b, c toate valorile posibile obţinem următoarele 12 soluţii

$114^2 = 12996$ cu $36^2 = 1296$; $130^2 = 16900$ cu $40^2 = 1600$; $146^2 = 21316$ cu $46^2 = 2116$

$152^2 = 23104$ cu $48^2 = 2304$; $160^2 = 25600$ cu $50^2 = 2500$; $175^2 = 30625$ cu $55^2 = 3025$

$190^2 = 36100$ cu $40^2 = 3600$; $205^2 = 42025$ cu $65^2 = 4225$; $219^2 = 47961$ cu $69^2 = 4761$

$228^2 = 51984$ cu $72^2 = 5184$; $266^2 = 70756$ cu $84^2 = 7056$; $304^2 = 92416$ cu $96^2 = 9216$

3°. $abcde$ şi $abce$ sunt simultan patrate perfecte. Avem

$$(M + N)\,(M - N) = 10\,(900a + 90b + 9c + d)$$

unde c este cifra zecilor unui patrat perfect. Procedând prin încercări ca în cazurile precedente se găsesc următoarele 2 soluţii:

$117^2 = 13689$ cu $37^2 = 1369$; $234^2 = 54756$ cu $74^2 = 5476$.

D-nii Gh. Gh. Vrânceanu, E. N. Wegener şi Aurel Tibăr (Constanţa), au găsit toate soluţiile folosindu-se de table de patrate.

PROBLEMA 4765. *Fie un triunghiu* ABC *şi* $A_1B_1C_1$ *triunghiul său ortic. Înălţimile* AA_1, BB_1, CC_1 *întâlnesc dreptele* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *în punctele* D, E, F. *Notând cu* $\overline{AD} = m$, $\overline{BE} = n$, $\overline{CF} = p$, *să se demonstreze relaţia:*

$$\frac{mtg\,A + ntg\,B + ptg\,C}{2R \sin A \sin B \sin C} = \sec(A-B) + \sec(B-C) + \sec(C-A)$$

GH. I. DUMITRESCU.

Soluţie dată de d-l P. A. CERNESCU (Lic. Târgovişte).

In triunghiul ADC_1 avem

$$\sphericalangle DC_1A = C \quad \text{şi} \quad \sphericalangle DAC_1 = \frac{\pi}{2} - B$$

$$\therefore \quad \sphericalangle ADC_1 = \pi - C - \left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \frac{\pi}{2} + B - C$$

$$m = \overline{AD} = \frac{AC_1 \sin C}{\cos(B-C)} = \frac{b \cos A \sin C}{\cos(B-C)} \qquad (1)$$

căci

$$AC_1 = b \cos A.$$

Din (1) se deduce, după înlocuirea lui b prin $2R \sin B$:

$$mtg\,A = \frac{2R \sin A \sin B \sin C}{\cos(B-C)} \qquad (2)$$

Adunând între ele relaţiile analoage cu (2) se găseşte relaţia din enunţ.

Au rezolvat problema pe căi analoage d-nii: V. BOGZA, C. CORDUNEANU, CĂLIN I. DIMITRIU, A. C. JIPA, M. A. NEGREA, I. C. PAREPEANU, I. I. PASCARU, M. D. PETCULESCU, M. D. POPA, AL. POPESCU-ZORICA, DORIN N. TEODORESCU.

PROBLEMA 5598. *Să se demonstreze că polarele unui punct de pe axa radicală a două cercuri, se întâlnesc pe acea axă.*

Reciproc, dacă polarele unui punct M *faţă de cercurile* C_1 *şi* C_2 *se întâlnesc pe axa radicală a acestor cercuri, atunci* M *se află pe axa lor radicală.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de d-nii: M. AL. VASILESCU-STABU, C. C. ILIESCU, ALDEA V. MINEA, MARIN GH. POPESCU, VALERIU I. CAPVERDE, TIBERIU TURCULEŢ, EMIL CONSTANTINESCU şi SEVER N. TRESTIANU.

Fie MT_1, MT_1' şi MT_2, MT_2' tangentele duse din M la cercurile C_1 şi C_2. Punctul M fiind pe axa radicală a celor două cercuri, avem:

$$MT_1 = MT_1' = MT_2 = MT_2'$$

Punctele T_i se găsesc pe un cerc (M) cu centrul în M, iar T_1T_1', T_2T_2' sunt în acelaş timp polarele lui M faţă de C_1, C_2 şi axele radicale ale lui (M) cu fiecare din cercurile C_1, C_2, deci se întâlnesc pe axa radicală a acestor din urmă două cercuri.

Reciproc T_1T_1', T_2T_2' se întâlnesc în N pe axa radicală a cercurilor C_1, C_2, deci

$$NT_1 \times NT_1' = NT_2 \times NT_2'$$

ceea ce arată că T_1, T_1', T_2, T_2' sunt conciclice şi anume pe cercul cu centrul la întâlnirea perpendicularelor din C_1 şi C_2 pe T_1T_1' şi T_2T_2', adică în M. Dar atunci

$$MT_1 = MT_1' = MT_2 = MT_2'$$

ceea ce arată că M este pe axa radicală a cercurilor C_1, C_2.

1°. Au dat bune soluţii cu ajutorul rapoartelor armonice d-nii: P. P. DRĂGHICESCU şi OCT. E. GHEORGHIU.

2°. O foarte bună soluţie prin consideraţie de triunghiuri asemeni a trimis d-l CEZAR N. I. BOERESCU (Politehnica, Bucureşti).

3°. S'au primit soluţii analitice de la d-nii: M. D. COTARIU, OCT. E. GHEORGHIU, MIRCEA A. GHIŢESCU, CL. SENI, I. P. VASILESCU, R. P. VOINEA, M. R. CONSTANTINESCU, GEORGE G. ENESCU, MIRCEA G. IOSIFESCU, MIRCEA V. SOARE şi V. D. PĂLĂCEANU.

4°. D-nii GEORGE G. ENESCU şi P. P. DRĂGHICESCU comunică că prima parte a problemei se găseşte în *Traité de géometrie*, p. 405, par E. ROUCHÉ & COMBEROUSSE.

PROBLEMA 6249. ABC *fiind un triunghiu dat şi* D *al patrulea vârf al paralelogramului* ABCD, *de diagonale* BC *şi* AD, *o dreaptă variabilă dusă prin* D *taie pe* AC *în* E *şi pe* AB *în* F. *Fie* M *intersecţia* BE, CF. *Să se arate că* M *descrie elipsa lui* STEINER *circumscrisă triunghiului.*

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţia I-a. Fie G intersecţia dreptelor BC, AM. Notăm

$$x = \overline{BF} \quad , \quad y = \overline{CE} \quad , \quad b = \overline{AC} \quad , \quad c = \overline{AB}.$$

Când secanta EF variază, F şi E descriu *diviziuni omografice* de ecuaţie

$$xy = bc.$$

Notăm

$$\frac{\overline{GB}}{\overline{GC}} = l, \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = m = \frac{y}{y+b}, \quad \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = n = \frac{x+c}{x}.$$

Din teorema lui CEVA aplicată cevienelor AG, BE, CF deducem

$$lmn = -1.$$

Notăm S aria triunghiului ABC; aria triunghiului GEF este dată de [1]

$$S' = S(1 - lmn) : (1 - l)(1 - m)(1 - n).$$

Avem

$$1 - l = 1 + \frac{1}{mn} = 1 + \frac{xy + xb}{y(x+c)} = \frac{(b+y)(c+x)}{y(x+c)} = \frac{b+y}{y}$$

făcând şi celelalte înlocuiri, obţinem $S' = 2S$. Aria triunghiului pedal al lui M este dublul ariei triunghiului de referinţă deci M descrie prima elipsă a lui STEINER [2].

MIRCEA D. POPA.

Soluţia a II-a. Coordonatele baricentrice ale lui D sunt $(-1, 1, 1)$. O dreaptă variabilă dusă prin D are ecuaţia

$$(\Delta) \qquad \xi + \eta + k(\xi + \zeta) = 0.$$

CF face parte din fascicolul determinat de Δ şi AB şi trecând prin C nu conţine termen în ζ, deci

$$(CF) \qquad \xi + \eta + k\xi = 0.$$

La fel BE nu conţine termen în η

$$(BE) \qquad \xi + k(\xi + \zeta) = 0.$$

Locul geometric al intersecţiei M se obţine eliminând pe k

$$\frac{\xi + \eta}{\xi} = \frac{\xi}{\xi + \zeta} \quad \therefore \quad \xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi = 0$$

adică ecuaţia primei elipse a lui STEINER.

CEZAR N. BOERESCU

---

1) CEZAR COŞNIŢĂ: *Coordonnées barycentriques*, pag. 53.
2) C. COŞNIŢĂ, idem, pag. 53.

Observări. 1°. Problema a mai fost tratată în G. M. XLIII, 1938, pag. 362. N'am propus-o din nou; am regăsit-o pe altă cale şi am identificat-o ulterior publicării.

2°. Au dat soluţii ca în locul menţionat, d-nii: M. D. POPA şi P. P. TEODORESCU (clasa VII-a a liceului Matei Basarab Bucureşti), refăcând demonstraţiile tuturor propoziţiilor necesare.

3°. Soluţie în coordonate baricentrice, analoagă celei publicate, dela d-l C. S. TĂNĂSESCU (Bucureşti).

4°. Soluţii analitice foarte bune dela d-nii: MIHAI R. CONSTANTINESCU, (liceul Ploeşti) şi IOAN I. NOVAC (liceul Brăila). Luând axe coordonate latura BC şi mediatoarea ei şi însemnând A (a, b), C $(c, 0)$ d-l NOVAC găseşte ecuaţia elipsei lui STEINER circumscrise, sub forma simplă.

$$b^2 x^2 - 2abxy + (a^2 + 3c^2)\, y^2 - 2bc^2 y - b^2 c^2 = 0.$$

5°. D-l M. D. POPA dă următoarea generalizare în coordonate baricentrice: dacă D (α, β, γ) este arbitrar în planul triunghiului şi refacem construcţia şi adaptăm soluţia a doua obţinem rezultatul

$$-\frac{\alpha}{\xi} + \frac{\beta}{\eta} + \frac{\gamma}{\zeta} = 0$$

adică o conică circumscrisă triunghiului. Enunţul corespunde cazului

$$\alpha = -1 \quad , \quad \beta = \gamma = 1.$$

D-l M. D. POPA mai face observaţia că dacă D este asociatul punctului LEMOINE ($\alpha = -a^2$, $\beta = b^2$, $\gamma = c^2$), conica precedentă coincide cu cercul circumscris triunghiului. Obţinem astfel propoziţia:

Fie T *intersecţia tangentelor în* B, C *la cercul circumscris triunghiului* ABC. *O dreaptă arbitrară dusă prin* T *taie pe* AC, AB *în* E *şi* F. *Dreptele* BE, CF *se taie pe cercul circumscris.*

Demonstraţia se poate reface ca aplicaţie a teoremei PASCAL.

PROBLEMA 6309. *Două corpuri de forme şi greutăţi diferite, sunt legate între ele cu o sfoară de lungime dată.*

Dacă lăsăm să cadă acele două corpuri dela o mare înălţime, după cât timp va fi sfoara complect întinsă, iar la atingerea pământului ce tensiune va fi în sfoară? Se va presupune rezistenţa aerului direct proporţională cu patratul vitezei.

C-DOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de d-l EMIL I. CONSTANTINESCU (Politehnica Bucureşti).

Să notăm cu: $m_1 > m_2$ *massele* celor două corpuri; l *lungimea firului* ce leagă cele două corpuri; h *înălţimea* dela care

sunt lăsate să cadă cele două corpuri; $R = \lambda^2 v^2$ *rezistența aerului* întâmpinată în căderea celor două corpuri și care este *aceiași* pentru o *aceiași* viteză v (λ^2 este o constantă de proporționalitate); x_1 și x_2 *spațiile străbătute* de cele două corpuri respectiv de massă m_1 și m_2 după un timp t de cădere; g *accelerația gravității.*

Ecuația mișcării corpului de massă m_1 va fi:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 \frac{dv_1}{dt} = m_1 g - R = m_1 g - \lambda^2 v_1^2 \qquad (1)$$

v_1 fiind viteza corpului de massă m_1 la timpul t.

Integrând (1) și ținând seamă că pentru $t=0$, $v_1=0$ obținem:

$$t = \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{m_1}{g}} \log \left[\frac{\sqrt{m_1 g} + \lambda v_1}{\sqrt{m_1 g} - \lambda v_1} \right] \qquad (2)$$

Rezolvând (2) în raport cu v_1 obținem:

$$v_1 = \frac{\sqrt{m_1 g}}{\lambda} \cdot \frac{e^{\lambda t \sqrt{\frac{g}{m_1}}} - e^{-\lambda t \sqrt{\frac{g}{m_1}}}}{e^{\lambda t \sqrt{\frac{g}{m_1}}} + e^{-\lambda t \sqrt{\frac{g}{m_1}}}}. \qquad (3)$$

Ținând seamă că $v_1 = \frac{dx_1}{dt}$, integrând (3) și având în vedere că pentru $t = 0$, $x_1 = 0$ avem:

$$x_1 = \frac{m_1}{\lambda^2} \log \frac{e^{\lambda t \sqrt{\frac{g}{m_1}}} + e^{-\lambda t \sqrt{\frac{g}{m_1}}}}{2} = \frac{m_1}{\lambda^2} \log \left[\cos h \left(\lambda t \sqrt{\frac{g}{m_1}} \right) \right]. \qquad (4)$$

Inlocuind în (1), (2), (3) și (4) pe m_1, x_1, v_1 respectiv prin m_2, x_2, v_2 obținem elementele mișcării în căderea corpului de massă m_2.

Corpul de massă m_1 va *cădea mai repede* având de suportat *aceiași* rezistență a aerului (la viteze egale) iar greutatea sa fiind *mai mare.*

Firul va fi întins când vom avea

$$l = x_1 - x_2$$

adică:

$$l = \frac{m_1}{\lambda^2} \log \cos h \left(\lambda t \sqrt{\frac{g}{m_1}} \right) - \frac{m_2}{\lambda^2} \log \cos h \left(\lambda t \sqrt{\frac{g}{m_2}} \right). \qquad (5)$$

Sau:

$$e^l = \frac{\left[\cos h\left(\lambda t \sqrt{\frac{g}{m_1}}\right)\right]^{\frac{m_1}{\lambda^2}}}{\left[\cos h\left(\lambda t \sqrt{\frac{g}{m_2}}\right)\right]^{\frac{m_2}{\lambda^2}}}. \qquad (5')$$

Relaţia (5') reprezintă o ecuaţie în t care ne dă timpul necesar t_0, *după care firul se întinde.* Introducând această valoare în (3) se poate obţine viteza v_1', la timpul t_0, a corpului de massă m_1:

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1 g}}{\lambda} \operatorname{tang} h\left(\lambda t_0 \sqrt{\frac{g}{m_1}}\right). \qquad (6)$$

Analog pentru viteza v_2' a corpului de massă m_2, la timpul t_0, obţinem:

$$v_2' = \frac{\sqrt{m_2 g}}{\lambda} \operatorname{tang} h\left(\lambda t_0 \sqrt{\frac{g}{m_2}}\right). \qquad (7)$$

La timpul t_0, prin întinderea firului, se produce o *percusiune,* după care cele două corpuri capătă *o aceiaşi viteză* v_0. Aplicând teorema *constantei cantităţilor de mişcare* obţinem:

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = (m_1 + m_2) v_0$$

$$\therefore \qquad v_0 = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2}. \qquad (8)$$

Să studiem acum căderea mai departe a celor două corpuri. Pentru simplificare vom alege ca *origine a timpului,* timpul t_0 şi vom nota cu x *spaţiul comun* străbătut de cele două corpuri într'un timp t şi cu T *tensiunea în fir.*

Ecuaţiile mişcării vor fi:

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} = m_1 g - \mathrm{T} - \lambda^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad ; \quad m_2 \frac{d^2 x}{dt^2} = m_2 g + \mathrm{T} - \lambda^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad (9)$$

Eliminând pe $\frac{d^2 x}{dt^2}$ între aceste ecuaţii, obţinem:

$$\mathrm{T} = \lambda^2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \lambda^2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v^2 \qquad (10)$$

Adunând relaţiile (9) avem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{2\lambda^2}{m_1 + m_2} \cdot v^2. \qquad (11)$$

adică o ecuaţie diferenţială de acelaşi tip cu (1) care se rezolvă identic, singura deosebire fiind aceia a condiţiilor iniţiale.

Notând $m = \frac{m_1 + m_2}{2}$ obţinem:

$$t = \frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{m}{g}} \log\left[\frac{\sqrt{mg} + \lambda v}{\sqrt{mg} - \lambda v} \cdot \frac{\sqrt{mg} - \lambda v_0}{\sqrt{mg} + \lambda v_0}\right]. \qquad (12)$$

De unde:

$$v = \frac{\sqrt{mg}}{\lambda} \cdot \frac{(\sqrt{mg} + \lambda v_0)\, e^{\lambda t\sqrt{\frac{g}{m}}} - (\sqrt{mg} - \lambda v_0)\, e^{-\lambda t\sqrt{\frac{g}{m}}}}{(\sqrt{mg} + \lambda v_0)\, e^{\lambda t\sqrt{\frac{g}{m}}} + (\sqrt{mg} - \lambda v_0)\, e^{-\lambda t\sqrt{\frac{g}{m}}}}. \qquad (13)$$

Integrând încă odată şi ţinând seama că pentru $t = 0$, $x = 0$:

$$x = \frac{m}{\lambda^2} \log\left[\frac{(\sqrt{mg} + \lambda v_0)\, e^{\lambda t\sqrt{\frac{g}{m}}} + (\sqrt{mg} - \lambda v_0)\, e^{-\lambda t\sqrt{\frac{g}{m}}}}{2\sqrt{mg}}\right]. \qquad (14)$$

Mişcarea ne este acum *cunoscută*. Pentru determinarea timpului t_1 necesar ca cele două corpuri să străbată *distanţa comună dela întinderea firului şi până ce corpul de massă* m_1 *atinge pământul*, vom face în (14):

$$x = h - x_1 = h - x_2 - l.$$

Se obţine astfel o ecuaţie transcendentă care rezolvată ne dă pe t_1.

Odată t_1 cunoscut, îl introducem în (13) pentru *determinarea vitezei* V cu care sistemul celor două corpuri *izbesc pământul*.

Tensiunea în fir la acest moment va fi:

$$T_1 = \lambda^2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot V^2. \qquad (15)$$

D-l Emil I. Constantinescu termină problema cu o frumoasă discuţie pe care o rezumăm mai jos:

In timpul t_0 când cele două corpuri cad ***separat***, vitezele lor v_1 şi v_2, ***cresc necontenit către valorile limită:***

$$v_1 = \frac{\sqrt{m_1 g}}{\lambda} \quad \text{şi} \quad v_2 = \frac{\sqrt{m_2 g}}{\lambda} \qquad v_1 > v_2.$$

Dacă t_0 este *suficient* de mare, se va putea presupune că cele două corpuri cad cu *mișcări uniforme*, dar *cu viteze diferite* până la *întinderea firului.*

După întinderea firului *viteza* v *comună* acum a celor două corpuri tinde către *limită:*

$$v = \frac{\sqrt{mg}}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2} \cdot g}}{\lambda}$$

când t_1 crește și anume prin valori *crescătoare* ale lui v în cazul $v_0 < \frac{\sqrt{mg}}{\lambda}$ și prin valori *descrescătoare* în cazul $v_0 > \frac{\sqrt{mg}}{\gamma}$.

Pentru $v_0 = \frac{\sqrt{mg}}{\lambda}$, căderea comună a celor două corpuri se face cu *viteza constantă* v_0 iar *tensiunea în fir rămâne constantă în timpul* t_1 *al acestei căderi.*

Observații. Soluția problemei se poate generaliza considerând λ *diferit* pentru cele două corpuri și anume λ_1 pentru corpul de masă m_1 și λ_2 pentru corpul de massă m_2, ceeace s'ar părea că a fost în intenția propunătorului problemei deoarece consideră cele două corpuri de *forme* diferite.

Prin aceasta, în mișcarea corpului de massă m_1, se modifică rezolvarea ecuației (1) înlocuind în (1), (2), (3) și (4) pe λ cu λ_1.

In mișcarea corpului de massă m_2, va trebui ca în (1), (2), (3) și (4) să înlocuim valorile m_1, x_1, v_1 și λ prin m_2, x_2, v_2 și λ_2.

Ecuația (5) devine:

$$l = \frac{m_1}{\lambda_1^2} \log \cos h \left(\lambda_1 t \sqrt{\frac{g}{m_1}}\right) - \frac{m_2}{\lambda_2^2} \log \cos h \left(\lambda_2 t \sqrt{\frac{g}{m_2}}\right). \qquad (16)$$

Presupunând că timpul t_0 — solutie a ecuației (16) — este suficient de mare, putem lua:

$$\log \cos h \left(\lambda_1 t \sqrt{\frac{g}{m_1}}\right) \quad \lambda_1 t \sqrt{\frac{g}{m_1}} - \log 2$$

$$\log \cos h \left(\lambda_2 t \sqrt{\frac{g}{m_2}}\right) \cong \lambda_2 t \sqrt{\frac{g}{m_2}} - \log 2$$

iar:

$$t_0 = \frac{l + \left(\frac{m_1}{\lambda_1^2} - \frac{m_2}{\lambda_2^2}\right) \log 2}{\frac{\sqrt{m_1 g}}{\lambda_1} - \frac{\sqrt{m_2 g}}{\lambda_2}}. \qquad (17)$$

Se modifică deasemenea și ecuațiile (9). Pentru tensiunea în fir, în locul formulei (10), se obține formula:

$$T = \frac{m_1 \lambda_2^2 - m_2 \lambda_1^2}{m_1 + m_2} \cdot v^2. \qquad (18)$$

iar ecuația (11) devine:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{m_1 + m_2} \cdot v^2.$$

Rezultatele (12), (13) şi (14) desigur se menţin dacă luăm:

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2} \quad \text{şi} \quad \lambda = \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2}}.$$

Viteza V limită de izbire a solului în căderea comună a celor două corpuri va fi pentru un timp t, suficient de mare:

$$V = \frac{\sqrt{mg}}{\lambda} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)\, g}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \tag{19}$$

iar din (18) tensiunea în fir corespunzătoare:

$$T = \frac{m_1 \lambda_2^2 - m_2 \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \cdot g. \tag{20}$$

Problema poate fi continuată prin obţinerea de alte noui rezultate precum şi prin discuţia ce se aplică acestor rezultate.

Din lipsă de spaţiu ne oprim aici.

S'a mai primit o soluţie bună dela d-l I. KINSKY (Timişoara).

Terminăm problema felicitând pe d-l EMIL I. CONSTANTINESCU pentru admirabila sa soluţie şi pentru întemeiatele sale cunoştinţe de mecanică şi regretând că redijarea soluţiei problemei nu a putut fi făcută de regretatul autor al problemei C-DOR I. LINTEŞ a cărui amintire rămâne neştearsă pentru noi.

AL. ST.

PROBLEMA 6359. *Dacă* u, v, w *sunt trei unghiuri oarecare, atunci*

$$1 + \cos u \cos v + \cos v \cos w + \cos w \cos u \geqslant 0.$$

In ce caz, avem egalitate? Să se deducă, de aci, că egalitatea nu poate avea loc când u, v, w *sunt unghiurile unui triunghiu.*

M. GHERMĂNESCU.

Putem scrie succesiv, notând expresia cu E,

$$E = 1 + \Sigma \cos u \cos w = 1 + \cos v \cos w + \cos u (\cos v + \cos w)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}[\cos(v+w) + \cos(v-w)] + 2\cos u \cos\frac{v+w}{2}\cos\frac{v-w}{2}$$

$$= \cos^2\frac{v+w}{2} + \cos^2\frac{v-w}{2} + 2\cos u \cos\frac{v+w}{2}\cos\frac{v-w}{2}$$

sau încă

$$E = \left(\cos\frac{v+w}{2} + \cos u \cos\frac{v-w}{2}\right)^2 + \sin^2 u \cos^2\frac{v-w}{2} \geqslant 0,$$

neegalitate evidentă, căci E este o sumă de două patrate reale.

Se vede că $E = 0$ când

$$\cos\frac{v+w}{2} + \cos u \cos\frac{v-w}{2} = 0 \quad , \quad \sin u \cos\frac{v-w}{2} = 0,$$

care au loc când $\cos\frac{v-w}{2} = 0$, deci $\cos\frac{v+w}{2} = 0$, din care se deduce

$v = (k + k' + 1)\pi$, $w = (k - k')\pi$, $u =$ arbitrar, sau când

$\sin u = 0$, $u = k\pi$, $\cos\frac{v+w}{2} \pm \cos\frac{v-w}{2} = 0$, deci

$$\cos\frac{v}{2}\cos\frac{w}{2} = 0 \quad \text{sau} \quad \sin\frac{v}{2}\sin\frac{w}{2} = 0,$$

ce conduc la $v = 2k\pi + \pi$, $w =$ arbitrar, sau $v = 2k\pi$, w arbitrar şi viceversa. Se vede uşor că u, v, w nu pot fi unghiurile unui triunghiu.

Notă. 1°. La această problemă s'au primit câteva încercări de soluţie, mai mult sau mai puţin fanteziste. Singuri d-nii: E. VIŞA şi VIRGIL G. CONSTANTINESCU au obţinut relaţia.

$$E = \cos^2\frac{v+w}{2} + \cos^2\frac{v-w}{2} + 2\cos u \cos\frac{v+w}{2}\cos\frac{v-w}{2}$$

dar, de aci, drumurile sunt divergente; d. E. VIŞA, fără a arăta că $E > 0$, a găsit cazurile când $E = 0$, punând expresia sub forma

$$E = x^2 + 2zxy + y^2.$$

Era foarte uşor să se observe că E este o formă patratică cu două variabile x, y, pentru a obţine

$$E = (x + yz)^2 + (1 - z^2)y^2 \quad , \quad 1 - z^2 > 0.$$

2°. Problema propusă îşi are inspiraţia în problema 2575, mai precis, în o notă a d-lui G. D. SIMIONESCU (G. M., XLVII, p. 557) în care arată că egalitatea

$$\cos A \cos B \cos C = \cos(B - C)\cos(C - A)\cos(A - B)$$

este imposibilă dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu; identitatea.

$$1 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 4(-1)^k \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$$

unde $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$, o transformă uşor în aceia care formează obiectul problemei 6359, luând $u = B + C - A$, $v = C + A - B$, $w = A + B - C$, astfel că problema de faţă dă o nouă demonstraţie rezultatului d-lui G. D. SIMIONESCU.

M. G.

EXERCIŢII

24. *Dacă se notează*

$$A = \frac{\cos x}{1 \pm \sin x} \quad \text{şi} \quad B = \frac{\sin x}{1 \pm \cos x}$$

atunci

$$(A-A^{-1})\ (B-B^{-1}) = 4 \quad ; \quad (A-A^{-1}) : (B-B^{-1}) = \operatorname{tg}^2 x$$

$$(A+A^{-1})\ (B+B^{-1}) = 8 \operatorname{cosec} 2x \quad ; \quad (A+A^{-1}) : (B+B^{-1}) = \operatorname{tg} x$$

$$(A-A^{-1}) : (A+A^{-1}) = \pm \sin x \quad ; \quad (B-B^{-1}) : (B+B^{-1}) = \pm \cos x$$

$$(A+A^{-1}) : (B-B^{-1}) = \pm 4 \operatorname{cosec} x \quad ; \quad (A-A^{-1}) : (B+B^{-1}) = \pm \sec x$$

C. IONESCU-ŢIU.

R. Avem

$$A - A^{-1} = \frac{\cos^2 x - 1 - \sin^2 x \pm 2 \sin x}{(1 \pm \sin x) \cos x} = \frac{\mp 1 (1 \pm \sin x) \sin x}{(1 \pm \sin x) \cos x} = \mp 2 \operatorname{tg} x$$

$$A + A^{-1} = \frac{\cos^2 + 1 + \sin^2 x \pm 2 \sin x}{(1 \pm \sin x)\ \cos x} = \frac{2}{\sin x}$$

$$B - B^{-1} = \mp 2 \operatorname{cotg} x \quad ; \quad B + B^{-1} = \frac{2}{\sin x}$$

de unde rezultă uşor relaţiile din enunţ.

PROBLEME PROPUSE

6461. Să se găsească un patrat perfect de şase cifre, format din trei grupe de câte două cifre egale.

G-L GH. BUICLIU.

6462. Considerăm pe o sferă punctele A, B, E şi simetricile lor C, D, F faţă de un diametru al sferei. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor EAB, ECD, FAD şi FBC au un punct comun.

RĂDUCANU GEORGESCU.

6463. Dacă seria cu termenul general $u_n > 0$ este divergentă, atunci seria cu termen general

$$\frac{u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}}{u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n+1}}$$

este deasemenea divergentă, p fiind un număr finit.

N. GAIU.

6464. Se dau relaţiunile:

$$\alpha^2+\beta^2=a^2 \quad , \quad A\alpha+B\beta=a^2 \quad , \quad \lambda^2+\mu^2=a^2 \quad , \quad A\lambda+B\mu=a^2,$$

$$(\alpha-\lambda)^2+(\beta-\mu)^2=4b^2 \quad , \quad b<a.$$

Se cere să se elimine $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ fără să se opereze nici un fel de calcul asupra relaţiunilor date.

ING. ALEXANDRU ARVANITI.

6465. Să se arate că suprafaţa unui triunghiu este dată de una din relaţiile

$$S^2=2\cdot\frac{\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(A-C)}{\operatorname{cotg}^2 A\ \operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}^2 B\ \operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}^2 C\ \operatorname{cotg}\gamma}\cdot R^4$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(A-B)\ \sin(B-C)\ \sin(C-A)}{\operatorname{cotg}^3\alpha+\operatorname{cotg}^3\beta+\operatorname{cotg}^3\gamma}\cdot R^4,$$

unde α, β, γ sunt unghiurile medianelor cu laturile, luate într'un acelaşi sens de rotaţie.

PETRE P. TEODORESCU.

6466. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin intersecţia dreptelor

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad , \quad A_2x+B_2y+C_2=0$$

şi prin intersecţia dreptelor

$$A_3x+B_3y+C_3=0 \quad , \quad A_4x+B_4y+C_4=0.$$

Să se deducă de aci că dacă considerăm tabloul

$$\left\|\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{matrix}\right\|$$

atunci avem relaţiunea

$$A_1(A_2B_3C_4)-A_2(A_1B_3C_4)+A_3(A_1B_2C_4)-A_4(A_1B_2C_3)=0,$$

unde notaţia de forma $(\alpha\beta\gamma)$ reprezintă un determinant de ordinul III, cu indicarea termenilor din diagonala principală.

VIRGIL CLAUDIAN.

6467. Se consideră o hiperbolă echilateră (H) şi două puncte A şi B fixe din plan, dintre care unul este situat pe hiperbola (H). Un cerc (Γ), ce trece prin A şi B, mai tae hiperbola încă în trei puncte M, N, P. Cercul (Γ) variind, să se arate că cercurile lui EULER ale triunghiurilor MNP, astfel definite, au acelaşi ax radical.

ŞERBAN GHEORGHIU.

6468. Intr'o elipsă (E) se înscrie un paralelogram P, astfel încât tangentele la elipsă în vârfurile paralelogramului, determină un dreptunghiu D, înscris în cercul lui MONGE al elipsei.

1°. Să se afle înfăşurătoarea laturilor paralelogramului P şi locul geometric al vârfurilor paralelogramului format de tangentele la cercul lui MONGE al elipsei.

2°. Să se stabilească relaţia: $\sigma\Sigma = 8a^2b^2$, unde σ şi Σ sunt ariile paralelogramului P şi a dreptunghiului D, iar a şi b sunt lungimile semiaxelor elipsei (E).

ANDREI DOBRESCU.

6469. Fără a aplica teoria înfăşurătoarelor curbelor să se arate că dacă λ variază dreapta

$$10\lambda(y-\lambda) = (\lambda^2 - 16)(x-5),$$

rămâne tangentă unei elipse fixe raportată la axele sale de simetrie. Să se determine apoi elementele elipsei. Să se verifice, în fine, rezultatul, aplicând teoria înfăşurătoarelor.

M. GHERMĂNESCU.

6470. Să se afle locul geometric al punctului P, care este în echilibru sub acţiunea a două forţe egale şi constante ce trec prin două puncte date, şi a unei a treia forţă a cărei direcţie face un unghiu constant cu o dreaptă dată. Discuţie.

AURELIAN I. STAN.

ERATĂ. 1°. Ecuaţia din enunţul exerciţiului 11, publicat la pag. 120 din acest volum se înlocueşte prin

$$a^4c^4x^4 + 8a^3c^3x^3 + a^2c^2(24-ca)x^2 + 4c(8-c^2)x - c^4 - 4c^2 + 16 = 0$$

$$\therefore \quad \left(ax+\frac{2}{c}\right)^4 - \left(ax+\frac{2}{c}\right)^2 - 1 = 0.$$

2°. Erata de la pag. 288 se anulează.

3°. La numărătorul problemei 6458 se înlocueşte t^2 prin t^3.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Atanasiu C. Mihail-Luciliu (6445, E, P); *Ciurescu N. P.* (5871, 939, 42, 6296, 394, 411, 6, 38, 46); *Constantinescu R. M.* (6398, 9, 422, 46, 50, N); *Ionescu-Bujor Claudiu* (5129); *Marinescu E. Em.* (N, P); *Neguţ A. I.* (E, P); *Pantea N. Al.* (4909, 6416, 45, E); *Păunescu St. Gh.* (6411); *Petcu Al. Valeriu* (4634, 5129, 593, 5, 643, 70, 861, 907, 66, 80, 92, 6005, 36, 120, 230, 61, 346, 61, 422, P); *Pisanca N. I.* (6350, 78, E); *Popa Pavel* (6350, 4); *Popescu I. Gh.* G-l (A, P); *Silaş Gh.* (N); *Soare V. M.* (6338, 50, 88, 424, 6, 9, 41, 58, E, P); *Teodorescu P. P.* (6273, 351, 96, 405, 11, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 2, 4, 9, 41, 53, E).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *« Gazeta Matematică »*.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ"

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate, cu preţul de 800 lei volumul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ"

Vol. I—III, V—X, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia a III-a. Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 300

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 150

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 180

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc* Lei 500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor* Lei 250

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . Lei 100

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.500

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE"

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . Lei 320

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . Lei 400

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . Lei 200

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 100

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* Lei 250

PENTRU BIBLIOTECI ŞI AUTORITĂŢI TOATE PREŢURILE SE TRIPLEAZĂ

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Costul abonamentului este de Lei 800

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII" al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1947 la 1 Iunie 1948 inclusiv. Costul abonamentului este de. . . . . Lei 360

Abonamentele se pot plăti la cont CEC Nr. 26220 sau se pot trimite unde se trimite şi corespondenţa, pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 11.452.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIII

NUMĂRUL 9. — MAI 1948

SUMARUL

1. Despre poligoanele armonice . . . . *V. Thébault.*
2. Raport pentru premiul de algebră „A. Gh. Ioachimescu" . . . . . *Prof. Th. Angheluță, Prof. N. Ciorănescu, N. Georgescu Roegen.*
3. Note matematice: 25—28.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 2247, 4350, 5177, 5933, 6258, 6327.
9. Exerciții: 25—27.
10. Probleme propuse: 6471—6480.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1948

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie compusă în prezent din d-nii: **N. Georgescu-Roegen,** Licenţiat în Matematici; **C. C. Teodorescu,** Inginer, Profesor la Politehnica Bucureşti; **Al. D. Bunescu,** Inginer (Casier).

Şedinţele următoare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Marţi 25 Mai ora 18: Adunarea materiei pentru Nr. 10 şi semnarea diplomelor pentru concurs.

Marţi 8 Iunie ora 18: Facerea copertei Nr. 10, semnarea diplomelor şi alegerea cărţilor premii pentru concursul *Gazeta Matematică.*

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1947 sunt indicate în tabla de materii a volumului LII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 6391, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 400, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 50, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 60, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 80.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *«Gazeta Matematică»* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . . „ 150
— **Medalia comemorativă,** bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *«Gazetei Matematice»* . . . . . „ 500

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIII

NUMĂRUL 9. — MAI 1948

SUMARUL

1. Despre poligoanele armonice . . . . *V. Thébault.*
2. Raport pentru premiul de algebră „A. Gh. Ioachimescu" . . . . . *Prof. Th. Angheluță, Prof. N. Ciorănescu, N. Georgescu Roegen.*
3. Note matematice: 25—28.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 2247, 4350, 5177, 5933, 6258, 6327.
9. Exerciții: 25—27.
10. Probleme propuse: 6471—6480.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALA
1948

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie compusă în prezent din d-nii: **N. Georgescu-Roegen,** Licenţiat în Matematici; **C. C. Teodorescu,** Inginer, Profesor la Politehnica Bucureşti; **Al. D. Bunescu,** Inginer (Casier).

Şedinţele următoare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Marţi 25 Mai ora 18: Adunarea materiei pentru Nr. 10 şi semnarea diplomelor pentru concurs.

Marţi 8 Iunie ora 18: Facerea copertei Nr. 10, semnarea diplomelor şi alegerea cărţilor premii pentru concursul *Gazeta Matematică*.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1947 sunt indicate în tabla de materii a volumului LII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 6391, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 400, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 50, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 60, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 80.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *«Gazeta Matematică»* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . . „ 150
— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *«Gazetei Matematice»* . . . . . „ 500

DESPRE POLIGOANELE ARMONICE

(Urmare dela pag. 321)

Teorema IV. *O transversală dusă prin centrul simedian* K, *taie laturile poligonului în punctele* $R_1, R_2, \ldots, R_n$. *Locul geometric al unui punct* P *luat pe această transversală aşa în cât*

$$\frac{1}{KR_1}+\frac{1}{KR_2}+\ldots+\frac{1}{KR_n}=\frac{n}{KP}$$

este polara lui K *faţă de cercul circumscris poligonului.*

Fie α polul coardei simediane A_0A_0'. Ducem dreapta $K\alpha$. Este uşor de văzut că α este o poziţie a lui P. Dacă *n* este pereche, laturile poligonului pot fi aranjate câte două, aşa în cât punctele K şi α să fie conjugatele armonice ale punctelor de intersecţie ale fiecărui grup de 2 laturi cu dreapta $K\alpha$. Deci

$$\frac{1}{KR_1}+\frac{1}{KR_2}=\frac{2}{K\alpha}\ ;\quad \frac{1}{KR_2}+\frac{1}{KR_{n-1}}=\frac{2}{K\alpha};\ldots$$

Dacă *n* este nepereche, segmentul interceptat de una din laturi pe $K\alpha$ este egal cu $K\alpha$. Deci, în fiecare caz, suma inverselor segmentelor determinate de toate laturile pe $K\alpha$ este egal cu $\frac{n}{K\alpha}$. Deci α este un punct al locului lui P, loc care este o dreaptă după cum se poate demonstra, şi anume dreapta care trece prin polii tuturor simedianelor.

Corolare. 1°. *Punctul* K *şi polara sa, sunt polul şi polara armonică în raport cu poligonul. Punctul* K *şi polara sa armonică se numesc punctul şi dreapta lui* LEMOINE *a poligonului.*

2°. *Dacă un poligon armonic este transformat prin polare reciproce în raport cu un cerc cu centrul în punctul lui* LEMOINE, *polul dreptei lui* LEMOINE *este centrul mediilor armonice ale vâfurilor poligonului reciproc.*

Teorema V. *Dacă a, b, c... şi* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *sunt lungimile laturilor unui poligon armonic şi distanţele unui punct* P *de pe dreapta lui* LEMOINE *la ele atunci*

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots=0$$

Fie R_1, R_2,... intersecţiile laturilor cu dreapta KP. Avem

$$\left(\frac{1}{KR_1}-\frac{1}{KP}\right)+\left(\frac{1}{KR_2}-\frac{1}{KP}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{KR_n}-\frac{1}{KP}\right)=0$$

$$\therefore \qquad \frac{PR_1}{KR_1}+\frac{PR_2}{KR_2}+\ldots+\frac{PR_n}{KR_n}=0.$$

Dacă α', β', γ'... sunt distanţele lui K la laturile poligonului, avem

$$\frac{PR_1}{KR_1}=\frac{\alpha}{\alpha'}\ ,\ \frac{PR_2}{KR_2}=\frac{\beta}{\beta'},\ldots\ \therefore\ \frac{\alpha}{\alpha'}+\frac{\beta}{\beta'}+\frac{\gamma}{\gamma'}\ldots=0.$$

Dar α', β', γ'... sunt proporţionale cu a, b, c... deci teorema este demonstrată.

Teorema VI. *Dacă p_1, p_2,... p_n, π sunt distanţele vârfurilor şi punctului lui* LEMOINE *a unui poligon armonic la dreapta lui* LEMOINE *a poligonului, atunci*

$$\sum\frac{1}{p}=\frac{n}{\pi}\cdot$$

Fie LL' dreapta lui LEMOINE. Punctele O, S', K, S formând un sistem armonic, avem

$$\frac{1}{OK}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{OS'}+\frac{1}{OS}\right)\cdot$$

Pe de altă parte

$$OK\,.\,OQ=OS'\,.\,OS=R^2\ \ \therefore\ \ OQ=\frac{OS+OS'}{2}$$

aşa că Q este mijlocul lui SS'.

Punctele S, A, V, A' formează o diviziune armonică cu U în mijlocul lui SV. Deci

$$\overline{UV}^2=UA\,.\,UA'\ \ \therefore\ \ \overline{VR}^2=AL\,.\,A'L'.$$

Dar diviziunea armonică O, S', K, S cu Q în mijlocul lui SS', dă

$$\overline{QS'}^2=QK\,.\,QO$$

şi cum $VR=S'Q$, $QK\,.\,QO=AL\,.\,A'L'$

ceea ce revine la

$$\pi\,.\,OQ=p_1\,A'L'\quad\text{sau}\quad\frac{L'A'}{\pi}=\frac{OQ}{p_1}\cdot$$

Făcând suma tuturor relaţiunilor analoage cu aceasta şi observând că

$$n \cdot OQ = \Sigma A'L' \quad \text{rezultă} \quad \Sigma \frac{1}{p} = \frac{n}{\pi}.$$

Teorema VII. *Dacă o transversală dusă prin centrul simedian* K *taie laturile unui poligon armonic de* n *laturi în punctele* $R_1, R_2, \ldots, R_n$ *şi cercul circumscris în* P, *avem*

$$\frac{1}{R_1P} + \frac{1}{R_2P} + \ldots + \frac{1}{R_nP} = \frac{n}{KP}.$$

Fie $a, b, c, \ldots$ lungimile laturilor; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ distanţele lui P la ele şi $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ distanţele lui K la aceleaşi laturi. Avem întâi

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} + \ldots = 0.$$

Dar $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ sunt proporţionale cu $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ deci

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} + \frac{\gamma'}{\gamma} + \ldots = 0.$$

De altfel

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{R_1K}{R_1P} = 1 - \frac{KP}{R_1P}; \quad \frac{\beta'}{\beta} = \ldots$$

$$\therefore n - \frac{KP}{R_1P} - \frac{KP}{R_2P} - \ldots - \frac{KP}{R_nP} = 0; \quad \frac{1}{R_1P} + \frac{1}{R_2P} + \ldots + \frac{1}{R_nP} = \frac{n}{KP}.$$

Teorema VIII. *Prin centrul simedian* K *al unui poligon armonic se duce o paralelă la tangenta la cercul circumscris, în unul din vârfurile poligonului. Segmentul de pe această paralelă, cuprins între* K *şi una sau alta din laturile vârfului considerat, este constant.*

Fie latura AB, tangenta AT în A şi U intersecţia lui AB cu paralela din K la AT. Notăm cu X proiecţia lui K pe AB şi cu A' intersecţia cercului circumscris cu AK. Pe o figură avem

$$\frac{KX}{KU} = \sin AUK = \sin UAT = \sin AA'B = \frac{AB}{2R}$$

$$\therefore \quad \frac{KU}{R} = \frac{2KX}{AB} = \operatorname{tg} w \quad \text{şi deci} \quad KU = R \operatorname{tg} w = C^t$$

Corolare. 1°. *Dacă poligonul are* n *laturi vor fi 2n puncte corespunzătoare lui* U. *Aceste puncte sunt pe un cerc, care se numeşte al doilea cerc al lui* LEMOINE *sau cercul cosinusurilor.*

2°. *Fie* w' *unghiul lui* BROCARD *al poligonului armonic a cărui latură este* A'B'. *Avem*

$$\operatorname{tg} w \cdot \operatorname{tg} w' = \frac{AK \cdot A'K}{R^2}.$$

Dacă KV este paralelă la AT, este uşor de văzut că triunghiurile AKV, VKA' au unghiurile egale. Deci

$$KU \cdot KV = KA \cdot KA' \quad \therefore \quad R^2 \operatorname{tg} w \operatorname{tg} w' = KA \cdot KA'.$$

Teorema IX. *Dacă simedianele* KA, KB, ... *ale unui poligon armonic sunt împărţite într'un raport dat de punctele* A", B", ... *şi dacă prin aceste puncte se duc paralele la tangente în vârful poligonului, punctele de intersecţie ale acestor paralele cu cele două laturi care trec prin vârful corespunzător sunt conciclice şi luate alternativ, formează vârfurile a două poligoane armonice.*

Fie U, U' intersecţiile laturei AB cu paralelele duse din A", K la tangenta AT la cercul O şi O' intersecţia lui OK cu paralela din A" la OA. Triunghiul O'A"U fiind dreptunghic în A" dă

$$\overline{O'U}^2 = \overline{O'A''}^2 + \overline{A''U}^2.$$

Dar

$$\frac{A''K}{A''A} = \frac{l}{m} \; ; \quad \frac{O'A''}{OA} = \frac{O'A''}{R} = \frac{A''K}{AK} \quad \therefore \quad O'A'' = \frac{lR}{l+m}$$

şi

$$A''U = \frac{m\,KU}{l+m} = \frac{m\,R \operatorname{tg} w}{l+m}$$

$$\therefore \qquad (l+m)^2 \overline{O'U}^2 = R^2 (l^2 + m^2 \operatorname{tg}^2 w)$$

deci O'U este constant.

Dacă B"V este paralelă la tangenta în B, triunghiul O'B"V este evident egal cu O'A"V, deci

$$\sphericalangle UO'V = \sphericalangle AOB$$

şi toate punctele U, V, ... sunt vârfurile unui poligon armonic asemeni cu poligonul AB ...

Este evident că plecând din A în sens invers se obţine un alt poligon armonic.

Corolare. 1°. *Segmentul determinat pe* AB *de cercul* (O') *are valoarea*

$$2R\frac{l\sin A - m\cos A\,\mathrm{tg}w}{l+m}$$

A *fiind unghiul pe care-l face* AB *cu tangenta* AT *la cerc.*

Perpendicularele din O şi K pe AB sunt egale respectiv cu R cosA, R sinA tg$w$. Pe de altă parte O' împarte pe OK în raportul $\frac{m}{l}$, deci distanţa p dela O' la AB este dată de

$$p = \frac{R(l\cos A + m\sin A\,\mathrm{tg}w)}{l+m}.$$

Scăzând p^2 din patratul razei cercului (O') avem

$$\frac{R^2(l\sin A - m\cos A\,\mathrm{tg}w)^2}{(l+m)^2}$$

de unde se deduce că valoarea segmentului considerat este cea din enunţul corolarului.

2°. Dând diverse valori raportului $\frac{l}{m}$ se obţin câte-va rezultate interesante.

a) $l = 0$. Se obţin segmente proporţionale cu cosA, cosB,... In acest caz cercul (O') se numeşte al doilea cerc al lui LEMOINE.

b) Dacă $l = m$, O' este mijlocul lui OK şi cercul (O') este concentric cu cercul lui BROCARD. Acest cerc se numeşte primul cerc al lui LEMOINE, diametrul acestui cerc este egal cu R sec$w$, iar segmentele pe care el le interceptează pe laturi sunt proporţionale cu $\sin(A - w)$, $\sin(B - w)$,...

c) Dacă $l = m\,\mathrm{tg}w$, segmentele precedente sunt proporţionale cu $\sin\left(A - \frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(B - \frac{\pi}{4}\right)$, iar raza cercului este

$$R\sin w\,\mathrm{cosec}\left(\frac{\pi}{4} + w\right).$$

d) Dacă $l = m\,\mathrm{tg}^2 w$, *centrul cercului este la mijlocul distanţei* $\Omega\Omega'$ *a punctelor lui* BROCARD, *raza este egală cu* R sin$w$, *iar segmentele sunt proporţionale cu* $\cos(A + w)$, $\cos(B + w)$,...

e) Dacă poligonul se reduce la un triunghiu şi dacă

$$\frac{l}{m} = \frac{-\cos A \cos B \cos C}{1 + \cos A \cos B \cos C} = \frac{-\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C}{\operatorname{cotg} w}$$

segmèntele considerate sunt respectiv egale cu $R \sin 2A \cos (B-C)$, $R \sin 2B \cos (C - A)$, $R \sin 2C \cos (A - B)$.

Distanţele centrului cercului O' *la laturi sunt proporţionale cu* $\cos^2 A \cos B \cos C - \sin^2 A \sin B \sin C, \ldots$ ceea ce este cazul cercului lui TAYLOR.

f) Un cerc TUCKER *al triunghiului* ABC *este un cerc* TAYLOR *al unui alt triunghiu* A'B'C' *care are acelaşi cerc circumscris şi acelaşi punct al lui* LEMOINE.

Cercul lui TUCKER al triunghiului ABC fiind dat, raportul $\frac{l}{m}$ este dat; toate triunghiurile înscrise în cercul ABC şi având pe K punct al lui LEMOINE au acelaşi unghiu al lui BROCARD. Din relaţiile

$$\Sigma \operatorname{cotg} A' = \operatorname{cotg} w \quad , \quad \Sigma \operatorname{cotg} A' \operatorname{cotg} B' = 1,$$

$$l \operatorname{cotg} w + m \operatorname{cotg} A' \operatorname{cotg} B' \operatorname{cotg} C' = 0$$

se deduce, notând $\operatorname{cotg} A'$ cu x, ecuaţia

$$x^3 - \operatorname{cotg} w x^2 + x + \frac{l}{m} \operatorname{cotg} w = 0$$

ale cărei rădăcini sunt cotangentele unghiurilor triunghiului căutat.

Teorema X. *Fie* ABC..., A'B'C'... *două poligoane armonice omotetice având centrul de omotetie în* K. *Dacă perechile de laturi consecutive ale lui* A'B'C'..., *prelungite dacă e nevoie, întâlnesc perechile corespunzătoare ale lui* ABC... *în perechile de puncte* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$,..., *atunci punctele* α, α', β, β', γ, γ',... *sunt conciclice.*

Figura $\beta B \beta' B'$ este un paralelogram şi dreptele BB', $\beta\beta'$ se taie în mijlocul lor B"; de oarece raportul KB : KB" este dat şi $\beta\beta'$ trece prin B" rezultă că BB' este paralelă cu tangenta în B. Deci teorema e demonstrată.

Corolare. 1°. *Dacă poligoanele armonice ale teoremei precedente sunt patrulatere, cercurile circumscrise lor şi octogonului* $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'\delta\delta'$ *sunt coaxiale.*

Este uşor de văzut că patratele tangentelor duse din B la cercurile circumscrise la A'B'C'D' şi $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'\delta\delta'$ sunt în aceleaşi raport ½ ca şi patratele tangentelor duse din C, D, A la aceleaşi cercuri.

2°. *Dacă cele două poligoane ale aceleiaşi teoreme au un număr pereche de laturi, cele* n *puncte de intersecţie ale laturilor primului poligon, cu laturile poligonului al doilea, sunt colineare.*

Pentru simplificare, presupunem cazul patrulaterelor. Fie P intersecţia lui AB cu C'D'. Avem

$$\sphericalangle ABE = \sphericalangle AC'D'$$

deci ABC'D' este un patrulater inscriptibil şi P este pe axa radicală a cercurilor circonscrise.

Teorema XI. *In orice poligon armonic de* n *laturi, perpendicularele din centrul cercului circumscris pe laturi, întâlnesc cercul circumscris în* n *puncte astfel în cât cele* n *drepte care le unesc cu extremităţile laturilor corespunzătoare, concură,* n *câte* n, *în două puncte fixe* Ω, Ω' *pe circonferinţă, puncte numite punctele lui* BROCARD *ale poligonului.*

Cele *n* puncte L, M, N,.,. în care perpendicularele taie cercul lui BROCARD se numesc *puncte invariabile.* Proiecţiile lui O pe simedianele AK, BK,... sunt *punctele duble ale poligonului.*

Corolar. *Cele* n *linii care unesc respectiv punctele duble* L, M, N,..,, *cu* n *puncte corespunzătoare ale figurei direct asemeni construită pe laturile poligonului armonic, concură într'un punct pe cercul lui* BROCARD *al poligonului.*

Teorema XII. *Centrele de similitudine ale perechilor de laturi consecutive ale unui poligon armonic, sunt vârfurile unui poligon armonic.* (TARRY).

Fie S un centru de asemănare şi M intersecţia lui AK cu cercul lui BROCARD. Acelaşi cerc este întâlnit în N de MS. Notăm cu A' intersecţia cercului circumscris, cu AS. Polara PQ a lui S trece prin intersecţia lui MK cu ON şi pentrucă PS şi AA', SS' şi KO se divid armonic, fascicolele Q(SKS'O), Q(SAPA') au acelaşi raport anarmonic; dar aceste fascicole au 3 raze comune QS, QA, QP, deci razele QO şi QA' coincid şi punctele Q, O, A' sunt colineare. In plus, A' fiind inversul lui A faţă de O, este vârful unui poligon regulat înscris în O. Deci N este vârful unui

poligon regulat înscris în cercul lui BROCARD, iar M care este inversul lui N este vârf al unui poligon armonic. Dar M este mijlocul simedianei AM, deci el este centrul de similitudine a 2 laturi consecutive ce trec prin A.

Teorema XIII. *Orice poligon armonic* ABC... *este circonscriptibil unei elipse cu focarele în punctele lui* BROCARD. (Elipsa lui BROCARD).

Fie A', B', C', D',... inversele vârfurilor A, B, C,... față de un pol S, puterea fiind puterea lui S față de cercul O circonscris poligonului. Punctele A', B', C', D',... sunt a doua intersecție a cercului O cu SA, SB, SC,... Figurile $\varphi \equiv$ ABCD..., $\varphi' \equiv$ A'B'C'D'... au ca axă de omologie polara p a lui S. Două puncte sunt separate armonic de S și p. Vom zice că φ' este o *proiecție armonică* a lui φ.

Poligonul regulat A'B'C'D'... a cărui *proiecție armonică* este ABCD..., este circonscriptibil unei circonferințe; deci poligonul armonic ABCD... este circonscriptibil unei elipse.

Poziția focarelor decurge din considerațiile următoare. Se știe că proiecțiile ortogonale ale unui focar F al unei elipse pe tangente sunt situate pe cercul cu diametrul egal cu axa mare a elipsei. De aici se deduce că dacă proiectantele fac un unghiu constant w cu tangentele, locul proiecțiilor lui F este de asemeni o circonferență. Reciproc, dacă vârful unui unghiu constant se mișcă pe o circonferență, una din laturile unghiului mișcându-se în jurul unui punct fix din interior, a doua latură înfășoară o elipsă al cărei al douilea focar coincide cu punctul fix.

Teorema XIV. *Fie* O *centrul cercului circonscris unui poligon armonic de* n *laturi;* w *unghiul lui* BROCARD *și* S, S' *centrele de inversiune. Avem relațiunea*

$$\frac{OS}{OS'} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n} - w\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n} + w\right)}.$$

Fie R raza cercului circonscris, (O') cercul lui BROCARD, și K punctul lui LEMOINE. S și S' fiind punctele limită ale cercurilor (O), (O'), axa radicală QL trece prin mijlocul Q al lui SS'.

Această axă este figura inversă a lui (O') în raport cu (O), deci

$$OQ = \frac{R^2}{\delta}$$

δ fiind distanța OK. Deoarece S' este un punct limită

$$\overline{QS'}^2 = \overline{OQ}^2 - R^2 = \frac{R^2}{\delta^2}(R^2 - \delta^2).$$

Ținând seama de valoarea lui δ^2, dată la corolarul 1° al teoremei II, găsim

$$QS' = \frac{R^2}{\delta} \operatorname{tg} w \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n} = OQ \operatorname{tg} w \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}.$$

Apoi

$$OS = OQ + QS = OQ\left(1 + \operatorname{tg} w \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}\right), \quad OS' = OQ\left(1 - \operatorname{tg} w \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}\right)$$

de unde relația din enunț.

Teorema XV. Ω, Ω' *fiind punctele lui* BROCARD, *avem*

$$\sphericalangle S\Omega S' = \frac{2\pi}{n}.$$

Fie L punctul unde $O\Omega$ întâlnește axa radicală a cercurilor (O), (O'). Unghiul LOQ este egal cu w și avem

$$QL = OQ \operatorname{tg} w,$$

iar formula dela teorema precedentă dă

$$QS' = QL \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \quad \therefore \quad \sphericalangle QLS' = \frac{\pi}{n} \quad \text{și} \quad \sphericalangle SLS' = \frac{2\pi}{n}$$

QL și (O') fiind figuri inverse față de (O) și S, S' fiind puncte limită, avem

$$O\Omega \cdot OL = R^2 \quad , \quad OS \cdot OS' = R^2 \quad \therefore \quad O\Omega \cdot OL = OS \cdot OS'$$

punctele Ω, L, S. S' sunt deci conciclice și

$$\sphericalangle S\Omega S' = \sphericalangle SLS' = \frac{2\pi}{n}.$$

Corolare. 1°. *Unghiurile bazelor triunghiurilor isoscele* SΩΩ', S'ΩΩ *au valorile* $\frac{\pi}{n} + w$ *şi* $\frac{\pi}{n} - w$.

Fie M mijlocul lui ΩΩ'. Patrulaterul S'SLΩ fiind inscriptibil, se găseşte succesiv

$$\sphericalangle M\Omega S = \frac{\pi}{2} - MS\Omega = \frac{\pi}{2} - S'L\Omega = \frac{\pi}{2} - (\Omega LQ - SLQ)$$

$$= \sphericalangle \Omega OQ + \sphericalangle S'LQ = w + \frac{\pi}{n}$$

$$\sphericalangle M\Omega S' = \sphericalangle S'\Omega S - \sphericalangle M\Omega S = \frac{\pi}{n} - w.$$

2°. *Diferenţa unghiurilor dela vârfurile triunghiurilor isoscele* SΩΩ', S'ΩΩ' *este egală cu 4w:*

3°. *Avem*

$$\Omega\Omega' = 2R \sin w \sqrt{\cos^2 w - \sin^2 w \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}}.$$

4°. *Dacă* Z, Z' *sunt intersecţiile dreptelor* SΩ, SΩ' *cu cercul lui* BROCARD *avem*

$$\sphericalangle ZOZ' = \frac{2\pi}{n}.$$

In adevăr, dreptele ΩZ', Ω'Z se taie în S'; patrulaterul OZΩZ' fiind inscriptibil avem

$$\sphericalangle ZOZ' = \sphericalangle S\Omega S' = \frac{2\pi}{n}.$$

5°. *Pe aceeaşi figură avem*

$$\frac{S\Omega}{SZ} = \frac{\sin 2w}{\sin \frac{2\pi}{n}}$$

căci S'S fiind bisectoarea interioară a triunghiului ZS'Ω, avem

$$\frac{S\Omega}{SZ} = \frac{S'\Omega}{S'Z} = \frac{\sin S'Z\Omega}{\sin S'\Omega Z} = \frac{\sin \Omega O\Omega'}{\sin S'\Omega S}.$$

V. THÉBAULT.

RAPORT PENTRU PREMIUL DE ALGEBRĂ „A. GH. IOACHIMESCU"

In conformitate cu art. 2 și 3 din regulamentul său, acest premiu se decerne unui elev de liceu, pentru lucrările de Algebră, articole, note, probleme, publicate în ultimul volum.

Cercetând activitatea corespondenților elevi de liceu în Vol. LIII al *Gazetei Matematice* am constatat că niciunul din corespondenți nu îndeplinește condițiile, și nici chiar printre rezolvitorii de probleme de algebră, nu s'a relevat vreunul care să poată fi premiat.

In consecință, comisiunea este de părere și propune să nu se acorde anul acesta premiul de Algebră « A. G. IOACHIMESCU ».

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL DE ALGEBRĂ „A. G. IOACHIMESCU"

Prof. TH. ANGHELUȚĂ, Prof. N. CIORĂNESCU, N. GEORGESCU ROEGEN.

Acest raport a fost aprobat în ședința Adunării Generale din 17 Februarie 1948.

NOTE MATEMATICE

25. *O problemă de construcție.* In articolul cu acest titlu dela pag. 163 din acest volum, s'a demonstrat că dacă se iau pe laturile AB, AC ale unui triunghiu punctele P^+ și Q^+ astfel ca

$$\overline{BP^+} = \overline{Q^+C}$$

și dacă F^+, F^- sunt extremitățile diametrului [1] cercului ABC, perpendicular pe BC atunci *triunghiul* $P^+F^+Q^+$ respectiv $D^+F^+E^+$ *este isoscel și are unghiul din* F^+ *egal cu* A. *Triunghiul* $P^+F^+Q^+$ *rămâne deci asemeni cu el însuși.*

Bazat pe această proprietate, am afirmat în nota dela pag. 173 că *vârful* D^+ *descrie două drepte* Δ_1, Δ_2, ceia ce este *perfect adevărat* după cum am arătat desvoltat în nota de la pag. 269. *Nu este însă adevărată* afirmațiunea că punctul D^+, căutat în „*O problemă de construcție*" se găsește la intersecțiile laturei AB cu Δ_1 și Δ_2 și pentru această afirmație eronată fac *mea culpa.*

1) A se vedea figura de la pag. 164.

Adevărul este că pentru cazul particular $\sphericalangle F^+ = \sphericalangle A$ dreapta Δ_1 se confundă chiar cu AB, cum s'a afirmat la pag. 268 de autorul notei 17, iar Δ_2 cu simetrica lui AB față de perpendiculara din F^+ pe AC, cum rezultă din nota 18 de la pag. 269.

In plus condiția ca triunghiul $D^+F^+E^+$ să fie isoscel nu este *suficientă* pentru a determina punctul D^+ din „*O problemă de construcție*".

G-L GH. BUICLIU.

26. *Asupra problemei 6011.* In legătură cu articolul publicat la pag. 793—797 și nota 31, pag. 798, v. LI, relativ la această problemă, am de făcut următoarele precizări și observații:

1. Expresia întâlnită în soluția dată acestei probleme, la pag. 615, v. LI, nu tinde către zero pentru $x = \infty$, atât timp cât, pentru valori foarte mari ale lui x, poate lua și valori mai mari ca un număr dat α. Nu este vorba însă de o greșită aplicare a regulii lui L'HOPITAL, ci numai de folosirea unui rezultat greșit de calcul, în aplicarea acestei reguli, ceea ce este cu totul altceva.

2. Am arătat, înainte de apariția articolului citat, în Nota dela finele soluției acestei probleme (loc. cit. p. 616), în ce constă o greșită aplicare a regulii lui L'HOPITAL, fapt despre care acest articol nu face mențiune.

3. Afirmația dela pag. 793 a acelui articol, după care, pentru demonstrarea regulii lui L'HOPITAL trebue ca derivatele $u'(a)$, $v'(a)$ să existe, este inexactă: este necesar și suficient ca *raportul* acestor derivate să existe. In adevăr, dacă $u(a) = v(a) = 0$, putem scrie

$$\lim \frac{u(x)}{v(x)} = \lim \frac{u(a+h)}{v(a+h)} = \lim \frac{u(a+h)-u(a)}{v(a+h)-v(a)} = \lim \frac{\frac{u(a+h)-u(a)}{h}}{\frac{v(a+h)-v(a)}{h}}$$

și este posibil ca ultimul raport să aibă o limită determinată pentru $h = 0$ fără ca fiecare termen al acestui raport să aibă, separat câte una. De exemplu, dacă luăm

$$u = x + \sin x,\ v = x^2 + 2x\sin x + 4\cos x - \sin^2 x,$$

$u'(x)$ este nedeterminat pentru $x = \infty$, dar raportul

$$\frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{1}{x - \sin x}$$

tinde către zero pentru $x = \infty$, deci regula lui L'HOPITAL se poate aplica.

4. Limita din problema 6011 se mai poate determina, fără ajutorul regulii lui L'HOPITAL, căutând mai întâi limita logaritmului său, astfel

$$\lim v \operatorname{L} u = \lim \frac{\operatorname{L}(x + \sin x)}{x - \sin x} = \lim \frac{\operatorname{L}(x + \sin x)}{(x + \sin x) - 2 \sin x}$$

$$= \lim \frac{\operatorname{L} u}{u - 2 \sin x} = \lim \frac{\frac{\operatorname{L} u}{u}}{1 - \frac{2 \sin x}{u}} = 0.$$

5. Afirmaţia dela începutul Notei 31, după care, îmi propun să arăt că $\lim \frac{u}{v}$ poate exista fără ca $\lim \frac{u'}{v'}$ să existe, nu este exactă: eu am reprodus numai, un rezultat *bine cunoscut* în ştiinţă şi care se găseşte în cele mai multe Cursuri şi Tratate de *Algebră Superioară* şi de *Analiză Matematică*, de exemplu, în Cursurile mele respective, pag. 24, respectiv 28, unde figurează şi exemplul reprodus de mine în Nota dela pag. 616.

6. In nota 31, se demonstrează între altele neexistenţa funcţiei $u = x \sin x$ şi a derivatei sale pentru $x = \infty$, deşi expresia funcţiei u a fost greşit culeasă, după cum s'a arătat în erata dela pag. 760, ceia ce nu s'a observat, dar nu se trage o concluzie generală precisă din aceste rezultate. Nici nu se poate trage căci, dacă $u(x)$, $v(x)$ nu există pentru $x = \infty$, raportul lor poate să nu existe, pentru $x = \infty$, după cum am arătat cu exemplul dela 3.

M. GHERMĂNESCU.

27. *Notă asupra regulei lui* L'HOPITAL. Considerăm două funcţiuni $u(x)$ şi $v(x)$ ce pentru $x = a$ sunt sau amândouă nule sau amândouă infinite, astfel că valoarea raportului lor este indeterminată în punctul $x = a$.

Atât în nota ce însoţeşte soluţia problemei 6011 (G. M., L, pag. 615) cât şi în Nota precedentă asupra aceleaşi probleme, se enunţă propoziţiunea că pentru ca regula lui L'HOPITAL să fie

valabilă este necesar şi *suficient* ca raportul derivatelor $v'(a)$ şi $u'(a)$ să fie determinat. Cu alte cuvinte, această regulă subsistă chiar dacă una sau ambele derivate, $v'(a)$ şi $u'(a)$ nu există, sub unica restricţiune însă ca raportul lor să aibă o valoare bine determinantă.

Mărturisesc că nu cunosc nici *Tratatul de Algebră Superioară* şi nici pe acela de *Analiză Matematică* ale d-lui Prof. M. GHERMĂNESCU. Am căutat însă în alte cursuri. Am căutat chiar şi în *Leçons d'Algébre et d'Analyse* ale lui JULES TANNERY, ce mi-au fost acordate odinioară ca premiu la unul din concursurile *Gazetei Matematice*. Nicăeri nu am găsit propoziţiunea reamintită mai sus. *Et, pour cause.*

Punem:

$$u(x) = \sin x - x\cos x \quad , \quad v(x) = \sin x - (x + 1\cos x.$$

In acest caz, nici una din derivatele $u'(x)$ şi $v'(x)$ nu există pentru $x = \infty$. Totuşi raportul:

$$\frac{v'(x)}{u'(x)} = \frac{(x+1)\sin x}{x\sin x} = \frac{x+1}{x}$$

pentru valorile foarte mari ale lui x este o funcţiune continuă şi chiar uniform continuă. Avem deasemeni:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{v'(x)}{u'(x)} = 1.$$

Cu toate acestea regula lui L'HOPITAL nu este aplicabilă în acest caz particular. Intr'adevăr, ar trebui să avem:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sin x - (x+1)\cos x}{\sin x - x\cos x} - 1\right] = 0$$

sau

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-\cos x}{\sin x - x\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x - \operatorname{tg} x} = 0.$$

Această ultimă egalitate este vizibil inexactă, funcţiunea $x - \operatorname{tg} x$ luând în orice interval de amplitudine π, orice valoare cuprinsă între $-\infty$ şi $+\infty$.

Singură ipoteza că raportul derivatelor în punctul de nedeterminare este bine cunoscut nu este deci suficientă pentru a se asigura valabilitatea regulei lui L'HOPITAL.

Pentru mai multă claritate reproduc demonstrația regulei lui L'HOPITAL, *așa cum cred că această demonstrație, se face de mai bine de două secole și jumătate.*

Se admite mai întâi, că cele două funcțiuni $u(x)$ și $v(x)$ admit derivate într'un interval de lungime diferită de zero, în jurul punctului $x = a$. Această ipoteză, include pe acea mai puțin restrictivă că funcțiunile $u(x)$ și $v(x)$ sunt continue în același interval.

Pe temeiul acestei ipoteze se deduce egalitatea.

$$\frac{v(a+h)-v(a)}{u(a+h)-u(a)} = \frac{v'(a+\theta h)}{u'(a+\theta h)}$$

θ fiind pozitiv și cuprins între 0 și 1. In cazul particular considerat, ipoteza aceasta nu este realizată și de aceea, ultima egalitate nu este valabilă.

Se admite apoi că raportul derivatelor este o funcțiune continuă pentru $x=a$, și rezultă astfel:

$$\lim_{h \to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{u(a+h)-u(a)} = \frac{v'(a)}{u'(a)}$$

ceeace constitue regula lui L'HOPITAL.

Este dela sine înțeles că aceste ipoteze *sunt suficiente, nu însă și necesare* [1].

Nu cunosc să se fi reușit a se da regulei lui L'HOPITAL vre'o demonstrație fără a se admite ipotezele arătate. Cu toate acestea se pot uneori ivi cazuri când valoarea limitei, dată de regula lui L'HOPITAL este exactă, deși nu sunt împlinite toate ipotezele admise pentru demonstrarea acestei reguli.

Ș. G.

---

1) Aceasta explică dece în articolul *„Asupra regulei lui* L'HOPITAL" se scrie, reproduc din G. M., LI, pag. 793.

„Demonstrarea acestei regule" *presupune* că pentru $x = a$ etc.". Nu scrie însă nicăeri că *trebue* ca aceste condițiuni să existe, astfel cum se afirmă în Nota d-lui Profesor GHERMĂNESCU.

28. *Asupra întâmpinării d-lui M. G.* Nr. 5 al întâmpinării d-lui M. G.[1] se bazează pe o neînţelegere. D-sa spune: *Afirmaţia dela începutul notei 31, după care îmi propun să arăt că* $\lim \frac{u}{v}$ *poate exista fără ca* $\lim \frac{u'}{v'}$ *să existe, nu este exactă*". Dar o atare afirmaţie nu se vede nicăiri în nota 31, unde se spune însă altceva; citez: „*Autorul ..... îşi propune să arate că dacă avem* $\lim \frac{u}{v} = k$, *nu este neapărat necesar să avem şi* $\lim \frac{u'}{v'} = k$". Iar această afirmaţie am luat-o din nota d-lui M. G. (G. M. vol. LI, p. 616) unde d-sa scrie: „..... *constă în afirmaţia că dacă* $\lim \frac{v}{u} = k$, *avem şi* $\lim \frac{v'}{u'} = k$, *ceeace nu este exact, după cum se poate constata pe exemplul...*"

Am comentat neexistenţa funcţiei $x \sin x$ şi a derivatei funcţiei $x - \sin x$ în punctul $x = \infty$ pentrucă am căpătat impresia, citind nota d-lui M. G., că nu se acordă în acea notă importanţa cuvenită, existenţei derivatei, pentru aplicarea regulei lui L'HOPITAL. Impresia aceasta dealtfel mi-a fost întărită şi prin întâmpinarea prezentă a d-lui M. G., unde între altele, la Nr. 3 se scrie identitatea

$$\lim_{x=a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{h=0} \frac{\frac{u(a+h) - u(a)}{h}}{\frac{v(a+h) - v(a)}{h}},$$

cu intenţia vădită de a se egala ultimul raport cu

$$\lim_{x=a} \frac{u'(x)}{v'(x)},$$

chiar când $u'(a)$, $v'(a)$ n'ar exista, ceeace, se înţelege, nu se poate afirma.

V. V.

---

1) Nota 26 din acest număr.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL « GAZETEI MATEMATICE » DIN ANUL 1948

Probele scrise din 6 Mai 1948

(Timpul acordat: 3 ore pentru fiecare materie)

CLASA a IV-a

Algebra. I. Un teren de formă triunghiulară BAC are laturile $AB = c$ şi $BC = a$ $(c < a)$, exprimate în km, date de rădăcinile sistemului de ecuaţii:

$$\frac{1}{x+\dfrac{1}{y-\dfrac{1{,}7}{x}}} = \frac{1}{x-\dfrac{1}{y-\dfrac{1{,}3}{x}}} \quad ; \quad \frac{1}{y}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1,$$

iar latura $CA = b = 1800\ m$.

Aflându-ne în B, se întreabă până unde vom merge pe latura BC spre C astfel încât ducând prin acel punct D, paralele DE şi DF la laturile AC şi AB, paralelogramul DEAF să aibă un perimetru $2p = 3000m$.

II. Dacă $\dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} = 1$ să se arate că ori care ar fi m avem

$$\frac{b^2\,ab - \alpha\sqrt{m^2a^2+b^2}}{mab + \beta\sqrt{b^2+m^2a^2}} = a^2\,\frac{\beta\sqrt{a^2m^2+b^2} - mab}{\alpha\sqrt{b^2+m^2a^2} + ab}.$$

ING. AURELIAN STAN.

Geometria în spaţiu. Pe muchiile OX, OX, OZ ale unui triedru tridreptunghic în O, se iau respectiv punctele A, B, C, astfel ca:

$$OA = OB = OC = a.$$

Fie deasemeni M, N, P mijloacele distanţelor BC, CA, şi AB, iar S şi T mijloacele segmentelor OP şi MN.

Să se demonstreze că:

1. OP şi MN sunt perpendiculare;
2. MN este perpendiculară pe planul SOP;
3. ST este perpendiculara comună a dreptelor OP şi MN;
4. Mijlocul H al segmentului ST este la egală depărtare de punctele A, B, C;
5. OH este perpendiculară pe planul ABC;
6. Tetraedrul OMNP este regulat şi să i se calculeze volumul.

PROF. AL. V. NICOLESCU.

CLASA a V-a

Algebra. Se dă funcţia:

$$F(x, m) = \frac{1}{x+m} + \frac{1}{x-m+4} + \frac{2}{x-4}.$$

Se cere:

1. Să se arate că ecuaţia

(I) $$F(x, m) = 0$$

are rădăcinile reale oricare ar fi parametrul m.

2. Să se determine semnul acestor rădăcini.

3. Să se determine m astfel că ecuaţia (I) să aibă ca rădăcini un număr dat a, precum şi condiţiile de posibilitate ale problemei.

4. Pentru ce valori ale lui m vom avea:

$$-2 < F(-1, m) < \frac{16}{5}.$$

5. x_1 şi x_2 fiind rădăcinile ecuaţiei (I) să se determine m astfel ca:

$$x_1^3 + x_2^3 = -61.$$

6. Să se facă împărţirea:

$$\frac{X^{2/3} + X^{1/2}Y^{1/4} - 7X^{1/3}Y^{1/2} + 17X^{1/6}Y^{3/4} - 12Y}{\sqrt[3]{X} - 2\sqrt[6]{X}\sqrt[4]{Y} + 3\sqrt{Y}}.$$

PROF. AL. V. NICOLESCU.

Geometria plană. Pe latura BC a triunghiului oarecare ABC se ia un punct A_1. Cercul de centru O_B ce trece prin punctele B şi A_1 şi este tangent laturei BA în B şi cercul de centru O_C ce trece prin punctele C şi A_1 dar este tangent laturei CA în C, se întretaie a doua oară în punctul A_2.

1. Să se afle locul geometric al punctului A_2 când A_1 se mişcă pe latura BC.

2. Cercul circumscris triunghiului $O_BA_2O_C$ trece prin centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC.

3. Proiecţiile punctului A_2 pe laturile triunghiului ABC sunt pe o dreaptă Δ.

4. Dreapta Δ este tangentă cercului descris pe A_1A_2 ca diametru.

ING. AURELIAN STAN.

BIBLIOGRAFIE

Analele Româno-Sovietice. Nr. 9. Ianuarie-Februarie 1948.

Angolo Acuto. An. I. No. 1. Febraio 1948. Pesaro.

Archives Internationales d'Histoire des Sciences. No. 1. Octobre 1947. P. SERGESCU: La littérature mathématique dans la première période (1665—1701) du „*Journal des Savants*". R. TATON: Les mathématiques dans le „*Bulletin de Ferussac*".

Idem. No. 2. Janvier 1948.

Boletin Matematico. Ano XX. No. 9—10. Noviembre-Diciembre 1947. B. I. BAIDAFF: El cometa HALLEY *y* una carta del observatoire de Paris. B. I. BAIDAFF: Relaciones entre segmentos limitados por conicas homoteticas de centro comun.

Buletinul Societăţii Politehnice din România. Anul. LX. Nr. 1—6 Ianuarie-Iunie 1947. AL. STOENESCU: Formule exacte şi formule aproximative pentru determinarea momentului încovăietor maxim.

Idem. Nr. 7—12. Iulie-Decembrie 1947.

Idem. Anul LXI. Nr. 1—3. Ianuarie-Martie 1948.

Cercul de Studii Agir. Problemele Fizicei Moderne şi Energia Nucleară. Editura Agir. Ing. N. PROFIRI: Cuvânt introductiv. V. VÂLCOVICI: Principiile de bază în Fizica Modernă. CAIUS IACOB: Principiile mecanicei clasice şi mecanica analitică. RADU ŢIŢEICA: Concepţia corpusculară şi ondulatorie a luminei. SABBA ŞTEFĂNESCU: Fizica câmpului electromagnetic. ŞERBAN ŢIŢEICA: Principiile mecanicei statice. Dr. MIRCEA DRĂGANU: Bazele fizice ale teoriei cuanteler. Dr. MIRCEA DRĂGANU: Bazele experimentale ale relativităţei restrânse. G. VRÂNCEANU: Teoria tensorilor. Spaţii cu conexiune. G. VRÂNCEANU: Teoria relativităţei generale şi teoriile unitare. V. VÂLCOVICI: Ecuaţiile diferenţiale în fizică. N. TEODORESCU: Operatori şi matrice. AUREL IONESCU: Mecanica ondulatorie. ŞERBAN ŢIŢEICA: Mecanica cuantică. THEODOR IONESCU: Bazele fizice ale Mecanicei cuantice şi ondulatorii. AL. SANIELEVICI: Radioactivitatea. HORIA HULUBEI: Energia nucleară şi desagregarea materiei. Ing. E. GELLES: Aplicaţiunile energiei nucleare. Dr. MIRCEA HEROVANU: Structura universului. Ing. M. IANCU: Fizica modernă şi materialismul dialectic.

Colloquium Mathematicum. I.1, Wroclaw 1947. H. STEINHAUS: Communications sur un théorème de Mr. V. JARNIK. R. SALEM: Sur une extension du théorème de convexité de Mr. MARCEL RIESZ. W. SIERPINSKI: Remarque sur une hypothèse des Chinois concernant les nombres $(2^n - 1)/n$. K. ZARANKIEWICZ: Sur les relations symétriques dans l'ensemble fini, M. NOSARZEWSKA: Sur la convergence uniforme et la mesurabilité relative. S. HARTMAN: Sur deux notions de fonctions indépendantes. H. STEINHAUS: Sur la cubature des troncs de bois.

Endeavour. Revue trimestrielle destinée à tenir registre du progrès des sciences au service du genre humain. Vol. II. No. 25 janvier 1948.

Intermédiaire des Recherches Mathématiques. Tome 4. Janvier 1948.

Quaterly of Applied Mathematics. Vol. I, II, III, IV şi V.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVIII. Nr. 2. Aprilie 1948. N. N. MIHĂILEANU: Tetraedrul ortocentric şi grupul ortocentroidal. MARIA NEUMANN: Discuţia sistemului format de trei ecuaţii lineare cu trei necunoscute prin consideraţiuni geometrice. Note matematice. Înştiinţare. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

P. SERGESCU. Le bicentenaire de GASPARD MONGE.

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 244. (G. M. XL. 206). Care au fost profesorii şi ce ştiinţe s'a predat la şcoala lui VASILE LUPU.

La răspunsul dat de d-l G. G. ENESCU în G. M., LIII, 273 se mai pot adăuga câteva amănunte, după *Istoria învăţământului românesc* de N. IORGA şi *Matematica la Români* de P. SERGESCU.

Anume: SOFRONIE POCZACKI, directorul Academiei întemeiate de VASILE LUPU, predă mitologia în latineşte şi polonește. El era, deci, Polon de origine. Printre profesorii Academiei, se găseşte, pentru ştiinţe, TEOFIL CORIDALEU, autor de manuale manuscrise, care au servit până în secolul al XVIII-lea: Retorica, *Fizica*, *Studiul cerului*, Tratatul despre suflet.

Academia avea un *muzeu* de instrumente de matematici şi de astronomie.

N. IORGA afirmă ca probabil că Spătarul NICOLAE MILESCU (CÂRNUL) şi-a început studiile în această Academie. Se ştie că MILESCU a jucat un rol cultural eminent la curtea Ţarilor Rusiei şi a tipărit, cu această ocazie, un *Aritmolozion*, în 1672. El a fost primul explorator pe uscat al Chinei, dând peste 30 de lucrări geografice de mare preţ, între care *Descrierea Chinei* şi *Jurnalul de călătorie*.

P. SERGESCU.

DIVERSE

a) Donaţie

D-l Ing. M. PORTOCALĂ, a donat următoarele cărţi spre a fi distribuite ca premii la concursul *Gazeta Matematică* din 1948:

TH. CARONNET. Problémes de mecanique. *Gazeta Matematică*, Vol. II, IV, V, VI şi VII. A. HENSELIN. Rechentafel. T. LALESCU: Géometrie moderne. B. NIEWENGLOWSKI: Cours d'Algèbre. E. ROUCHÉ & CH. DE COMBEROUSSE: Traité de géometrie, 2 volume. L. SCHRÖN: Logarithmes 7 décimales.

b) Inmânare de premii

In şedinţa de Marţi 27 Aprilie 1948 s'au înmânat următoarele premii:

D-lui P. P. TEODORESCU premiul „Ing. ALEXANDRU ROŞU" în valoare de 5.000 lei oferit de d-l avocat AL. AL. ROŞU.

D-lui EM. E. MARINESCU premiul „NICOLAE G. BOTEA" constând din un volum *Mecanica Raţională* de A. G. IOACHIMESCU, oferit de d-l EM. G. BOTEA.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2247. *Să se determine pentru* n *valori întregi astfel ca expresiunea*

$$(\sin^n x + \operatorname{tg}^n x + \sec^n x - 1)(\cos^n x + \operatorname{cotg}^n x + \operatorname{cosec}^n x - 1)$$ [1]

când $x = 0$, *să aibă o valoare finită.*

SEBASTIAN KAUFMANN.

Notând cu E expresiunea dată şi înlocuind liniile trigonometrice în funcţie de $\sin x$ şi $\cos x$ se găseşte

$$E = \frac{(1-\cos^{2n} x)(1-\sin^{2n} x)}{\sin^n x \cos^n x} + 4.$$

Dar

$$1 - \cos^{2n} x = (1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \ldots + \cos^{2n-2} x)$$

$$\therefore\ E = 4 + \frac{(1-\cos^2 x)(1-\sin^{2n})(1+\cos^2 x+\cos^4 x+\ldots+\cos^{2n-2} x)}{\sin^n x \cos^n x}$$

$$\therefore\ E = 4 + \frac{(1-\sin^{2n} x)(1+\cos^2 x+\cos^4 x+\ldots+\cos^{2n-2} x)}{\sin^{n-2} x \cos^n x}$$

limita depinde numai de partea a doua a sumei.

Trecând la limită această parte este finită numai dacă $n \leqslant 2$. Cum se cer pentru n valori întregi şi cum E nu se schimbă dacă se înlocueşte n prin $-n$, rezultă că valorile cerute în enunţ sunt întregii cuprinşi între -2 şi $+2$, adică ∓ 1, 0, ∓ 2.

Pentru aceste valori se găsesc limitele următoare:

a) $n = \pm 1$; $E = 4 + \sin x \cos x$; $\lim\limits_{x \to 0} E = 4$

b) $n = \pm 2$; $E = 6 + \sin^2 x \cos^2 x$; $\lim\limits_{x \to 0} E = 6$

c) $n = 0$; $E \equiv 4$

Pe copertele volumelor XXI şi XXII sunt trecuţi ca rezolvitori ai acestei probleme, d-nii: C. BULGĂREANU, C. MITESCU, AL. PANTAZI, L. TEODORIU, AL. ZAMFIRESCU şi GR. ZAMFIRESCU.

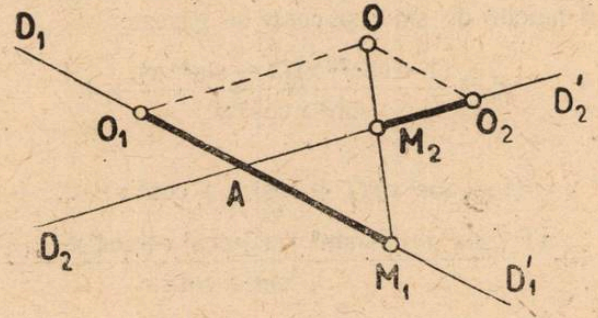
1) In enunţul de la pag. 320 vol. XX termenii independenţi au fost imprimaţi greşit $-s$ în loc de -1.

PROBLEMA 4350. *Cum trebue să fie între ele vitezele a două mobile care mişcându-se pe două drepte oarecare, să formeze în fiecare moment, cu un punct fix dat, un sistem de trei puncte colineare?*

AL. A. ROŞU.

Fie D_1AD_1' şi D_2AD_2' dreptele date, *concurente* în A şi O punctul fix.

Să ducem prin O paralelele OO_1 şi OO_2 la dreptele D_2AD_2' şi D_1AD_1'.



Să considerăm mobilele într'o poziţie oarecare corespunzătoare enunţului, anume în M şi M_2 şi să notăm $s_1 = O_1M_1$ şi $s_2 = O_2M_2$.

Avem prin consideraţii simple geometrice:

$$\frac{O_1M_1}{OO_2} = \frac{OO_1}{O_2M_2}$$

Sau:

$$\frac{s_1}{OO_2} = \frac{OO_1}{s_2} \quad \therefore \quad s_1s_2 = OO_1 \cdot OO_2 = K = \text{constant.} \qquad (1)$$

Rezultă: $$s_2 = \frac{K}{s_1}. \qquad (2)$$

Prin derivare, în *raport cu timpul*, relaţia (1) devine:

$$v_1 s_2 + v_2 s_1 = O \text{ în care } v_1 = \frac{ds_1}{dt} \; ; \; v_2 = \frac{ds_2}{dt}.$$

Sau:

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{s_1}{s_2} \quad (3) \quad ; \quad v_2 = -\frac{s_2}{s_1} \cdot v_1. \qquad (4)$$

Din (3) rezultă *că raportul vitezelor în valoare absolută este egal cu raportul distanțelor mobilelor la punctele fixe* O_1 *și* O_2.

Dându-se mișcarea *unuia* dintre mobile spre exemplu mobilul M_1 prin funcția de timp:

$$s_1 = OO_1 = \varphi(t)$$

rezultă imediat *mișcarea celui de al doilea punct* M_2 prin expresia (2):

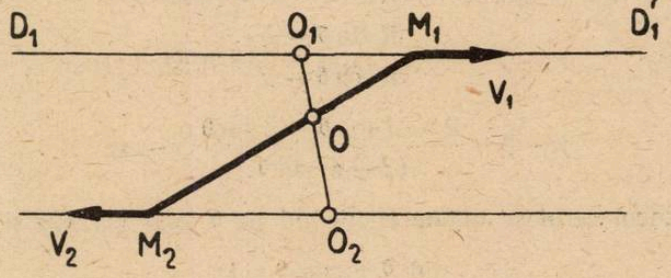
$$s_2 = \frac{K}{\varphi(t)},$$

iar *vitezele* v_1 și v_2 sunt:

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt}; \quad v_2 = -\frac{K}{[\varphi(t)]^2} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Se observă din relația (1), că mobilele nu pot avea amândouă mișcări simple de aceiași natură precum *mișcări uniforme* sau *uniform variate.*

In cazul când dreptele sunt *paralele* $D_1O_1D_1'$ și $D_2O_2D_2'$ punctul O fiind punctul fix problema se simplifică și avem:



$$\frac{O_1M_1}{O_2M_2} = \frac{OO_1}{OO_2}; \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{OO_1}{OO_2} = K = \text{constant.}$$

Iar:

$$\frac{v_1}{v_2} = K = \text{constant.}$$

In acest caz mișcările mobilelor sunt de *aceiași natură: uniforme, uniform variate,* etc.

La această problemă s'au primit soluții bune dela domnii RADU P. VOINEA, A. I. VARGĂ (Politehnica București), ION C. ȘOVA (Alba Iulia), OCTAVIAN EM. GHEORGHIU și VICTOR FLORESCU (Lic. Militar N. Filipescu).

AL. ST.

PROBLEMA 5177. *Se dau în plan punctele* A, B, *o dreaptă* Δ *şi un cerc* (C). *Fie* M *un punct mobil pe cercul* (C) *şi* T *intersecţia lui* Δ *cu tangenta în* M *la* (C). *Să se găsească locul geometric al intersecţiei dreptelor* AM, BT.

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de d-l E. WEGENER (Bucureşti).

Raportăm figura la doi diametri perpendiculari ai cercului (C), diametrul Oy fiind paralel cu Δ. Fie $A(a, b)$, $B(\alpha, \beta)$, $M(R\cos\theta, R\sin\theta)$ şi

$$(C)\quad x^2+y^2-R^2=0\ ;\quad (\Delta)\quad x-d=0$$

datele problemei. Tangenta în M la (C) este

$$x\cos\theta+y\sin\theta-R=0.$$

Din această ecuaţie şi (Δ) se deduce $T\left(d, \dfrac{R-d\cos\theta}{\sin\theta}\right)$.

Ecuaţiile dreptelor AM, şi BT sunt respectiv

$$y-b=\frac{R\sin\theta-b}{R\cos\theta-a}(x-a) \tag{1}$$

$$y-\beta=\frac{R-d\cos\theta-\beta\sin\theta}{(d-\alpha)\sin\theta}(x-\alpha). \tag{2}$$

Locul cerut se obţine eliminând pe θ între (1), (2) şi

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

şi se găseşte cuartica

$$(x-\alpha)^2\left[d(bx-ay)+R^2(y-b)\right]^2+\left[R^2(x-a)(x-\alpha)\right.$$
$$\left.-(bx-ay)\left[(y-\beta)(d-\alpha)+\beta(x-\alpha)\right]\right]^2$$
$$=R^2\left[d(x-a)(x-\alpha)+(y-b)\left[(y-\beta)(d-\alpha)+\beta(x-\alpha)\right]\right]^2.$$

Notă. D-l D. RIPIANU a rezolvat bine problema raportând figura la două axe oblice trecând prin centrul cercului (C), una din axe fiind paralelă cu Δ.

Am propus această problemă pentru a da o indicaţie de rezolvare problemei 1384, rezolvată ulterior la pag. 480, Vol. XLIV. Asupra soluţiei problemei 1384 a se vedea şi articolul d-lui G. D. SIMIONESCU publicat în *Gazeta Matematică* Vol. XLVII, pag. 204.

La 29 Oct. 1947 s'a primit de la d-l M. D. POPA o soluție în care transformă enunțul problemei în felul următor: *Dreptele* AP, BP *fiind într'o omografie* (D), *iar* AP *tăind cercul* (C) *în* M *și* M' *se cere locul intersecției dreptei* BP *cu tangentele în* M *și* M' *la* (C), Apoi d-sa utilizează problema analoagă studiată de d-l AD. GHEORGHIU în articolul dela pag. 568, Vol. XLVI și găsește că locul lui P este o cuartică pe care o construește determinându-i câte-va puncte.

PROBLEMA 5933. *Pe o stradă merg în aceeași direcție pe aceeași linie două tramvaie cu o viteză de 21,6 km/oră. Lungimea tramvailor este 8 m, iar lățimea 2 m. Distanța între cele două tramvaie este de 7 m. O mașină urmează un drum paralel cu linia tramvailor având o viteză de 28.8 km/oră. Lungimea mașinei este 4 m, iar lățimea de 2 m. Distanța între centrul mașinei și mijlocul liniei tamvailor este 10 m, iar distanța între centrul primului tamvai și centrul mașinei proiectată pe linia tamvaiului este de 30 metri. Raza de giratie a mașinei 4 m. Mașina păstrând viteza constantă și același drum va putea trece printre cele 2 tramvaie numai printr'o întoarcere de 90°?*

LT.-C-DOR C. V. COSTĂCHESCU.

Soluție dată de d-l ALEXANDRU AL. TIMOTIN (absolvent al Lic. „Gh. Lazăr", București.

Viteza tramvailor $= \frac{21600 \text{ m}}{3600 \text{ sec}} = 6$ m/s, viteza mașinei $= 8$ m/s.

Mașina va traversa linia tamvailor în $\frac{6}{8} = 0{,}75$ sec. In acest interval de timp tramvaile parcurg $0{,}75 \times 6 = 4{,}5$ metri, dacă se ține seamă de lățimea mașinei, distanța între mașină și ultimul tramvai, după ce mașina a trecut linia tramvailor, este de 0,5 m. Mașina va putea trece printre cele 2 tramvaie.

Din poziția inițială, mașina va parcurge distanța S_1 va face o întoarcere de 90° parcurgând arcul de cerc $EF = 2\pi$ metri, apoi distanța $ED = 3$ metri, după care va traversa linia tramvailor.

Din o figură rezultă: $S + 30 = S_1 + OE + CA$

$$S = S_1 - 21 \text{ metri} \quad , \quad 6t = 8t_1 - 21 \ldots \qquad (1)$$

$$t = t_1 + t_2 + t_3 \quad , \quad t = t_1 + 1{,}16 \text{ sec} \ldots \qquad (2)$$

Din (1) și (2) deducem $t_1 = 13{,}98$ sec, $s_1 = 111{,}84$ metri.

PROBLEMA 6258. *Vârfurile* B, C *ale unui triunghiu sunt fixe şi* A *descrie cercul fix* ABC. *Să se arate că cercurile adjuncte* $\overline{BA}$ (*trecând prin B şi tangente în* A *la* AC) *înfăşoară o cardioidă.*

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţia întâia dată de d-l PETRE P. TEODORESCU (clasa VII-a lic. Matei Basarab, Bucureşti).

Fie O' centrul cercului $\overline{BA}$; el se găseşte la intersecţia perpendicularelor în A pe AC şi din O (centrul cercului ABC) pe AB; deci

$$\sphericalangle BO'O = \sphericalangle AO'O = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = \text{const.}$$

O şi B' fiind fixe, O' descrie un cerc ce trece prin B şi O. Se ştie însă că dacă O' este un punct mobil pe un cerc dat (BOO'), cercurile de centru O' care trec printr'un punct fix B al cercului înfăşoară o cardioidă cu punctul dublu în B.

Soluţia a doua, dată de d-l MIRCEA D. POPA (Politehnica, Bucureşti).

Considerăm date punctele B, C; *fie* D *o dreaptă fixă dusă prin* C; *un cerc mobil care trece prin* B *şi* C *taie dreapta* D *în* A. *Fie* AT *tangenta în* A *la acest cerc. Vom arăta că* AT *înfăşoară o parabolă de focar* B. In adevăr

$$\sphericalangle TAB = \sphericalangle ACB = \text{constant}$$

şi o latură a unghiului constant TAB trace printr'un punct fix B; a doua latură rămâne tangentă unei parabole.

Facem acum o transformare prin inversiune a figurii, de pol B; dreapta D devine un cerc fix ABC; tangenta AT se transformă în cercul adjunct $\overline{BA}$ iar parabola înfăşurată de AT, în cardioida înfăşurată de cercul adjunct $\overline{BA}$.

Observări. 1°. O soluţie în acelaşi sens, dela d-l CEZAR N. BOERESCU (Politehnica, Bucureşti); propoziţia directă a fost însă demonstrată pe cale analitică.

2°. Propoziţia invocată în soluţia d-lui P. P. TEODORESCU se poate enunţa astfel (în notaţii mai potrivite): *considerăm un cerc O, un punct fix* A *şi un punct mobil* M; *cercul* (M, MA) *înfăşoară o cardioidă.* Ea poate fi demonstrată efectuând o inversiune de pol A, modul arbitrar; cercul (O) devine o dreaptă D care taie diametrul AO în I, inversul punctului B, diametral opus lui A; fie şi P intersecţia (AM, D); notăm încă cu M' diametral opusul lui A în cercul (M) şi cu P' mijlocul segmentului AP. Avem

$$\overline{AM'}.\overline{AP'} = \overline{AM}.\overline{AP} = \overline{AI}.\overline{AB}$$

deci P' este inversul lui M' și transformatul cercului (M) este perpendiculara d în P' pe AP'; P' descrie o dreaptă (omotetica dreptei D) deci d înfășoară o parabolă de focar A. Cercul (M) înfășoară deci o cardioidă.

3°. D-l MIRCEA V. SOARE a demonstrat *izolat, analitic*, propoziția dela 2°.

PROBLEMA 6327. *Se consideră ecuația:*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

ale cărei rădăcini sunt x_1, x_2, x_3, *și se cere:*

1°. *Să se rezolve această ecuație știind că* $arctgx_1$, $arctgx_2$, $arctgx_3$ *formează o progresie aritmetică.*

2°. *Să se studieze cazul particular* $b = -3$ *și să se găsească rația progresiunei.*

EMIL MORȚUN.

1°. Relațiile dintre coeficienți și rădăcini și condiția 1° dau:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a \quad (1); \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b; \quad (2)$$

$$x_1x_2x_3 = -c \quad (3); \quad 2\operatorname{arctg} x_2 = \operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_3. \quad (4)$$

Relația (4) se mai poate scrie

$$\operatorname{arctg}\frac{2x_2}{1-x_2^2} = \operatorname{arctg}\frac{x_1+x_3}{1-x_1x_3} \quad \therefore \quad \frac{2x_2}{1-x_2^2} = \frac{x_1+x_3}{1-x_1x_3}. \quad (5)$$

Ținând seama de (1) și (3), relația (5) devine:

$$\frac{2x_2}{1-x_2^2} = -\frac{(a+x_2)x_2}{x_2+c}$$

$$x_2(x_2^3 + ax_2^2 - 3x_2 - a - 3c) = 0.$$

Cazul I. $x_2 = 0$. Din (5) se deduce că

$$x_1 + x_3 = 0,$$

iar din (1) și (2) se deduce:

$$a = 0 \quad , \quad x_1x_3 = b.$$

Rădăcinile x_1 și x_3 se găsesc din ecuația

$$x^2 + b = 0 \qquad \therefore \qquad x_1, x_3 = \pm\sqrt{-b}$$

Este evident că:

$$\operatorname{acrtg}(-\sqrt{-b}) \quad , \quad \operatorname{arctg} 0 \quad , \quad \operatorname{arctg}(\sqrt{-b})$$

formează o progresie aritmetică.

Cazul II. $x_2^3 + ax_2^2 - 3x_2 - a - 2c = 0.$ (6)

Observăm că x_2 fiind o rădăcină a ecuației din enunț vom avea:

$$x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \quad \therefore \quad x_2^3 + ax_2^2 = -bx_2 = c.$$

Inlocuind în (6) avem:

$$(b+3)x_2 + a + 3c = 0 \; ; \; x_2 = -\frac{a+3c}{b+3} \; ; \; b+3 \neq 0.$$

Pe care ducând-o în (1) și (3) obținem:

$$x_1 + x_3 = \frac{3c - ab - 2a}{b+3} \; , \quad x_1 x_3 = \frac{c(b+3)}{a+3c}.$$

Rezultă că x_1 și x_3 sunt rădăcinile ecuației:

$$x^2 + \frac{ab + 2a - 3c}{b+3}x + \frac{c(b+3)}{a+3c} = 0.$$

Dacă $b + 3 = 0$ atunci și $a + 3c = 0$

Inlocuind în ecuația din enunț obținem

$$x^3 - 3cx^2 - 3x + c = 0$$

care se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = c. \tag{7}$$

Punem $x = \operatorname{tg} \varphi$ de unde $k\pi + \varphi = \operatorname{arctg} x.$ (8)

Ecuația (7) devine atunci:

$$\operatorname{tg} 3\varphi = c \qquad \therefore \qquad \varphi = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} c - \frac{h\pi}{3}.$$

Pentru φ vom obține 3 valori distincte, dând lui h valorile $0, \pm 1, \pm 2$. (Semnul minus corespunde sensului negativ pe cercul trigonometric).

Valorile corespunzătoare ale lui φ sunt:

$$\varphi_1 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} c \; ; \; \varphi_2 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} c \pm \frac{\pi}{3} \; ; \; \varphi_3 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} c \pm \frac{2\pi}{3}.$$

Din (8) deducem:

$$\operatorname{arctg} x_1 = k_1\pi + \varphi_1 \; ; \quad \operatorname{arctg} x_2 = k_2\pi + \varphi_2 \; ; \quad \operatorname{arctg} x_3 = k_3\pi + \varphi_3. \tag{9}$$

Deoarece, expresiile din membrul I sunt în progresie aritmetică, iar φ_1, φ_2 şi φ_3 sunt deasemeni în progresie aritmetică, urmează că şi numerile k_1, k_2 şi k_3 sunt în progresie aritmetică.

Notăm atunci:

$$k_2 - k_1 = k_3 - k_2 = \lambda.$$

Din (9) obţinem:

$$\operatorname{arctg} x_1 = k_1\pi + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} c; \quad \operatorname{arctg} x_2 = k_2\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} c;$$

$$\operatorname{arctg} x_3 = k_3\pi \pm \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} c. \qquad (10)$$

Din (10) se vede că raţia progresiei este $\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3}$, după cum şirul x_1, x_2, x_3 este crescător sau descrescător.

Tot din (10) putem deduce uşor rădăcinile x_1, x_2 şi x_3 ale ecuaţiei date.

S'a primit o foarte bună soluţie dela d-l ANTON I. VARGĂ (student inginer anul IV) şi E. A. DODU (liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti).

D-l MIRCEA V. SOARE a dat o soluţie bună, cu o mică eroare de calcul.

S'au primit şi alte soluţii incomplecte şi eronate de la rezolvitorii anunţaţi pe copertele numerelor precedente.

EM. M.

EXERCIŢII

25. *Să se arate că*

$$2^{n-1} - C_n^1 2^{n-2} + C_n^2 2^{n-3} + \ldots - C_n^{n-1} = 0$$

$$2^{n-1} - C_n^1 2^{n-2} + C_n^2 2^{n-3} + \ldots + C_n^{n-1} - C_n^n = 0$$

după cum n *este par sau impar.*

MIRCEA G. IOSIFESCU.

R. Desvoltând pe

$$[\alpha - (\alpha - 1)]^n = 1$$

se găseşte

$$\alpha^n - C_n^1 \alpha^{n-1}(\alpha - 1) + C_n^2 \alpha^{n-2}(\alpha - 1)^2 - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \alpha (\alpha - 1)^{n-1} + (-1)^n (\alpha - 1)^{n-1} = 1.$$

Facem aici $\alpha = 2$ apoi succesiv n pereche şi nepereche şi găsim egalităţile din enunţ.

26. *In ori ce triunghiu avem*

$$\Sigma \sin A = \frac{4pS}{abc}.$$

GH. TH. GOLDIŞ.

R. Se observă că

$$\Sigma \sin A = 2\,\Sigma \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}.$$

şi se ţine seamă de

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \ldots$$

27. *Intre elementele unui triunghiu avem*

$$p = R \sin A = 4R \sqrt{\frac{r_a r_b r_c}{OI_a \cdot OI_b \cdot OI_c}}.$$

VAL. M. I. STANCIU.

R. Se folosesc relaţiile cunoscute

$$a = 2R \sin A \ ; \quad r_a = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \quad \text{(G.M. XXXV, pag. 352)}$$

$$OI_a = 4R \sin \frac{A}{2} \quad \text{(G.M. XXXV, pag. 358)}$$

PROBLEME PROPUSE

6471. Să se găsească patratele perfecte de opt cifre de forma $aaaabbbb + 1$.

G-L GH. BUICLIU.

6472. Fie A, B, C trei numere întregi din care: A este de $2m$ cifre egale cu a, B este de m cifre sau $m+1$ cifre egale cu b şi C este de m cifre egale cu c.

Să se determine numerele A, B, C şi cifra d ştiind că suma $S = A + B + C + d$ este patrat perfect.

VALERIU AL. PETCU.

6473. Să se construiască un triunghiu, cunoscându-i centrul cercului înscris şi centrele de omotetie directă ale cercurilor sale exînscrise.

CONSTANTIN C. DIACONU.

6474. Să se construiască un triunghiu cunoscând o latură, distanţa ei la ortocentru şi distanţa ortocentrului la centrul cercului circumscris.

ING. F. NEDELCU.

6475. 1°. Se consideră trei cercuri C_1, C_2 şi C_3 în acelaşi plan. Punem

$$a_{ik} = a_{ki} = \cos(C_i, C_k) \quad ; \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

(C_i, C_k) fiind unghiul cercurilor C_i şi C_k.

Notăm cu p_i *puterea redusă* (câtul dintre putere şi diametrul cercului) a unui punct de pe cercul ortogonal comun, în raport cu cercul C_i. Să se arate că avem:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & p_1 \\ a_{21} & 1 & a_{23} & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2°. Se consideră patru sfere S_1, S_2, S_3 şi S_4.

Notaţiile fiind similare celor întrebuinţate pentru cercuri, între puterile reduse p_i ale unui punct de pe sfera ortogonală comună avem relaţiunea:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & p_1 \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} & p_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 & p_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

ŞERBAN GHEORGHIU.

6476. Fie a, b şi n trei numere pozitive. Să se demonstreze neegalitatea

$$2(n+1)ab \leqq a^{n+1} + b^{n+1} + n\left(a^{\frac{n+1}{n}} + b^{\frac{n+1}{n}}\right).$$

Când există egalitate?

B. BARBĂLAT.

6477. Se dau minorii Δ_{ik} ai unui determinant

$$\Delta_3 = |a_{ik}| = 0.$$

1°. Să se determine a_{ik}.

2°. Să se examineze în special cazul $\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$.

N. GEORGESCU ROEGEN.

6478. Să se afle limitele expresiilor:

$$U_n = \frac{\log\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{x}{a+n}\right)\right]}{\log(a+n+1)},$$

$$V_n = \frac{\log\left[\left(1+\frac{x}{(a+1)\log a}\right)\left(1+\frac{x}{(a+2)\log(a+1)}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{(a+n+1)\log(a+n)}\right)\right]}{\log\log(a+n+1)},$$

când $n \to \infty$, a fiind o constantă pozitivă.

VIRGIL CLAUDIAN.

6479. Tangentele în punctele φ_a, φ_b, φ_c ale lui FEUERBACH ale triunghiului ABC determină un triunghiu $A_1B_1C_1$. Notațiile fiind cele obișnuite, să se arate că:

1°. Suprafața triunghiului $A_1B_1C_1$ e dată de:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{4R(1+2\cos A)(1+2\cos B)(1+2\cos C)}$$

2°. Dreptele AA_1, BB_1, CC_1, taie pe BC, CA, AB respectiv în punctele A', B', C', așezate pe o tangentă a celei de a doua elipsă a lui STEINER a triunghiului ABC.

MIRCEA D. POPA.

6480. Se dau două axe perpendiculare Ox, Oy. Pe Ox se iau punctele A, B simetric așezate față de O. Se duce prin punctele A, B un cerc variabil, iar prin O se duce un cerc tangent axei Oy și tangent primului cerc. Să se arate că locul punctului de contact al celor două cercuri este o lemniscată. Să se explice acest rezultat.

CEZAR COȘNIȚĂ.

ERATĂ. La exercițiul 24 pag. 350 din acest volum se fac următoarele rectificări:

1°. Rândul 6 membrul II se înlocuesc $\pm$ prin $\mp$.

2°. Rândul 7 se înlocuește semnul : prin $\times$ iar în membrii II se scrie $\mp$ la prima egalitate și $\pm$ 4 sec$x$ la a doua.

3°. Rândul 9 la numărătorul primei fracții $\pm$ se înlocuește prin $\mp$ iar la al fracției a doua l se înlocuește prin 2.

4°. Rândul 10 ultimul numitor sin$x$ se înlocuește prin cos$x$.

La problema 6468 ultimul rând dela punctul 1° se întregește cu: *, în vârfurile dreptunghiului* D.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Armean I. (6420); *Athanasiu C. M. Luciliu* (E, P); *Berdan C.* (P); *Bucur A. N.* (6417, 20); *Crăciunescu E.* (P); *Deleanu I. Aristide* (6395); *Dodu A. E.* (6322, 3, 7, 60, 1, 458); *Marinescu E. Em.* (A, P); *Nestorescu C. D.* (6428, 45); *Păunescu St. Gh.* (6233); *Petcu Al. Valeriu* (4664, 5999, 6189, 461); *Soare V. M.* (P); *Teodorescu P. P.* (5258, 6272, 357, 438, P, C); *Ţopa I. N.* (6404, 45, 6); *Vargă I. A.* (2016, 6407, 64, 9, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *« Gazeta Matematică »*.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate, cu preţul de 800 lei volumul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—III, V—X, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia a III-a. Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 300

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 150

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 180

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . Lei 500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . Lei 250

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 100

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.500

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 320

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . Lei 400

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 100

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* Lei 250

PENTRU BIBLIOTECI ŞI AUTORITĂŢI TOATE PREŢURILE SE TRIPLEAZĂ

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Costul abonamentului este de Lei 800

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Octombrie 1947 la 1 Iunie 1948 inclusiv. Costul abonamentului este de. . . . . Lei 360

Abonamentele se pot plăti la cont CEC Nr. 26220 sau pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 11.824.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Armean I. (6420); *Athanasiu C. M. Luciliu* (E, P); *Berdan C.* (P); *Bucur A. N.* (6417, 20); *Crăciunescu E.* (P); *Deleanu I. Aristide* (6395); *Dodu A. E.* (6322, 3, 7, 60, 1, 458); *Marinescu E. Em.* (A, P); *Nestorescu C. D.* (6428, 45); *Păunescu St. Gh.* (6233); *Petcu Al. Valeriu* (4664, 5999, 6189, 461); *Soare V. M.* (P); *Teodorescu P. P.* (5258, 6272, 357, 438, P, C); *Topa I. N.* (6404, 45, 6); *Vargă I. A.* (2016, 6407, 64, 9, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *« Gazeta Matematică »*.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate, cu preţul de 800 lei volumul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—III, V—X, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia a III-a. Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 300

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 150

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 180

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . Lei 500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . Lei 250

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 100

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.500

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 320

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . Lei 400

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 100

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* Lei 250

PENTRU BIBLIOTECI ŞI AUTORITĂŢI TOATE PREŢURILE SE TRIPLEAZĂ

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Costul abonamentului este de Lei 800

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Octombrie 1947 la 1 Iunie 1948 inclusiv. Costul abonamentului este de. . . . . Lei 360

Abonamentele se pot plăti la cont CEC Nr. 26220 sau pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 11.824.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIII

NUMĂRUL 10 — IUNIE 1948

SUMARUL

1. Rezultatul concursului „Gazetei Matematice" din anul 1948 . . . . . *Prof. O. N. Ţino.*
2. Soluţii întregi ale unor ecuaţii diofantice. *Prof. V. Claudian.*
3. Asupra unor curbe sferice . . . . . *Ing. F. Marcus.*
4. Raport asupra premiului de trigonometrie „Vasile Cristescu" pe anul 1946—1947 . . . . . *Prof. I. S. Antoniu, G-l Gh. Liteanu, Prof. Al. V. Nicolescu.*
5. Note matematice: 29—31.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2240, 4664, 5106, 6168, 6192, 6228, 6273.
11. Exerciţii: 28.
12. Probleme propuse: 6481—6490.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAŢIONALA

1948

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa „*Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie compusă în prezent din d-nii: **N. Georgescu-Roegen,** Licenţiat în Matematici; **C. C. Teodorescu,** Inginer, Profesor la Politehnica Bucureşti; **Al. D. Bunescu,** Inginer (Casier).

Şedinţele următoare ale Soc. „*Gazeta Matematică*":

Marţi 29 Iunie ora 18: Adunarea materiei pentru Nr. 11 şi decernarea premiului de Trigonometrie.

Marţi 6 Iulie ora 18: Facerea copertei Nr. 11, examinarea situaţiei membrilor cu cotizaţia în restanţă şi fixarea ordinei de zi a adunării generale din August.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1947 sunt indicate în tabla de materii a volumului LII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **63**91, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **4**00, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 50, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 60, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 80, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 90.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La «*Gazeta Matematică*» se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . „ 150
— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a «*Gazetei Matematice*» . . . . . „ 500

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL LIII, Nr. 10 *SUPLIMENT* IUNIE 1948

DAREA DE SEAMĂ

asupra reuniunii care a încheiat al 38-lea concurs al „Gazetei Matematice"

Suntem în seara zilei de Sâmbătă 8 Mai 1948, orele 19,30, în sala de mese a *Asociației Creștine a Femeilor* din strada Popa Rusu Nr. 13.

Din toate direcțiile și cu diferite mijloace de locomoție sosesc izolați sau în grupuri oaspeții, membrii și concurenții *Gazetei Matematice*.

Onorurile casei sunt date dela intrare, cu deosebită distincție și amabilitate de D-na MAGMUTENCO, secondată cu multă grație de fiica sa D-ra GABRIELA, ale cărei inițiale G. M. arată o predestinare a sa către *Gazeta Matematică*.

O atmosferă caldă, primitoare, însuflețită de bună dispoziție și optimism domnește peste tot.

Se discută problemele propuse la concursul *Gazetei Matematice*, se povestesc glume, anecdote și întâmplări amuzante din timpul petrecut în liceu, se răscolesc din praful uitării amintiri, din tinerețe, din alte vremuri.

Imaginile scumpe ale foștilor stâlpi ai *Gazetei Matematice*, ION IONESCU, A. GH. IOACHIMESCU, V. CRISTESCU și GH. ȚIȚEICA ne apar acum în minte puternice și clare și simțim în suflete prezența lor spirituală, prezență care ne îndeamnă la muncă și sacrificii pentru continuarea operei întemeiate de ei.

Pentru realizarea acestei continuități, privim însă cu speranță și mândrie, grupul tinerilor concurenți din anul acesta, care au dovedit frumoase cunoștințe matematice și multă pasiune pentru această disciplină.

Menționez că în acest grup, se găsesc și două concurente: D-ra GABRIELA MAGMUTENCO (cl. VI) și D-ra MARIA ADRIANA-NĂSTASE (cl. IV).

Folosind prerogativele mele de cronicar pentru această dare de seamă, am luat D-rei GABRIELA MAGMUTENCO un mic interview pe care-l dau mai jos:

1. Ce v'a atras către științele matematice?

« *Liniștea și frumosul ce rezultă din contemplarea adevărului absolut* ».

(Răspunsul m'a înghețat *absolut*; noroc că mi-am revenit *relativ* ușor).

2. Ce vă place mai mult în afară de matematici?

« *Realizarea visului meu de azi noapte: eu eram examinatoare, iar examinatorii concurenți* ».

(Cine m'a pus să fiu examinator!).

3. Ce doriți să faceți după terminarea liceului?

« *Să mă depărtez cât mai mult de drumul hiperbolic al succesului de astăzi* ».

(jos cu hiperbola!).

4. Ce ați alege între a vedea o piesă de teatru, a lua parte la o masă bună, a purta o rochie frumoasă, sau a rezolva o problemă de matematici?

« *Să rezolv bine o problemă de matematici și ca răsplată să mi se ofere o masă bună și un spectacol interesant, la care să mă duc îmbrăcată într'o rochie frumoasă* ».

(Corul părinților: Dă Doamne să nu rezolve problema!).

Regret că la acest interview nu mi-a răspuns și D-ra MARIA-ADRIANA NĂSTASE, poate pe motivul că « *tăcerea este de aur* », poate pentrucă nu a avut voie dela « *mămica* ».

Regretul nostru este cu atât mai mare cu cât așteptam răspunsuri admirabile în concordanță cu veșnicul său neastâmpăr și cu ochii săi sclipitori de inteligență.

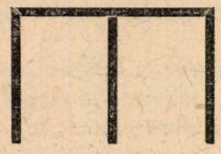
Dar să avem răbdare, p ate ne va răspunde . . . la anul viitor.

Relev cu această ocazie că unul din candidați, D-l SOFRONIE ȘTEFĂNESCU din cl. VII luând cunoștință de conținutul interviewului a răspuns și dânsul la toate întrebările puse; între altele D-sa declară că ce-i place mai mult în afară de matematici sunt mesele comune ale *Gazetei Matematice*.

Ca urmare, îi urăm să rămână repetent în clasa VIII cât mai mulți ani pentru a putea lua parte la un număr cât mai mare de asemenea mese.

* * *

Este ora 20. In jurul unei mese în formă de:



iau loc:

D-na VIORICA IONESCU, d-na MAGMUTENCO, d-na Ing. NĂSTASE, d-na LAURA DĂSCĂLESCU și d-nii V. GRIGORCEA, RADU HARET, GH. MATEESCU, C. PÂRVĂNESCU, *invitați și oaspeți* ai *Gazetei Matematice*.

D-l g-ral GH. BUICLIU și D-l Prof. Ing. D. STAN, stâlpi ai *Gazetei Matematice*, d-na Profesoară MARIANA BRATU, d-nele Profesoare ALEXANDRA BĂDULESCU, ANA IOAN, GABRIELA ȚIȚEICA și d-nii Prof. RADU BĂDESCU, Prof. B. BARBĂLAT, Prof. Ing. C. BUDEANU, Ing. VASILE CEAUȘESCU, Ing. MIHAI CERCHEZ, Ing. IOAN CHIȚULESCU, Prof. VIRGIL CLAUDIAN, Prof. G. G. CONSTANTINESCU, Ing. TEODOR DUMITRESCU, Ing. ULPIU FLORESCU, Ing. N. I. GEORGESCU, Ing. GH. SPIRU HARET, Prof. PAUL IONESCU, Ing. C. IONESCU-ȚIU, g-ral GH. LITEANU, Prof. PETRE MIRESCU, Prof. EM. MEREUȚĂ, Prof. EUGEN NECULCE, Prof. N. N. MIHĂILEANU, Prof. AL. PANTAZI, Prof. ALEX. POP, Avocat AL. AL. ROȘU, Ing. AL. SCODRANO, Ing. AURELIAN STAN, Inspector G. D. SIMIONESCU, Ing. AL. STOENESCU, Prof. Ing. C. C. TEODORESCU, Prof. Ing. RADU ȚIȚEICA, Ing. ION C. VASILIU, GRIGORE ZAPAN, membri ai *Gazetei Matematice*.

D-rele GABRIELA M. MAGMUTENCO și MARIA-ADRIANA NĂSTASE și d-nii CERNESCU A. NICOLAE, CONSTANTINESCU PAUL, IONESCU M. VALENTIN, MĂNCESCU N. IOAN, MUNTEANU T. ION, PANTEA N. ALEX., ROȘU V. CONSTANTIN, TEODORESCU P. PETRE, CĂPRARU C. I., CERNESCU A. PETRE, NEGUȚ A. ION, OLTEANU N. GHEORGHE, ȘTEFĂNESCU SOFRONIE, TUDOR EMIL, VASILIU MIRCEA, COMĂNESCU S. VALERIU, DRAGOMIR I. DAN, HANGAN M. THEODOR, MARIN C. GHEORGHE, NEACȘU ION, PETRE I. GHEORGHE, RISTEA GH. GHEORGHE, SULICĂ AL. ALEXE, HOGEA N.

GRIGORE, IONESCU-BUJOR CLAUDIU și TOMESCU GH. MIRCEA *candidați la concursul Gazetei Matematice.*

Masa comună a *Gazetei Matematice* începe cu tradiționala ciocnire a ouălor roșii în mărturisirea creștină:

Christos a înviat!

Adevărat a înviat!

și se continuă cu multă voioșie și bună dispoziție.

Menu-ul a fost alcătuit din:

Ouă roșii (pentru a da posibilitatea concurenților de a se răsbuna pe examinatori cu ocazia ciocnirii ouălor).

Ridichi (pentru a arăta modul cum au fost frecați candidații de examinatori).

Brânză (drept consolare pentru concurenții care la examinare n'au făcut nici o brânză).

Crochete pe spanac (pentruca cititorii acestei dări de seamă să nu o confunde cu suportul crochetelor).

Friptură de purcel hrănit cu vitamine (spre a întări trupește pe concurenții fripți la concurs).

Gogoși umplute (pentru reaprovizionarea conmesenilor care și-au epuizat povestirile).

Din informații primite, reușita acestei mese, a aranjatului bucatelor și serviciului se datoresc muncii neobosite a d-nei VIRGINIA CONSTANTINESCU și d-relor HANZI COLIAȘ și VICTORIA HOLBAN dela *Asociația Creștină a Femeilor*, care activând în umbră au realizat un frumos succes, în ... arta culinară.

Cred că nu comit o indiscreție prea mare, menționând printre organizatori și pe harnicul și neobositul nostru secretar d-l CONSTANTIN PÂRVĂNESCU.

* * *

Seria cuvântărilor este deschisă de d-l Inginer N. I. GEORGESCU:

Suntem aci în astă seară pentru a sărbători concursul Gazetei Matematice, concurs care e o manifestație culturală la noi.

Ca la orice manifestație, primul gând al nostru trebue să se îndrepte către țara în care trăim.

In calitate de cel mai vechiu membru al Gazetei Matematice, prezent aici, dați-mi voe să închin și să strig să trăiască țara noastră, trăiască Republica Populară Română, *trăiască* Prezidiul *care o conduce.*

Urale și ovațiuni acoperă ultimele cuvinte ale d-lui Inginer N. I. GEORGESCU.

Intreaga asistență în picioare aclamă *Republica Populară Română* și *Prezidiul ei.*

Urmează cuvântarea d-lui Prof. Ing. D. STAN:

Dragi Concurenți,

Cercetând biografiile oamenilor mari, se poate găsi aproape întotdeauna că în tinerețea fiecăruia, un eveniment neobișnuit, sau un om cu personalitate puternică, le-a trezit, la un moment dat puterile adormite, dându-le orientare și scop întregii vieți.

O asemenea deșteptare spirituală, când se întâmplă, duce la transformări adesea de necrezut, și prefațează cei mai buni ani din viața celor ce reușesc apoi să se realizeze astfel pe ei înșiși.

Intr'o măsură oarecare, însă, ceva de felul acesta, — cred eu, — se întâmplă aproape fiecărui adolescent.

Chestiunea e misterioasă, şi nu poate fi nici prevăzută, nici pregătită, nici grăbită.

Nu poate fi, în schimb, un vis mai glorios pentru oricine se ocupă într'un fel oarecere de tineret, decât să aibă darul de-a provoca, la cât mai mulţi, acest ceva neobişnuit, căruia să-i zicem cum vreţi: înălţare spirituală, — trezire, — convertire, — declanşare a sentimentului vocaţiei, — adâncire, — transformare. Numai o asemenea influenţă ar putea provoca la rândul ei, o recunoaştere atotrăsplătitoare ca aceea pe care am întâlnit-o odată, într'o scrisoare primită de un bătrân profesor dela un fost elev, — citez: « Nu ştiu ce viaţă, sau ce vieţi mă mai aşteaptă. Ştiu însă un lucru, că până la sfârşitul ultimei dintre ele, voi purta pecetea D-voastră ».

Domnilor, Gazeta Matematică *a născut şi ea, de totdeauna, să exercite astfel de influenţe, şi a meritat, sunt sigur, de multe ori, tot atât de emoţionante recunoştinţe.*

Pornită iniţial să procure cunoştinţe de matematici liceenilor, sau să-i ajute să le adune, Gazeta Matematică *a depăşit foarte curând acel rol, asumându-şi tot mai mult şi sarcina de a le influenţa în bine şi caracterul, pe lângă intelect. Şi se recunoaşte, încă de mult, că străduindu-se să infiltreze dragostea de adevăr, de muncă, şi de Patrie, cultivând cu statornicie o disciplină neşovăelnică, şi dând dovezi pilduitoare de entuziasm nedesmințit şi sacrificii susţinute,* Gazeta *se ingeniază să formeze şi să adune în jurul ei elita tineretului din liceele noastre, căreia reuşeşte să-i imprime, adesea într'o măsură decisivă, pecetea unei înalte ţinute morale.*

Pentru cei ce nu-i cunosc trecutul, făuritorii, şi metodele, ar putea să fie surprinzătoare întrucâtva permanenta preocupare morală a vechii noastre Societăţi de matematică. Căci îndeobşte se crede că imensitatea domeniului în care se desfăşoară speculaţiile şi deducţiile matematicienilor, îi face apţi să dea tot mai puţină însemnătate planetei noastre, ca şi valorilor relative din jurul lor, pregătindu-i să dispreţuiască însăşi viaţa omenească. Noţiunile abstracte pe care matematicienii le mânuesc curent, deşi o minte obişnuită nici nu le poate sezisa; infiniţii de ordine superioare şi inferioare între care ei îşi plimbă gândirea; lucrurile aparent inconsistente, sau chiar absurde pentru neiniţiaţi, — cu care logica matematică se poate împăca în mod aproape elementar; în sfârşit, înaltele concepte ale fizicei şi matematicilor superioare moderne, în lumina cărora indivizii din societatea omenească apar infinitezimali, ar avea darul după credinţa curentă, să-i facă pe matematicieni să piardă sensul proporţiilor lucrurilor comune, ba chiar să devieze dela punctele de vedere naturale şi sănătoase, şi să desconsidere până la urmă convenţiile din viaţa societăţilor organizate şi însăşi conceptele de datorie şi moralitate.

In opoziţie completă cu aceste credinţe, Gazeta Matematică *stărue pe linia moralei şi patriotismului, cel puţin tot atât cât şi pe a adevărului şi ştiinţelor pure.*

Fapt caracteristic în această privinţă, — dintre cei dintâi patru stâlpi *neuitaţi ai Gazetei noastre,* Ion Ionescu, George Ţiţeica, Andrei Ioachimescu şi Vasile Cristescu, *tocmai cel mai savant dintre ei, Profesorul* Ţiţeica, *a fost acela care a creat tradiţia lecţiei morale la întrunirile noastre dela finele Concursului anual.*

Şi ceea ce el a socotit folositor cu mulţi ani în urmă, avem sentimentul că este binevenit şi acum şi întotdeauna, căci oricând tineretul poate avea nevoie de o serie întreagă de treziri spirituale şi morale, dela egoism la generozitate, dela intoleranţe

la înțelegere, dela spirit de răzbunare la îngăduință, și dela indiferențe la credință puternică în marile idealuri ale omenirii.

Nădăjduim că fiecare dintre d-voastră, — cei mai buni adepți ai Gazetei *din generația liceenilor de azi, — veți străluci în toate verificările morale ce vi le vor impune vremurile și viața, cel puțin la fel ca la verificările de cunoștințe pe care le-ați acceptat la acest concurs, cu toate ostenelile și emoțiile lui inerente.*

Rămâneți, dragii noștri, în fruntea tineretului de seama voastră, și folosiți cum se cuvine nu numai cunoștințele ce vă poate da Gazeta, *ci și climatul ei moral, ca și exemplele ei edificatoare de armonie, muncă dezinteresată și sacrificii continui.*

Să trăiți, și să trăiască Gazeta Matematică!

Aplauze puternice salută frumoasele cuvinte, pline de învățăminte ale d-lui Prof. Ing. D. STAN.

Din partea delegației *Societății Gazeta Matematică* vorbește d-l Prof. Ing. C. C. TEODORESCU:

După cuvântarea atât de frumoasă a colegului nostru, d-l STAN, *urmează partea de datorie, partea administrativă, pe care eu, în numele delegației, trebue să o prezint, pentru ca să încheiu cu acest program protocolar.*

Se cuvine să aducem mulțumirile noastre tuturor celor care au ajutat și au făcut astfel posibilă reuniunea noastră la concursul Gazetei și au avut grije de laturile materiale, fără de care nu e posibilă această activitate.

In primul rând vin mulțumirile noastre pentru autoritățile care ne-au sprijinit: d-l ministru CHIVU STOICA, *care a acordat bilete de tren pentru concurenți,* d-l Rector al Politechnicei, N. PETRULIAN, *care a găzduit ca totdeauna concursul în sălile Politechnicei.*

D-l Director al Liceului Mătei Basarab, ION TOTOIU, *care a găzduit la liceu în internat, pe candidații care nu aveau posibilitatea să locuiască la rude, sau pe contul lor propriu.*

Apoi membrii noștri care s'au ocupat deaproape de acest lucru, cărora le datorăm mulțumirile noastre; d-l Ing. CHIȚULESCU *care, ca în fiecare an, a obținut dela căile ferate bilete de tren și d-l* Prof. CLAUDIAN, *care s'a îngrijit de găzduirea candidaților. In fine, nu mai puțin, reușita se datorește totdeauna punctului principal al concursului, care e masa colegială, ce întrunește pe toți membrii, examinatori și candidați.*

D-na ELENA ORGHIDAN, *care a fost așa de bună și ne-a primit și găzduit în această instituție.*

D-ra CONSTANȚA NICHITA, *care a priveghiat îndeaproape și am simțit cu toții atenția deosebită cu care ne-a înconjurat și căreia i se datorește aranjamentul acestei mese.*

In fine, masa desigur nu ar fi fost reușită, ca orice masă, dacă nu era și un vin bun. Tradiția iarăși și aci a fost respectată și mulțumim prietenului nostru d-l AL. ROȘU, *care ca totdeauna a asigurat vinul. Și acum, în această veselie, pot să fac o destăinuire. Un vechiu corespondent*[1] *al Gazetei, cuprins de remușcări că ani îndelungați nu a mai dat pe la gazetă, întâmplător venind în legătură cu concursul, și-a adus aminte să se manifeste la acest concurs și cum are o vie, a avut ideea să ofere vinul, iar noi am primit oferta. Nu strică să avem un pahar de vin mai mult, dar aci a intervenit tradiția ca* d-l AL. ROȘU *să asigure necontestat vinul.* D-l AL. ROȘU, *intransigent, și-a*

1) AUREL I. PANĂ, desfacere de vinuri în Piața Națiunii, București.

menținut drepturile și al 2-lea ofertant a trebuit să renunțe, așa că va trebui să-i bem vinul cu altă ocazie. Asta n'a împiedecat însă un alt coleg care, trecând peste exclusivitatea d-lui ROȘU, *și luându-l prin surprindere, ne-a adus și d-sa vin, dar de data asta vin roșu și iată cum un pahar de vin mai roșu l-a învins pe d-l* ROȘU *pe teren propriu.*

Pentru acest dar colegul nostru, d-l SP. HARET *care se găsește în mijlocul nostru, se va bucura de mulțumirile noastre.*

In fine, aranjamentul acestei mese din partea Gazetei, îngrijirea biletelor și aranjarea oaspeților se datorește prietenilor noștri d-nii IONESCU-ȚIU *și* RADU ȚIȚEICA — *și iată, domnilor, că partea administrativă s'a încheiat, că mulțumind tuturor, acum putem să ne bucurăm în voe. Prin urmare, seria cuvântărilor e deschisă.*

Aplauze puternice subliniază mulțumirile aduse de d-l Prof. C. C. TEODORESCU celor ce au contribuit la realizarea din acest an al Concursului G. M.

D-nii AL. ROȘU și SPIRU GH. HARET sunt acum obiectul atențiunii generale; se propune ca să se mărească pe cât posibil rivalitatea lor, avându-se în vedere interesele superioare și binele obștesc al conmesenilor.

D-l Prof. C. C. TEODORESCU dă cuvântul D-lui g-ral GH. BUICLIU care rostește următoarele:

Domnilor,

Când te obișnuești cu binele, e foarte greu să renunți la el. Am uzurpat acum câțiva ani drepturile d-lui Ing. N. I. GEORGESCU *și mărturisesc că mi-a venit greu să renunț la aceste drepturi acum când și le-a reluat anul acesta, așa că n'am putut să încep eu seria cuvântărilor.*

Mă înscriu în rândul al 4-lea și în această ordine aș vrea să constat unele lacune la masa noastră. Nu mă ocup de acelea de la concurs. Marți când se va da rezultatele, le vom afla.

Pentru unii concurenți care nu cunosc pe obișnuiții meselor noastre comune, observăm că lipsește dintre noi casierul nostru d-l AL. BUNESCU. *Poate că la unii ne pare și bine, căci cum vine între noi, ne încasează cotizațiile, care devin din ce în ce mai dureroase. Ne lipsește și colegul nostru, Ing.* GH. ILIESCU, *acel care de mai bine de 20 ani se ocupă de imprimarea gazetei și care ne-a aranjat mesele comune cu o măestrie pe care nu o cunoaște decât cine a fost la acele mese.*

Lacuna lui ILIESCU *e completată cu lacuna cartoanelor de menu scrise care circulau între conmeseni pentru a-și pune semnătura pe ele.*

In fine, ne lipsește d. ALEXANDRU IONESCU, *care la toate concursurile noastre a fost între noi. El e momentan suferind. Eu propun delegației și tuturor care suntem aici să trimitem acestor lacuniști salutările noastre și dorința ca în viitor să fie în mijlocul nostru.*

In schimbul lacunelor avem câțiva termeni noui. Intre termenii noi sunt câțiva dintre părinții elevilor noștri. Salutăm pe d-na MAGMUTENCO *și pe d-na Ing.* NĂSTASE *care n'au avut încredere să ne lase copiii numai pe mâna noastră. Un termen nou e d-ra stenografă* LAURA DĂSCĂLESCU, *de a cărei prezență în mijlocul nostru tot d-l* ROȘU *e de vină.*

Domnilor, art. 10 din statutele Gazetei Matematice *scrie că membrii* Gazetei Matematice *depun o muncă voluntară și dezinteresată și un sacrificiu. Cei care suntem la Gazetă cunoaștem și munca și desinteresarea pe care le depunem. Noțiunile de*

muncă, *de* sacrificiu *şi* dezinteresare *e bine să fie subliniate cu mai multă tărie pentrucă noi ne încadrăm încă de la înfiinţarea asociaţiei noastre, în munca voluntară şi dezinteresată.*

De aceea eu am propus şi societatea a admis cu entuziasm să aducem în mijlocul nostru şi alt exponent al muncei decât acelea cunoscute la Gazetă, am adus în mijlocul nostru pe zeţarul care ne culege Gazeta de mai bine de 10 ani (aplauze). L-am adus pe d-l GH. MATEESCU *pe care-l vedeţi acolo.*

Să ştiţi că nu e un om comod. D-l MATEESCU *nu e numai zeţar, el este şi un tiran, un împărţitor de teroare. El terorizează şi Gazeta şi Direcţia Monitorului Oficial. El nu admite să întârzie* Gazeta Matematică. *Nu permite ca un membru al Gazetei Matematice să nu dea corectura la timp că l lasă repetent. Nu îngăduie să sporim preţul cărţilor de la Gazetă. Se supără dacă constată că din manuscrise lipseşte vre unul din capitolele Gazetei. Tiranizează conducerea Imprimeriei atunci când constată că nu s'a aprovizionat hârtia la timp aşa încât să întârzie, apariţia Gazetei: Pentru d-l* GH. MATEESCU *alte lucrări mai poate întârzia dar gazeta nu. Eventual poate întârzia chiar* Monitorul Oficial.

Vă propun ca pentru aceste acte de tiranie să i se dea o pedeapsă exemplară, să fie pedepsit să trăiască mulţi ani în plină sănătate, şi să se ocupe de Gazeta Matematică *şi să o scoată la tipar înaintea* Monitorului Oficial.

Şi cu aceasta am încheiat seria termenilor noui şi a lacunelor. Dacă mai sunt şi altele, îi rog şi pe lacunişti şi pe ceilalţi să mă ierte, dar îi înnec în acelaş pahar cu cei pe care i-am enumărat.

Cuvântarea d lui General GH. BUICLIU este deseori întreruptă de aplauzele asistenţilor.

D-l zeţar GH. MATEESCU este viu aclamat de întreaga adunare.

In continuare vorbeşte d-l Prof. Ing. D. STAN:

D-l General BUICLIU *a amintit adineauri de activitatea rodnică şi tăcută, la* Gazetă, *a d-lui* GH. ILIESCU *şi v'a comunicat că împrejurările au voit ca de câteva luni d-sa să părăsească Bucureşti, şi deci să fie pus în imposibilitate materială, pentru moment cel puţin, de a-şi îndeplini sarcinile voluntare cu care se încărcase şi pe care le ducea de mulţi ani, mereu cu aceeaşi râvnă.*

Dar, Domnilor, locul ocupat de d-l Inginer ILIESCU *trebuia să fie luat de altcineva şi evident că a şi fost luat, fără ca tranziţia să se fi făcut simţită, dovadă apariţia regulată a Gazetei în aceleaşi condiţiuni.*

Ar fi fost de aşteptat, desigur, ca înlocuitorul să fie un coleg mai tânăr, care să se fi aşternut pe o activitate tot atât de apreciată ca a predecesorului, pe un alt lung şir de ani de-aci înainte. Mulţi dintre d-vs veţi afla de aicea cu surprindere că înlocuitorul este însăşi Stâlpul cel mai vechi de azi al Gazetei, d-l General BUICLIU.

Domnilor, s'a vorbit, în treacăt, de multe ori, despre activitatea multiplă a d-lui General BUICLIU *la această* Gazetă. *După părerea mea s'a spus totdeauna prea puţin.*

Fapt este, că, încetul cu încetul, d-l General BUICLIU *a luat asupra sa aproape toată munca de continuitate şi greutăţile legate de scoaterea revistei, aşa că rezumă în persoana sa, din acest punct de vedere, aproape întreaga Redacţie. Lucrurile au ajuns aşa fel, în ce priveşte activitatea de tot momentul şi grija rosturilor* Gazetei, *încât comparaţia pentru d-l General* BUICLIU *n'ar mai putea fi făcută decât cu neuitatul* ION IONESCU, *din epoca eroică a revistei.*

In felul acesta, d-l General BUICLIU *se plasează ca cel mai vrednic dintre urmaşii marei generaţii care a îngrijit de* Gazetă *aproape 50 de ani.*

Pentru dragostea, munca entuziastă şi neobosită şi pentru devotamentul impresionant pe care d-l General BUICLIU *le consacră de mulţi, foarte mulţi ani,* Gazetei, *propun să-i exprimăm cu toţii sentimentele noastre unanime de recunoştinţă şi caldă apreciere, pentru ca astfel, nu atât să facem încercarea de a-l răsplăti într'o slabă măsură, cât mai ales să contribuim să-l facem să ierte şi chiar să uite din necazurile suplimentare şi supărările nemeritate provocate chiar de unii dintre membrii Societăţii Gazetei Matematice.*

Cu acelaş elan cu care d-l General BUICLIU *se dăruieşte permanent iubitei noastre* Gazete, *să închinăm un pahar în sănătatea D-sale şi să-i urăm să trăiască întru mulţi ani !*

Cuvântarea d-lui Prof. Ing. D. STAN se încheie în aplauzele generale ale asistenţei; corul candidaţilor şi al tuturor membrilor intonează un cald « *Mulţi ani trăiască* ».

Intreaga asistenţă în picioare închină un pahar cu vin în sănătatea domnului General GH. BUICLIU.

In replică răspunde d-l General GH. BUICLIU:

Dacă a exagerat cineva vreodată, nimeni n'a putut să exagereze ca d-l STAN, *căci stâlp izolat nu se poate. Dar fiindcă d-l* STAN *a făcut o indiscreţie, — eu mă gândeam să nu-i fac — şi aşa de exagerat, voiu face şi eu una.*

D-l STAN *a invitat personal pe toţi tinerii candidaţi, aşa că d-lui suportă masa tinerilor candidaţi astă seară.*

Frumosul gest al d-lui Prof. D. STAN este primit cu urale şi strigăte de « trăiască ».

Asistenţa în picioare cântă « Mulţi ani trăiască ».

La cererea generală, vorbeşte d-l Avocat AL. ROŞU. Redăm mai jos admirabila d-sale cuvântare:

Domnilor, anul trecut am făcut împreună un contract şi cum în fiecare contract trebue să existe obligaţii reciproce, eu mi-am luat obligaţia să cumpăr o vie, iar D-vs v'aţi luat obligaţia să beţi vinul.

Trebue să vă mărturisesc însă că eu nu m'am ţinut de obligaţia luată: nu mi-am cumpărat via, astfel încât D-vs aţi avea tot motivul să reziliaţi contractul.

Totuşi, vă rog foarte mult să nu-mi faceţi un astfel de afront şi să-mi acordaţi termen încă un an de zile, la sfârşitul căruia, dacă nu-mi voi respecta obligaţiunile, să mă sancţionaţi, nemai respectându-vă nici D-vs obligaţiile contractate.

Eu am început însă să am o mare încredere în viitorul acestor mese, întrucât văd că au apărut concurenţi destul de serioşi cum este d-l Ing. HARET *care a încercat să uzurpe cu o culoare mai puternică aceste obligaţii ale mele, astfel încât nu am nicio grijă că veţi regreta eventual rezilierea convenţiunii.*

Singurul meu mare regret este că celor care m'au aplaudat cu atâta entuziasm (desigur desinteresat), nu mai am la îndemână elemente concrete din contractul meu în vigoare, pentru a le mări entuziasmul.

Le promit însă că la anul, entuziasmul lor va fi cu mult mai mare !

Cuvântarea *d-lui Avocat* AL. ROŞU se termină în aplauzele frenetice ale tuturor; se formează imediat un grup juridic, care judecând pe loc cererea d-lui *Avocat* AL.

Roșu, decide *menținerea contractului* și pedepsirea d-lui Al. Roșu pentru nerespectarea clauzelor contractuale prin *dublarea* cotei de vin pentru masa *Gazetei Matematice*.

Din partea concurenților vorbește d-l Petre P. Teodorescu, elev cl. VIII liceul *Matei Basarab*.

Domnilor Profesori, Domnilor Membri ai « Gazetei Matematice »,

Imi revine greaua dar plăcuta sarcină de a răspunde în numele candidaților la Concursul din acest an al « Gazetei Matematice ».

Sarcină grea, deoarece cu greu poți strânge și poți analiza multiplele simțiminte de care este încercat un elev, care vine la concursul « Gazetei Matematice ».

Sarcină plăcută, deoarece îmi prilejuește o trecere în revistă a tuturor acestor simțăminte.

Ne-am adunat aici, la această masă, pentru a sublinia legătura indisolubilă care trebue să existe între profesori și elevi, legătură pe care atât de frumos a creat-o și a întărit-o « Gazeta Matematică ».

Această legătură este necesară: sfaturile date de Domniile-Voastre sunt primite cu respect: și în felul acesta ne este luminată calea pe care trebue să mergem, spre a ajunge să fim folositori țării și culturii ei matematice.

Noi, cei din clasa a VIII-a, apărem pentru ultima dată în fața Domniilor-Voastre în calitate de concurenți, făgăduim însă să urmăm și mai departe drumul de muncă desinteresată și abnegație, pe care l-am învățat dela Domniile-Voastre.

Cu adâncă emoție mulțumesc, în numele colegilor mei și al meu personal, pentru tot ceea ce ați făcut Domniile-Voastre pentru noi și pentru tot ceea ce veți face și de acum înainte.

Incăodată, promițându-vă că vom urma lumina dată de farul « Gazetei Matematice » vă urăm, d-lor Profesori și d-lor Membrii ai Gazetei Matematice: La mulți ani!

Glasul tânăr, cald și vibrant al d-lui Petre P. Teodorescu a produs o profundă impresie în întreaga asistență, care-l aplaudă îndelung pentru frumoasele sale gânduri și pentru promisiunile sale pline de hotărîre.

Dar iată acum o altă manifestare din partea concurenților — de rândul acesta de natură artistică literară: tânărul candidat Paul Constantinescu, din clasa VIII-a dela *Liceul din Predeal*, ne citește epigramele făcute de d-sa cu ocazia Concursului Gazetei Matematicei.

(Pentru ținerea concursului d-l Prof. O. Țino propune ca ascultarea candidaților să se facă într'o singură sală, în timp ce restul examinatorilor doreau ca examinarea să se facă simultan în mai multe săli).

La Gazetă ceartă mare
Pentru o chestie banală
Toți vor în săli examinare
Domnul Țino *într'o sală.*

(In timpul examinării d-l Prof. O. Țino cerea candidaților să scrie pe tablă semnul întrebării în dreptul elementelor ce trebuiau determinate).

Pentru ușurința demonstrării
Participăm la ea împreună
Domnul TINO *cu semnul întrebării*
Elevul? Câte-o vorbă bună.

Ultimele două rânduri ale acestui catren, au fost modificate, pe loc, de d-l general GH. BUICLIU în aplauzele asistenței, cu următoarele:

Domnul TINO *cu semnul întrebării*
Elevul? Cu semnul mirării.

Unui concurent norocos:

Nu prea avea vreo perspectivă.
Norocul însă l-a salvat.
A învățat din proectivă,
Din proectivă l'a întrebat.

Unei concurente:

La început avea speranțe
Era elevă valoroasă,
Norocul i-a jucat o farsă
Și a plecat cuminte . . . acasă.

Ghicitoare:

Intreabă, întreabă, întreabă
Din involuție mai cu seamă,
Cad concurenții precum brazii
Cum n'ați ghicit ? . . . Domnul PANTAZI.

La Mecanică:

Pe tablă un poligon de forțe
In sală au rămas doar trei
Examinatori. Restul zdrențe
Bieții elevi sunt rezistențe.

Unui candidat care a pierdut concursul:

Urca pe scări la « Universul *»*
Căuta mica publicitate
A doua zi apare versul:
Pierdut concurs Gazeta
Recompensa ? Cine poate . . .

Epigramele d-lui PAUL CONSTANTINESCU sunt primite cu aplauze, râsete și diferite comentarii mai mult sau mai puțin usturătoare mai ales de cei vizați direct.

Din păcate nu pot reda aici, modul admirabil în care au fost citite și nici privirile diavolești ce însoțeau această citire. Ulterior ia cuvântul d-l general GRIGORE ZAPAN:

Doamnelor, Domnişoarelor, Domnilor,

Din colţul ăsta în care împrejurările m'au aşezat, am avut toată perspectiva întregei săli şi deaceea am observat ceea ce nu s'a observat la mesele noastre. O prezenţă mai numeroasă de doamne şi domnişoare în mijlocul nostru şi cred că sunt în asentimentul tuturor ca să le aducem toate omagiile noastre.

Iarăşi împrejurările fac ca dacă altădată asistam la şedinţele şi la mesele comune în calitate de reprezentant al armatei active, astăzi asist în calitate de reprezentant al muncitorimii. In calitatea ce o am aduc salutul muncitorilor către prietenii şi viitorii tovarăşi de muncă, prin fabrici viitoare, care sunt astăzi candidaţi la concursul Gazetei.

Cred că direcţia ce vor îmbrăţişa-o va fi Politechnica sau Matematicile. Şi pentrucă a fost vorba de mici destăinuiri, eu sunt obligat să vă fac o mică destăinuire. Acum trei ani lucram într'o comisie, numit de guvernul român pe lângă reprezentanţii sovietici şi ca orice comisie, după terminarea lucrărilor, toate se înneacă într'un banchet. La acest banchet, împrejurările au făcut să stau alături cu unul din reprezentanţii muntorimii, astăzi vice-preşedinte al Consiliului de Miniştri, GH. GHEORGHIU-DEJ.

Observ la un moment dat că scria ceva cu creionul pe hârtie şi se tot frământa. Când mă uit, spre marea mea nedumerire, scria $1^3 + 2 + 3^3 + \ldots + n^3$, *şi se tot frământa şi nu găsea rezultatul. Până în cele din urmă ne-am lămurit împreună şi am ajuns la soluţia dorită. Ne-a explicat atunci că era pasionat pentru teoria numerelor. N'am ştiut această pasiune pentru matematici pe care o avea* GHEORGHIU-DEJ *şi probabil nu ştia nimeni decât profesorul lui şi tot aşa mi-a mărturisit că iubeşte mecanica raţională.*

Făcând această destăinuire, cred că sunt în asentimentul d-voastră, ca iubitor al ştiinţei matematice, în această calitate, să ne ridicăm gândul către acest muncitor care a fost unicul în situaţia aceasta, pasionat pentru matematici.

Asitenţa în picioare aclamă pe tov. Vice-Preşedinte al Consiliului de Miniştri GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ. In continuare d-l General GRIGORE ZAPAN spune:

Am asistat astăzi în fugă la câteva întrebări la cl. V-a şi cl. VIII-a şi sentimentul trecutului mi-a fost răscolit. Eram aproape să ies la tablă să fiu şi eu elev, aşa plăcut era. Cu aceasta vă urez pentru anul viitor, să ne vedem cu bine.

Asistenţa profund impresionată aplaudă îndelung pe d-l *General* GRIGORE ZAPAN.

In ceea ce priveşte ieşirea la tablă a d-sale, am avut impresia că cineva din sală propunea să candideze pentru clasa V-a, eventual clasa IV-a, pentru a avea ceva mai multe şanse de reuşită.

La cererea insistentă a concurenţilor ia cuvântul d-l Maior Ing. IONESCU-ŢIU:

Doamnelor, Domnilor şi Dragi Candidaţi,

Am fost chemat să vă vorbesc câteva cuvinte. Cred că m'aţi ales pe mine în credinţa că mă ocup cel mai mult de Supliment. Cel care se ocupă cel mai mult este însă d-l Ing. N. MIHĂILEANU.

In adevăr, este adresată corespondenţa pe adresa mea, dar lucrările pentru Supliment, d-l MIHĂILEANU *le face.*

Să-i cedăm cuvântul d-lui Prof. MIHĂILEANU.

Prins între ciocan și nicovală, d-l Profesor N. N. MIHĂILEANU rostește următoarele cuvinte:

Vreau să spun că în calitate de profesor care am asistat la concursul Gazetei Matematice pentru anul acesta, am observat că elevii au venit bine pregătiți.

S'au dat răspunsuri bune; cred că acest lucru se datorește seriozității acordate acestui concurs și cred că se datorește deasemeni și activității dusă de Gazeta Matematică și activității foarte mari a Suplimentului.

Intr'adevăr a început să ia proporții Suplimentul din Gazetă, care amenință să întreacă în mărime însăși Gazeta Matematică; acestea sunt lucruri îmbucurătoare. D-l ȚIU *pierde câteva zile bune pe lună cu redactarea lui și dorim ca în loc de 2 coale câte are Gazeta, să fie 3, numai să muncim. Termin cu rugămintea către membrii de a-mi da probleme, că altfel public problemele iarăși fără inițiale.*

Aplauze ce nu mai contenesc din partea tuturor și mai ales din partea elevilor, aduc mulțumirile întregii asistențe d-lor IONESCU-ȚIU și N. N. MIHĂILEANU pentru munca neprecupețită depusă spre a ridica nivelul cunoștințelor matematice în țara noastră. Grupul neastâmpărat al concurenților, îmi pare sub conducerea simpaticului nostru PAUL CONSTANTINESCU, cer ca d-l Profesor PANTAZI să ia cuvântul ceea ce face pe d-l ROȘU să ia cuvântul:

« *Dumneavoastră i-ați terorizat la concurs și văd că acum candidații vă terorizează ei* ».

Dar d-l Profesor PANTAZI, înțelept, nu ia în seamă această cerere.

Soarta este însă nemiloasă; iată acum grupul de concurenți scandând numele meu.

Mai puțin înțelept decât d-l PANTAZI încerc să spun câteva cuvinte:

Dragi Candidați,

In primul rând, fiind reporter al acestei mese comune nu am voie să țin cuvântări, rolul meu fiind de a înregistra discursurile altora și nu propriile mele cuvinte.

In al doilea rând vă asigur cu regret că această manifestare de simpatie nu va schimba cu nimic notele obținute de d-voastră la Mecanică.

In ceea ce privește rezultatele, pe care știu că le așteptați cu multă nerăbdare, vă voi răspunde după nemuritorul Caragiale: parte din d-voastră au răspuns perfect înafara chestiunilor de bază, ceilalți au fost destul de slabi necunoscând altceva decât toate problemele ce li s'au propus.

Dar marele MOLOCH cere victime noi: acum grupul concurenților scandează numele d-lui Prof. G. G. CONSTANTINESCU care ia cuvântul:

Mă surprinde apelul făcut de candidați, deoarece am absentat, câțiva ani de zile dela Gazeta Matematică.

Trebue să recunosc că sunt emoționat, fiindcă nu mă gândeam ca să vă spun aceste câteva cuvinte. Dacă d-nii candidați au făcut apel la câteva cuvinte din partea mea, voi spune următoarele în legătură cu o frază spusă astăseară, pe care am s'o transform, s'o anunț într'o teoremă. Anume, s'a spus astă seară că din când în când apare câte o personalitate care trezește prin puterea personalității sale, forțele adormite. Voi căuta să precizez sensul în care trebue luată această afirmare. Forțele rezidă în massă. Personalitatea fiind exterioară massei nu poate să desvolte această forță, ea

poate cel mult să se încadreze în direcția de manifestare a forței și prin calitatea sa, să-i dea posibilitatea de desvoltare și de atingerea rezultatului dorit.

Cred că succint teorema, după mine, a fost demonstrată.

Aștept demonstrația contrarie, dacă eu am greșit.

Teorema enunțată de d-l Prof. G. G. CONSTANTINESCU și demonstrația sa este primită cu vii și puternice aplauze ale întregei asistențe.

Ultima cuvântare este ținută de d-l General GH. BUICLIU.

Domnilor, conform tradițiilor de la mesele comune, ajunge o oră care se chiamă limita sărbătoririi noastre. Pentrucă mijloacele de transport nu pot să ne ducă cu viteza cu care dorim la diferitele puncte ale orașului — deaceea considerăm serbarea noastră încheiată mai devreme decât am dori.

Vă zicem rămas bun, să ne vedem la anul la cei care sunt dela cl. 7-a în jos.

Cu această cuvântare se încheie masa comună a « Gazetei Matematice ».

Pâlcuri, pâlcuri oaspeții, membrii și concurenții se îndreaptă spre ieșire; un grup compact înconjoară pe d-l Prof. G. G. CONSTANTINESCU spre a continua discuția în jurul teoremei sale și a frumoaselor analogii ce se pot face între massele materiale și massele sociale.

Astfel într'o plăcută comunitate de idei și sentimente se sfârși la ora 23 al 32-lea concurs al Gazetei Matematice.

* * *

Inainte de a încheia această dare de seamă, țiu să mulțumesc cu toată căldura distinsei și grațioasei d-re LAURA DASCĂLESCU pentru neprețuitul concurs ce mi-a dat la redijarea acestui text, d-sa binevoind a stenografia toate cuvântările, cuvântări pe care apoi mi le-a prezentat într'o formă absolut impecabilă.

* * *

Afară noaptea se lăsase; pe străzile aproape pustii trecători rari mergeau grăbiți spre casă.

Nouri subțiri albi acopereau ca un voal cerul; stele scânteiau ici și colo îndemnându-te să te gândești la « *frumosul și liniștea ce rezultă din contemplarea adevărului absolut* ».

ALEXANDRU STOENESCU.

RECREAȚIUNI

Intrebare binevoitoare. — *Profesorul.* Spune-mi *ce* termen trebue să lipsească în ecuația

$$ax^2 + bx + c = 0$$

pentru ca una din rădăcinile ei să fie zero ?.

VIRGIL GHIȚESCU

Metode. — *Prof.*: Prin câte metode poți face proba adunării ?

Elevul. (prompt): Prin două metode domnule profesor.

Prof.: Care sunt acestea ?

Elev. (sigur pe sine, apăsat): Metoda *întâia* și metoda *a doua*.

P. P. TEODORESCU

O anagramă curioasă. Se ştie că matematicianul D'ALEMBERT se numea BAPTISTE LE ROND după numele bisericii lângă care a fost părăsit ca copil abia născut. In *Bolletino* de A. CONTI şi G. LORIA, d-l J. CLARETIE observă că *Dalembertois* este un anagram dela BAPTISTE LE ROND şi că după surpimarea utlimelor trei litere *ois* şi introducerea apostrofei între primele două litere devine D'ALEMBERT.

D-l J. CLARETIE adaugă că după calculul probabilităţilor, sunt 2865 şanse contra una ca această soluţie a unei enigme istorice să fie adevărată.

Această curiozitate a fost publicată ca notă matematică la pag. 345. Vol. XLVIII *Mathesis*.

GH. B.

Bilion-Trilion-Quintilion. In ziarul «Adevărul» an 60 Nr. 16.557 din 10 Mai 1946, (provincie). — Găsim în articolul «Bilion sau Trilion», următoarele:

«Astfel, pentru francezi cuvintele miliard şi bilion sunt sinonime. Amândouă înseamnă acelaş lucru: o mie de milioane.

După nomenclatura franceză, o mie de bilioane sau de miliarde formează un trilion, o mie de trilioane un quadrilion, o mie de quadrilioane un quintilion şi aşa mai departe.

In limba germană şi cea engleză însă, o mie de milioane se numeşte miliard; pe când bilion înseamnă nu o mie ci un milion de milioane, sau o mie de miliarde, *adică bilionul german sau englez este egal cu trilionul francez, iar trilionul englez sau german*, înseamnă un milion de bilioane, *adică este egal cu quintilionul francez ...*».

Maior EUG. ŞT. SOCOLEŞ

Egalitate. $i^2 = 1$. Plec dela

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{-1}$$

$$\therefore \frac{1}{i} = \sqrt{-1} = i \quad \therefore \quad \frac{1}{i} = i.$$

Omit numitorii şi obţin:

$$1 = i^2 \quad \therefore \quad i^2 = 1.$$

Ceea ce era de demonstrat.

I. V. MĂTIAŞ

REZULTATUL CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE“ DIN ANUL 1948

Nu se putea, când pe tot întinsul țării noastre lumea muncitoare se întrece în realizări din ce în ce mai de luat în seamă, ca harnicii și distinșii corespondenți ai revistei *Gazeta Matematică* să nu ia parte la concursul *Gazetei Matematice* hărăzit, ca în aproape toți anii în care s'a ținut, în ultimile trei zile ale săptămânii luminate a Sf. Paști. Acest concurs între corespondenții *Gazetei Matematice* s'a ținut aproape în toți anii cu începere dela 1904, cu excepția anilor 1917—1920 din cauza primului război mondial, în anul *1940* fiind interzis de *Ministerul Educației Naționale* din motive politice; în anul 1944 din cauza ultimului război mondial; iar în anii 1930—1932 din lipsa de candidați.

In anul acesta au solicitat înscrierea la concurs *92* de candidați, dintre care au fost admiși, pe baza condițiilor participării la concurs (prevăzute de regulamentul lui), numai *51* candidați. Ținem să menționăm, că dintre cei *51* candidați admiși a lua parte la concurs, au lipsit *14* candidați și că din aceștia au înștiințat Societatea *Gazeta Matematică* numai doi candidați asupra motivelor, ce i-au împiedecat a îndeplini obligația de participare la concurs, iar din acești doi considerăm numai pe unul motivat.

In ce privește pe ceilalți *12* candidați neprezentați, Societatea *Gazeta Matematică* socotește faptul cu totul nepotrivit cu calitatea de corespondent al revistei *Gazeta Matematică*.

Dar cei ce s'au prezentat de data aceasta au arătat cu prisosință, că concursul a avut loc între elemente, care, în general, au meritat sacrificiile făcute de *Societatea Gazeta Matematică* pentru ținerea acestui concurs.

Lucrările au avut loc, ca de câțiva ani încoace, în localul Politehnicei București (lucrările scrise având loc în Marele Amphiteatru, iar lucrările pentru oral în alte două săli de cursuri), care deși în plin examen al sesiunii extraordinare, nu ne-a lipsit nici de data aceasta de binevoitoarea ei ospitalitate. Lucrările scrise au decurs într'o ordine perfectă în dimineața și după amiaza zilei de Joi 6 Mai și în dimineața zilei de 7 Mai. Lucrările scrise n'au fost eliminatorii, așa că toți candidații, care au ținut să ia parte la examenul oral, au putut lua parte și au arătat cel puțin pe această cale, că n'au înțeles a se prezenta la concurs nepregătiți.

Comisia examinatoare a fost formată din următorii membri ai Societăţii: AL. V. NICOLESCU pentru *Geometrie* la *clasa a IV-a* şi pentru *Algebră* la *clasa a V-a;* AUREL STAN pentru *Algebră* la *clasa a IV-a* şi pentru *Geometrie* la *clasa a V-a;* G-L GH. BUICLIU pentru *Algebră* la *clasa a VI-a;* C. IONESCU-ŢIU pentru *Trigonometrie* la *clasa a VI-a;* D. V. STOICA şi ADRIAN GHEORGHIU pentru *Geometrie* la *clasa a VI-a;* B. BARBALAT pentru *Algebră* la *clasa a VII-a;* ION CHIŢULESCU pentru *Geometria descriptivă* la *clasa a VII-a;* GH. D. SIMIONESCU pentru *Algebră* la *clasa a VIII-a;* AL. PANTAZI pentru *Geometria analitică* la *clasa a VIII-a* şi AL. STOENESCU pentru *Mecanică* la *clasa a VIII-a.*

In afară de membrii *Comisiei examinatoare* s'au interesat de aproape de mersul concursului, unii luând parte fie la supravegherea lucrărilor scrise, fie urmărind răspunsurile orale la diferitele clase şi materii, fie punând chestiuni alături de examinatori, după normele lăsate în tradiţie de intemeetorii acestor concursuri ale *Gazetei Matematice,* următorii membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*:

ANTONIU S. ION; AVRAMESCU AUREL; BĂDULESCU ALEXANDRA; BRATU I. MARIANA; BUDEANU I. C.; CLAUDIAN VIRGIL; CONSTANTINESCU GH. GH.; FLORESCU M. ULPIU; GEORGESCU I. N.; GHIŢESCU VIRGIL; IOAN ANA; IONESCU I. PAUL; IONESCU-BUJOR CONST.; LITEANU I. GH.; MEREUŢĂ EMILIAN; MIHĂILEANU N. N.; MIHU CERCHEZ; MIRESCU PETRE; POPP ALEXANDRU; POPP I. TRAIAN; ROŞU AL. AL.; SCODRANO AL.; STAN A. D.; TEODORESCU C. C.; ŢINO N. O.; ŢIŢEICA GABRIELA; ŢIŢEICA RADU; VASILIU C. ION; ZAPAN GRIGORE.

Asemenea au urmărit răspunsurile orale ale concurenţilor, în afară de membrii Societăţii *Gazeta Matematică,* profesori, vechi corespondenţi sau părinţi şi rude ale candidaţilor, următoarele persoane: D-l FLORESCU B. I.; D-na Ing. NĂSTASE MARIA; D-na MAGMUTENCO; D-l Avocat TH. IONESCU-BUJOR; D-na Profesoară IONESCU VIORICA.

Rezultatul concursului din acest an a fost *aproape foarte bun,* ţinând seamă de unele amănunte ale concursului. Impresia lăsată, în general, de examenul oral la unele materii.a fost excelentă.

Societatea *Gazeta Matematică* în şedinţa sa extraordinară din 11 Mai 1948, ascultând adnotările şi aprecierele membrilor

Comisiei examinatoare, a hotărît următoarele recompense în ordinea în care urmează:

1. D-lui TEODORESCU P. PETRE, elev în clasa a VIII-a a liceului „Matei Basarab" din Bucureşti, *premiul I.*

D-sa a dat *răspunsuri orale exelente* la *Geometria analitică* şi la *Mecanică, o lucrare scrisă excelentă* la *Mecanică* şi una *foarte bună* la *Geometria analitică.* I s'au acordat următoarele volume[1]: *Revista Gazeta Matematică, vol. V şi VI;* HENSELIN: *Rechentafel;* B. BIEWENGLOWSKI: *Cours d'Algèbre, t. I şi t. II;* GABRIELA ŢIŢEICA şi AL. STOENESCU: *Probleme de calcul vectorial;* O. ONICESCU şi GH. GALBURĂ: *Algebra,* vol. I.

In plus i s'a acordat: *Medalia Comemorativă G. M.* (bronz).

Fiind primul reuşit la acest Concurs i se acordă încă *premiul „Lt.-Col. G. Tănăsescu"*, conform regulamentului acestui premiu şi constând din volumul: *Culegere de probleme de Mecanică* de A. GH. IOACHIMESCU.

2. D-l MUNTEANU T. ION şi CONSTANTINESCU PAUL elevi în clasa a VIII-a a Coleg. Milit. „N. Filipescu", Predeal, *premiul II.*

D-l MUNTEANU T. ION s'a evidenţiat prin răspunsurile *orale foarte bune* şi lucrările *scrise bune* la *Algebră* şi *Geometrie analitică.*

I s'au acordat următoarele volume: *Revista Gazeta Matematică, vol. VII; Revista Gazeta Matematică,* vol. Jubiliar II; A. GH. IOACHIMESCU: *Mecanica Raţională;* O. ONICESCU şi GH. GALBURĂ: *Algebra,* vol. I; L. SCHRÖN: *Tables de logarithmes à sept décimales;* AL. STOENESCU: *Curs de Statică.*

D-l CONSTANTINESCU PAUL a dat probele scrise foarte bune la *Geometria analitică* şi *Mecanică* şi examenul oral de *Mecanică* foarte bun.

I s'au acordat următoarele: *Revista Gazeta Matematică,* vol. Jubilar I; A. GH. IOACHIMESCU: *Culegere de Probleme de Mecanică;* ION IONESCU: *Beton armat;* N. N. MIHĂILEANU: *Transformarea prin inversiune;* O. ONICESCU şi GH. GALBURĂ: *Algebra,* vol. I; GH. VRÂNCEANU: *Curs de Geometria analitică,* vol. I şi II.

3. D-ra NĂSTASE C. MARIA-ADRIANA, elevă clasa a IV-a a *Şcoalei Centrale de fete* din Bucureşti; D-l GHEORGHIU D. VA-

1) Premiile şi diplomele se pot ridica dela sediul societăţii în zilele de lucru cu începere dela 20 Iunie.

SILE, elev în clasa a V-a şi D-l TUDOR EMIL elevi clasa a VII-a ai *Colegiul Militar „N. Filipescu", Predeal, premiul III.*

D-ra NĂSTASE C. M. ADRIANA pe lângă răspunsuri orale *bune* la *Algebră* şi *foarte bune* la *Geometrie,* a dat o *excelentă lucrare scrisă* la *Algebră.* I s'au acordat următoarele volume: *Revista Gazeta Matematică,* vol. Jubiliar I; ROUCHÉ et COMBEROUSSE: *Traité de Géométrie* 1-ère et 2-ème partie; N. N. MIHĂILEANU: *Transformarea prin inversiune.*

D-l GHEORGHIU V. VASILE a dat o lucrare scrisă *foarte bună* la *Geometrie* şi răspunsuri *orale bune* la *Algebră* şi *Geometrie.* I s'au acordat următoarele volume: CH. MICHEL: *Compléments de Géométrie Moderne; Revista Gazeta Matematică,* vol. Jubilar I; N. N. MIHĂILEANU: *Corespondenţa Omografică;* N. N. MIHĂILEANU: *Transformarea prin inversiune.*

D-l TUDOR EMIL a dat probe, *scrisă* şi *orală, excelente* la *Geometria descriptivă.* I s'au acordat următoarele volume: TH. CARONNET: *Problèmes de Mecanique; Gazeta Matematică,* vol. Jubilar I; ION IONESCU: *Beton armat;* N. N. MIHĂILEANU: *Corespondenţa Omografică.*

4. D-l FĂCĂOARU GH. ION, elev clasa a VI-a, *Colegiul Militar „N. Filipescu", Predeal, premiul IV.*

D-sa s'a evidenţiat prin *lucrarea scrisă foarte bună* şi răspunsuri *orale foarte bune* la *Trigonometrie* şi o probă scrisă *bună* la *Algebră.*

I s'au acordat următoarele volume: TR. LALESCU: *La Géométrie du Triangle;* A. GH. IOACHIMESCU: *Culegere de Probleme de Mecanică;* AL. STOENESCU: *Teoria relativităţii.*

5. Pe lângă aceste premii s'au acordat următoarele menţiuni:

a) D-lui MĂNCESCU N. ION, clasa a VIII-a, *Colegiul Militar Predeal,* pentru ambele probe de *Mecanică.*

I se atribue următoarele volume: ION IONESCU: *Beton armat;* AL. STOENESCU: *Probleme de Calcul Vectorial.*

b) D-lui CERNESCU A. PETRE, elev clasa a VII-a, *Târgovişte* pentru *ambele probe* de *Geometrie descriptivă.*

I se atribue următoarele: *Revista Gazeta Matematică,* vol. IV; AL. STOENESCU: *Probleme de Calcul Vectorial.*

c) D-lui SULICA ALEXE, elev clasa a VI-a, *Colegiul Militar Predeal* pentru *proba orală* de *geometrie.*

I se atribue următoarele: *Revista Gazeta Matematică,* vol. Jubilar I; ION IONESCU; *Maxime şi minime geometrice.*

d) D-lui NEACŞU GH. ION, elev clasa a VI-a *Colegiul Militar Predeal* pentru *ambele probe foarte bune* de *Trigonometrie.*

I se atribue următoarele: *Revista Gazeta Matematică,* vol. Jubilar II; GABRIELA ŢIŢEICA şi AL. STOENESCU: *Teoria Giroscopului şi aplicaţiunile sale tehnice.*

e) RISTEA GH. GHEORGHE elev clasa a VI-a, liceul Piteşti pentru *Trigonometrie.*

I se atribue următoarele: *Revista Gazeta Matematică,* vol. Jubilar II, GABRIELA ŢIŢEICA şi AL. STOENESCU: *Teoria Giroscopului şi aplicaţiunile sale tehnice.*

f) IONESCU-BUJOR C. CLAUDIU, elev clasa a IV-a liceul *Mihai Viteazul,* Bucureşti pentru probele orale de *Algebră* (V) şi *Geometrie* (V).

I se atribue următoarele: *Gazeta Matematică,* vol. Jubilar II şi N. N. MIHĂILEANU: *Raportul Anarmonic.*

g) HANGAN M. TEODOR, elev clasa VI-a liceul *Titu Maiorescu,* Bucureşti pentru *Algebră.*

I se atribue: *Gazeta Matematică,* vol. Jubilar I; GABRIELA ŢIŢEICA şi AL. STOENESCU: *Teoria Giroscopului.*

Incheem acest raport în speranţa ca rezultatul viitorului concurs va da satisfacţie deplină şi acelor candidaţi care mai pot lua parte şi care de data aceasta nu au putut să pună în evidenţă buna lor pregătire şi pricepere.

DELEGAT PENTRU RAPOARTE
Prof. O. N. ŢINO.

SOLUŢII INTREGI ALE UNOR ECUAŢII DIOFANTICE

I. Ne propunem să găsim unele soluţii întregi ale ecuaţiilor de tipul $x^n + y^2 = z^2$.

1° Fie ecuaţia cunoscută $x^2 + y^2 = z^2$ rezultată din precedenta pentru $n = 2$. Avem :

$$(a^2 - b^2)^2 = (a + b)^2 (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= (a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2$$
$$\therefore \quad (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2.$$

Deci rezultă soluţiile cunoscute

$$x = a^2 - b^2 \quad , \quad y = 2ab \quad , \quad z = a^2 + b^2.$$

2° Fie ecuaţia $x^3 + y^2 = z^2$.

Avem, prin aceeaşi metodă,

$$(a^2 - b^2)^3 = (a + b)^3 (a - b)^3 =$$

$$= (a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3)(a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3)$$

$$= (a^3 + 3ab^2)^2 - (3a^2 b + b^3)^2$$

$$\therefore \quad (a^2 - b^2)^3 + (3a^2 b + b^3)^2 = (a^3 + 3ab^2)^2.$$

Prin urmare, avem pentru cazul 2° următoarele soluţiuni

$$x = a^2 - b^2 \quad , \quad y = 3a^2 b + b^3 \quad , \quad z = a^3 + 3ab^2$$

unde, evident, a şi b sunt numere întregi.

3° Să considerăm acum ecuaţia

$$x^4 + y^2 = z^2.$$

Pentru aceasta scriem

$$(a^2 - b^2)^4 = (a + b)^4 (a - b)^4 =$$

$$= (a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4)(a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4)$$

$$= (a^4 + 6a^2 b^2 + b^4)^2 - [4ab(a^2 + b^2)]^2$$

$$\therefore \quad (a^2 - b^2)^4 + [4ab(a^2 + b^2)]^2 = (a^4 + 6a^2 b^2 + b^4)^2.$$

Aşa dar, a şi b fiind numere întregi, rezultă următoarele soluţii ale ecuaţiei de la 3°.

$$x = a^2 - b^2 \quad , \quad y = 4ab(a^2 + b^2) \quad , \quad z = a^4 + 6a^2 b^2 + b^4.$$

4° Urmând mereu aceiaşi metodă, să mai considerăm şi ecuaţia

$$x^5 + y^2 = z^2.$$

Scriem după cum urmează

$$(a^2 - b^2)^5 = (a + b)^5 (a - b)^5 =$$

$$= (a^5 + 5a^4 b^2 + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5) \times$$

$$\times (a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b^2 - 10a^2 b^3 + 5ab^4 - b^5) =$$

$$= (a^5 + 10a^3 b^2 + 5ab^4)^2 - (5a^4 b + 10a^2 b^3 + b^5)^2$$

$$\therefore \quad (a^2 - b^2)^5 + (5a^4 b + 10a^2 b^3 + b^5)^2 = (a^5 + 10a^3 b^2 + 5ab^4)^2.$$

$$\therefore \quad x = a^2 - b^2 \; , \; y = 5a^4 b + 10a^2 b^3 + b^5 \; , \; z = a^5 + 10a^3 b^2 + 5ab^4.$$

In felul acesta putem găsi soluţii întregi pentru oricare ecuaţie de tipul enunţat, luând pentru n numere întregi oarecari.

II. Să încercăm să găsim soluţii întregi ale unor ecuaţii de forma $x^2 + y^2 = z^n$.

1°. Considerăm în primul rând tot ecuaţia pitagorică

$$x^2 + y^2 = z^2$$

pe care o scriem după cum urmează:

$$(a + bi)^2 (a - bi)^2 = (a^2 + b^2)^2 = (a^2 + 2abi - b^2)(a^2 - abi - b^2)$$
$$= (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2.$$

Regăsim astfel soluţiile date la I.

2°. Fie ecuaţia

$$x^2 + y^2 = z^3.$$

Avem după cum urmează

$$(a + bi)^3 (a - bi)^3 = (a^2 + b^2)^3 =$$
$$= (a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i)(a^3 - 3a^2bi - 3ab^2 + b^3i) =$$
$$= [a^3 - 3ab^2 + i(3a^2 - b^3)][(a^3 - 3ab^2) - i(3a^2b - b^3)] =$$
$$= (a^3 - 3ab^2)^2 + (3a^2b - b^3)^2$$

De unde rezultă următoarele soluţii întregi ale ecuaţiei considerate

$$x = a^3 - 3ab^2 \quad , \quad y = 3a^2b - b^3 \quad , \quad z = a^2 + b^2.$$

3°. Fie ecuaţia $x^2 + y^2 = z^4$.

$$(a+bi)^4 (a-bi)^4 = (a^2+b^2)^4 = (a^4+4a^3bi-6a^2b^2-4ab^3i+b^4) \times$$
$$\times (a^4-4a^3bi-6a^2b^2+4ab^3i+b^4) =$$
$$= (a^4-6a^2b^2+b^4)^2 + (4a^3b - 4ab^3)^2.$$

Rezultă următoarele soluţii ale ecuaţiei:

$$x = a^4 - 6a^2b^2 + b^4 \quad , \quad y = 4ab(a^2 - b^2) \quad , \quad z = a^2 + b^2.$$

4°. Pe o cale asemănătoare ajungem la soluţii întregi:

$$x = a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4 \quad , \quad y = 5a^4b - 10a^2b^3 + b^5 \quad , \quad z = a^2 + b^2$$

ale ecuaţiei $x^2 + y^2 = z^5$.

III. Ne vom servi acum de alt procedeu pentru a scoate soluţii întregi la unele tipuri de ecuaţii diofantice.

1° Fie ecuația pitagorică $x^2 + y^2 = z^2$.

Să punem $x = z\cos\theta$, $y = z\sin\theta$.

Exprimăm $\cos\theta$ și $\sin\theta$ în funcție de $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, prin formulele cunoscute

$$\cos\theta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}.$$

Să punem $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{b}{a}$, unde a și b sunt numere întregi oarecari. Găsim

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

$$\therefore \quad x = z\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right) \quad , \quad y = z\left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right).$$

Luând $z = a^2 + b^2$ regăsim soluțiile cunoscute.

2° Să găsim soluții întregi ale ecuației

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

Punem:

$$x = u\sin\theta\cos\varphi \quad ; \quad y = u\sin\theta\sin\varphi \quad ; \quad z = u\cos\theta.$$

Exprimăm în funcție de $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ și $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$; punem apoi $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{b}{a}$, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{d}{c}$, în care a, b, c, d sunt numere întregi. Reese:

$$x = u \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2} \cdot \frac{c^2 - d^2}{c^2 + d^2} \quad , \quad y = u \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2} \cdot \frac{2cd}{c^2 + d^2} \quad , \quad z = u \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Este suficient să luăm $u = (a^2 + b^2)\ (c^2 + d^2)$ pentru a avea valori întregi pentru x, y, z. Așa dar ecuația dată are următorul sistem de soluții întregi:

$$x = 2ab\ (c^2 - d^2) \quad , \quad y = 4abcd \quad ,$$

$$z = (a^2 - b^2)\ (c^2 + d^2) \quad , \quad u = (a^2 + b^2)\ (c^2 + d^2).$$

3°. La fel dacă considerăm ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = u^2.$$

Punem:

$$x = u \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma \quad , \quad y = u \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

$$z = u \sin\alpha \cos\beta \quad , \quad t = u \cos\alpha$$

Exprimăm în funcție de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ punând

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{d}{c}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{f}{e},$$

unde a, b, c, d, e, f sunt numere întregi. Rezultă că avem:

$$x = u \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2} \cdot \frac{2cd}{c^2+d^2} \cdot \frac{e^2-f^2}{e^2+f^2} \quad , \quad y = u \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2} \cdot \frac{2cd}{c^2+d^2} \cdot \frac{2ef}{e^2+f^2},$$

$$z = u \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2} \cdot \frac{c^2-d^2}{c^2+d^2} \quad , \quad t = u \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Soluțiile întregi sunt așa dar:

$$x = 4abcd\,(e^2-f^2) \quad , \quad y = 8abcdef \quad , \quad z = 2ab\,(c^2-d^2)\,(e^2+f^2),$$

$$t = (a^2-b^2)\,(c^2+d^2)\,(e^2+f^2) \quad , \quad u = (a^2+b^2)\,(c^2+d^2)\,(e^2+f^2).$$

IV. Pentru a termina, voi căuta și pe altă cale soluții întregi ale ecuației de tipul $x^n + y^2 = z^2$.

1°. Fie ecuația

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \therefore \quad x^2 = z^2 - y^2 \quad \therefore \quad x^2 = (z+y)\,(z-y).$$

Să punem

$$z + y = p^2 k \quad , \quad z - y = q^2 k$$

$$\therefore \quad z = \frac{(p^2+q^2)\,k}{2} \quad , \quad y = \frac{(p^2-q^2)\,k}{2}, \quad x = pqk.$$

Luând $k = 2t$, avem tipul de soluții:

$$x = 2pqt \quad , \quad y = t\,(p^2-q^2) \quad , \quad z = t\,(p^2+q^2).$$

2°. Fie acum ecuația $x^3 + y^2 = z^2$. Scriem:

$$x^3 = z^2 - y^2 \quad \therefore \quad x^3 = (z+y)\,(z-y).$$

Punem:

$$z + y = p^3 a^2 b \quad , \quad z - y = q^3 ab^2$$

$$\therefore \quad z = \frac{p^3a^2b + q^3ab^2}{2} \quad , \quad y = \frac{p^3a^2b - q^3ab^2}{2}, \quad x = pqab$$

Prin urmare avem şi soluţiile de forma:

$$x = pqab \quad , \quad y = \frac{1}{2} ab\,(p^3 a - q^3 b) \quad , \quad z = \frac{1}{2} ab\,(p^3 a + q^3 b)$$

unde p şi q sunt întregi de aceeaşi paritate.

3°. Pentru ecuaţia $x^4 + y^2 = z^2$ găsim la fel

$$x = pqab \quad , \quad y = \frac{1}{2} ab\,(p^4 a^2 - q^4 b^2) \quad , \quad z = \frac{1}{2} ab\,(p^4 a^2 + q^4 b^2),$$

unde p şi q sunt intregi de aceeaşi paritate.

4°. Dacă se consideră ecuaţia

$$x^5 + y^2 = z^2 \quad \therefore \quad x^5 = z^2 - y^2 = (z - y)\,(z - y)$$

şi punem:

$$\begin{cases} z + y = p^5 a^4 b, \\ z - y = q^5 ab^4; \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} z + y = p^5 a^3 b^2, \\ z - y + q^5 a^2 b^3; \end{cases}$$

deducem grupele de soluţiuni:

$$(A) \begin{cases} x = pqab, \\ y = \frac{1}{2} ab\,(p^5 a^3 - q^5 b^3), \\ z = \frac{1}{2} ab\,(p^5 a^3 + q^5 b^3); \end{cases} \qquad (B) \begin{cases} x = pqab, \\ y = \frac{1}{2} a^2 b^2\,(p^5 a - q^5 b), \\ z = \frac{1}{2} a^2 b^2\,(p^5 a + q^5 b), \end{cases}$$

unde numerele întregi p, q sunt de aceeaşi paritate.

VIRGIL CLAUDIAN
Profesor

ASUPRA UNOR CURBE SFERICE

Resumé. On détermine la condition, pour que la transformée de COMBESCURE d'une courbe sphérique soit aussi sphérique.

Cunoscându-se ecuaţiile intrinsece ale unei curbe strâmbe, curba este, după cum se ştie, complet determinată. In această notă, noi ne ocupăm de condiţia ca transformata lui COMBESCURE [1], a unei curbe sferice, să fie tot sferică. Insemnând cu $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$, s,

1) L. BIANCHI. *Lezioni di Geometria diff.* Vol. I, Parte I, pag. 50.

respectiv, curbura, torsiunea și arcul unei curbe sferice strâmbe, ecuația intrinsecă a curbei este [1]:

$$\rho^2 + T^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = R^2 \quad (R = \text{constantă} \; ; \; \rho \neq \text{constantă}). \tag{1}$$

Fie $\rho_1 = f(s)\,\rho \; ; \; T_1 = f(s)\,T \; ; \; ds_1 = f(s)\,ds \; ; \; f(s) > 0$ (2)

elementele curbei, transformată a lui COMBESCURE a curbei sferice (1).

Pentru ca această curbă să fie tot sferică, este necesar și suficient ca

$$\rho_1^2 + T_1^2\left(\frac{d\rho_1}{ds}\right)^2 = R_1^2 \quad (R_1 = \text{constantă}). \tag{3}$$

Ținând seamă de (2) rezultă

$$f^2\rho^2 + f^2T^2\left(\frac{d(f\,.\,\rho)}{ds}\cdot\frac{ds}{ds_1}\right)^2 = R_1^2. \tag{4}$$

Observând că

$$f^2T^2\left(\frac{d(f\,.\,\rho)}{ds}\cdot\frac{ds}{ds_1}\right)^2 = T^2\left(f^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 + \rho^2 f' + 2\rho f f'\frac{d\rho}{ds}\right)$$

și ținând seamă de (1) obținem prin împărțire cu $\rho^2 T^2 \neq 0$.

$$f'^2 + \frac{2\rho'}{\rho}ff' + \frac{R^2f^2 - R_1^2}{\rho^2T^2} = 0 \tag{5}$$

sau

$$f' = -\frac{\rho'}{\rho}f \pm \sqrt{\frac{f^2(T^2\rho'^2 - R^2) + R_1^2}{\rho^2T^2}}. \tag{5'}$$

Dar din (1) rezultă $T^2\rho'^2 - R^2 = -\rho^2$

deci

$$f' = -\frac{\rho'}{\rho}f \pm \sqrt{\frac{R_1^2 - \rho^2f^2}{\rho'T}}. \tag{6}$$

Pentru rezolvarea ecuației diferențiale (6) punem

$$F^2 = R_1^2 - \rho^2f^2 \quad \text{sau} \quad f = \pm\sqrt{\frac{R_1^2 - F^2}{\rho}} \tag{6'}$$

și derivând avem

$$f' = \mp\frac{\rho FF' + \rho'(R_1^2 - F^2)}{\rho^2\sqrt{R_1^2 - F^2}}. \tag{6''}$$

---

1) L. BIANCHI. *Idem*. pag. 40.

Deci din (6), (6') și (6'') rezultă

$$\mp \frac{\rho' \sqrt{R_1^2 - F^2}}{\rho^2} \mp \frac{F}{\rho T} = \mp \frac{\rho F F' + \rho' (R_1^2 - F^2)}{\rho^2 \sqrt{R_1^2 - F^2}} \tag{7}$$

sau

$$\pm \frac{F}{\sqrt{R_1^2 - F^2}} = -\frac{1}{T}. \tag{7'}$$

In (7') vom lua semnul inferior din membrul întâi, pentrucă trebuie să avem după (1) $f(s) > 0$.

Integrând avem deci

$$F'' = +R_1 \sin \int \frac{1}{T} ds \quad \text{sau} \quad f = +\frac{R_1}{\rho} \cos \int \frac{1}{T} ds. \tag{8}$$

Ținând seamă că din (1) rezultă $\frac{1}{T} = \pm \frac{d}{ds} \operatorname{arc\,sin} \frac{\rho}{R}$

urmează din (8) că

$$f = \frac{R_1}{R} \frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho}. \tag{8'}$$

Ecuația verificată de (8') este $f' = -\frac{\rho'}{\rho} f - \frac{\sqrt{R_1^2 - \rho^2 f^2}}{\rho T}$.

In consecință, curba Γ_1 transformată a lui COMBESCURE a curbei sferice dată, este complect determinată, și avem

$$\rho_1 = \frac{R_1}{R} \sqrt{R^2 - \rho^2}\ ;\ T_1 = \frac{R_1}{R} \frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho} T\ ;\ ds_1 = \frac{R_1}{R} \frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho} ds. \tag{2'}$$

Să aplicăm aceiași transformare curbei (2') astfel ca transformata să fie pe sfera de raza R_2. Vom avea, ținând seamă de (2')

$$\rho_2 = \frac{R_2}{R} \rho\ ;\ T_2 = \frac{R_2}{R} T\ ;\ ds_2 = \frac{R_2}{R} ds. \tag{2''}$$

Continuând aceste transformări, astfel ca *a* n^a transformată, să se găsească pe o sferă de rază R_n vom avea

$$\rho_n = \frac{R_n}{R_{n-2}} \rho_{n-2}\ ;\ T_n = \frac{R_n}{R_{n-2}} T_{n-2}\ ;\ ds_n = \frac{R_n}{R_{n-2}} ds_{n-2} (n = 2, 3 \ldots) \tag{9}$$

Dacă $R = R_1 = R_2 = \ldots R_n$ atunci curbele Γ_i $(i = 2, 3, \ldots n)$ sunt direct congruente, adică se pot suprapune printr'o mișcare în spațiu.

Aplicație. Să presupunem că curba sferică Γ este indicatoarea sferică, a tangentelor unei curbe $C(\rho_0, T_0, s_0)$. In acest caz

avem

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{\rho_0^2 + T_0^2}}{T_0}\ ;\ \frac{1}{T} = \frac{-\rho_0^3 \frac{d}{ds_0} \left(\frac{T_0}{\rho}\right)}{\rho_0^2 + T_0^2}\ ;\ ds = \frac{1}{\rho_0} ds_0.$$

Aplicând rezultatele găsite mai sus, presupunând că $R_1 = R$ găsim

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\sqrt{\rho_0^2 + T_0^2}}{\rho_0}\ ;\ \frac{1}{T_1} = \frac{T_0^3 \frac{d}{ds_0}\left(\frac{\rho_0}{T_0}\right)}{\rho_0^2 + T_0^2}\ ;\ ds_1 = \frac{1}{T_0} ds_0 \qquad (10)$$

și care determină în mod intrinsec curba Γ_1.

Curba Γ_1 determinată de (10) coincide, după cum se poate verifica, cu indicatoarea sferică a binormalelor curbei.

ING. F. MARCUS.

RAPORT ASUPRA PREMIULUI DE TRIGONOMETRIE „V. CRISTESCU" PE ANUL 1946—1947

Subsemnații membri ai Comisiei pentru acordarea premiului de trigonometrie « V. CRISTESCU » pe anul 1946—1947, cercetând volumul LII al *Gazetei Matematice*, am constatat că d-l P. P. TEODORESCU, elev clasa a VIII-a la liceul Matei Basarab, corespondent al *Gazetei Matematice*, îndeplinește condițiunile regulamentului pentru acordarea acestui premiu.

Activitatea d-sale, în cadrul acestui regulament se compune din:

1. Probleme rezolvate: Nr. 5972, 5886, 6104, 5912.
2. Exerciții propuse: Nr. 12 și 26.
3. Note Matematice: Nr. 21. Asupra exercițiului 8 din G. M., LII, pag. 333.

D-sa este un harnic corespondent al G. M. și premiant al concursurilor ei.

Pentru aceasta propunem a i se acorda premiul de trigonometrie « V. CRISTESCU », pe anul 1946—1947.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL DE TRIGONOMETRIE „V. CRISTESCU"

Ing. I. S. ANTONIU, G-l GH. LITEANU,
Prof. AL. V. NICOLESCU.

Acest raport a fost aprobat în ședința Adunării Generale din 17 Februarie 1948.

NOTE MATEMATICE

29. *Volumul tetraedrului în funcţie de muchiile sale.* Fie în tetraedrul OABC:

$$\overline{OA} = a;\ \overline{OB} = b;\ \overline{OC} = c;\ \overline{BC} = a';\ \overline{CA} = b';\ \overline{AB} = c'.$$

In *„Exercices de Trigonomètrie"* par F. G. M. éd. 1915, pag. 238 se arată că volumul tetraedrului e dat de

$$T = \frac{1}{12}\sqrt{P}$$

unde

$$P = 4a^2b^2c^2 - \Sigma a^2(b^2+c^2-a'^2)^2 + \Pi(b^2+c^2-a'^2)$$

din aceasta se obţine prin desvoltare

$$P = \Sigma a^2a'^2(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2) - \Sigma a^2b^2c'^2 - a'^2b'^2c'^2$$

şi nu desvoltarea *greşită*, dată în F. G. M.

Dacă schimbăm pe a în α; ... a' în a; ... obţinem formula dată de d-l ing. I. C. VASILIU în G. M. vol. XLIV, pag. 124.

PETRE P. TEODORESCU.

30. *Terminaţiunile patratelor perfecte.* Fie T_α, T şi T_β terminaţiunile de n cifre a 3 patrate perfecte consecutive. Din

$$(x+1)^2 + (x-1)^2 = 2(x^2+1)$$

se deduce

$$T_\alpha + T_\beta \equiv 2(T+1) \qquad (mod.\ 10^n) \qquad (1)$$

Pentru $n = 2$ congruenţa (1) este suficientă pentru determinarea lui T_α şi T_β când se cunoaşte T dacă ţinem seama de următoarele observaţiuni:

a) Terminaţiunile de 2 cifre ale patratelor perfecte sunt de una din formele

$$00,\ (2a)1,\ (2a)4,\ 25,\ (2a+1)6,\ (2a)9$$

a fiind o cifră.

b) Dacă $T = (2a)1$, $T_\alpha = 00$ $\therefore$ $T_\beta \equiv 2(T+1)$ $(mod.\ 100)$

c) Dacă $T = (2a+1)6$, T_α sau T_β este 25.

d) Dacă $T = (2a)4$ una din terminaţiunile T_α sau T_β este cuprinsă între 00 şi T deci

$$2T_\alpha \equiv T - 2 \qquad (mod.\ 100)$$

e) Dacă $T = (2a)9$ una din terminaţiunile T_α şi T_β este cuprinsă între 25 şi T, deci

$$2T_\alpha \equiv T - 23 \qquad (mod.\ 100).$$

Efectuând toate calculele, care sunt foarte simple, putem alcătui următorul tablou, care dă soluţia problemei 3332[1]), în toate cazurile ce se pot ivi. Enunţul acelei probleme este:

Din şirul patratelor perfecte se opresc numai ultimele două cifre. Cum se poate deduce fie-care grupă de două cifre din precedenta?

Valoarea lui T	Valorile lui T_α şi T_β sunt congruente cu expresiile de pe linie, faţă de modulul 100
$T = 00$	01 şi 01; 21 şi 81; 41 şi 61
$T = (2a)1$	$T_\alpha \equiv 0$, $T_\beta \equiv 2(T+1)$
$T = (2a)4$	$T_\alpha = (2b)9$ $\quad \frac{3T+6}{2}$, $T_\beta \equiv \frac{T-2}{2} = (2c)1$
$T = 25$	16 şi 36; 56 şi 96; 76 şi 76
$T = (2a+1)6$	$T_\alpha = 25$, $T_\beta = 2T - 23$
$T = (2a)9$	$T_\alpha = (2b)4 \equiv \frac{3T-19}{2}$, $T_\beta = (2c+1)6 \equiv \frac{T-23}{2}$

Pentru $n > 2$, putem enunţa regula:

Dacă se dă T, *valorile lui* T_α *şi* T_β *pot fi una oarecare din grupele de numere:*

$$T_\alpha \equiv 2M_i + T + 1 \ , \ T_\beta = -2M_i + T + 1 \qquad (mod.\ 10^n)$$

unde M_i *sunt toate numerile mai mici de cât* 25.10^{n-2} *ale căror patrate se termină cu* T.

Este de observat că există o singură valoare pentru M_i numai când T este pereche şi prim cu 5, două valori când T este prim cu 10 şi mai multe valori când T este divizibil prin 5.

I. B. FLORESCU.

---

1) Rezolvată pe altă cale la pag. 557, Vol. XLVIII, G. M.

31. *Asupra focarelor elipsei lui* STEINER. Fac următoarele două rectificări la articolul cu acest titlu, care mi s'a publicat la pag. 289 din acest volum:

I. Formula de la pag. 293, care dă distanța focală f se înlocuește prin

$$f = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{S(\operatorname{cotg}^2 w - 3)}$$

II. Formula care urmează acesteia și care dă pe f^2, se înlocuește prin

$$f^2 = \frac{32}{3}\frac{R^2 S}{W' W''}.$$

EMIL MARINESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL « GAZETEI MATEMATICE » DIN ANUL 1948

Probele scrise din 6 Mai 1948

(Timpul acordat: 3 ore pentru fiecare materie)

CLASA a VI-a

Algebra. I. Să se demonstreze că fracția

$$\frac{n^2+1}{n(n^2-1)}$$

generează o fracție zecimală periodică mixtă.

II. Știind că p este un număr prim se cere:

1°. Să se găsească toți divizorii numărului

$$N = p \times 2^n$$

2°. Să se calculeze suma tuturor divizorilor lui N, inclusiv 1 și N.

3°. Să se determine p așa în cât N să fie egal cu suma tuturor divizorilor lui, exclusiv N.

III. Să se calculeze produsul

$$P = \sqrt{a+\sqrt{x}} \times \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{x}}} \times \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{x}}}} \times \sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{x}}}}$$

IV. Un capital A depus la bancă spre fructificare aduce în 15 luni o dobândă de 900 lei. Un alt capital B, cu 6000 de lei mai mic de cât precedentul, dar depus cu un procent cu 0,5% mai mare ca primul, aduce o dobândă de 945 lei în 18 luni. Care sunt cele două capitaluri și procentele cu care au fost depuse?

G-L. GH. BUICLIU.

Geometria. I. Dacă se dă raportul anarmonic $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \lambda$ şi dacă 0 este mijlocul segmentului AB, avem:

$$\frac{1-\lambda}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AD}} - \frac{\lambda}{\overline{AC}} \quad (1) \; ; \qquad \overline{OC} \cdot \overline{OD} = \frac{\overline{AB}^2}{4} + \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} \quad (2)$$

II. Să se determine polii de inversiune prin raze vectorii reciproce, aşa că:

1. Punctele reciproce a trei puncte date să fie vârfurile unui triunghiu echilateral sau două dintre ele să fie simetrice faţă de al treilea.

2. Dacă r_a, r_b, r_c sunt razele a trei cercuri date şi r'_a, r'_b, r'_c razele cercurilor inverse, să avem:

$$r_a r'_a = r_b r'_b = r_c r'_c.$$

3. Inversele cercurilor trecând prin patru puncte date, luate câte trei, să fie egale, adică reciprocele celor patru puncte date să fie vârfurile şi ortocentrul unui triunghiu.

D. Stoica.

Trigonometria. 1°. Să se rezolve ecuaţia:

$$sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + cos\left(\frac{5\pi}{24} - x\right) + cos\frac{\pi}{24} = 0$$

2°. *a)* Să se arate că într'un triunghiu oarecare ABC avem

$$a\,sin\,(\theta \pm A \pm C) + b\,sin\,(\theta \mp B \mp C) + c\,sin\,\theta = 0$$

oricare ar fi θ.

b) Relaţiile dela *a)* se menţin dacă înlocuim sinusul prin cosinus

3°. Să se arate că suprafaţa S a unui triunghiu oarecare ABC poate fi exprimată de relaţiile

$$4S = (b^2 + c^2 - a^2)\,tg\,A = (b^2 - c^2)\,tg \sphericalangle AMB,$$

unde M este mijlocul laturei BC.

4°. Să se arate că într'un triunghiu oarecare ABC avem

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8} \text{ şi } \left(\frac{b+c}{a} - 1\right)\left(\frac{c+a}{b} - 1\right)\left(\frac{a+b}{c} - 1\right) \leqslant 1.$$

(Chestiunea 3° sau 4° este la alegere).

C. Ionescu-Ţiu.

CLASA a VII-a

Algebra. Se consideră într'un plan raportat la două axe rectangulare Ox, Oy, un domeniu care conține originea în interior, de pildă cercul cu centrul în origină și cu raza 1. In acest domeniu se definește funcția $f(x, y)$ care este nulă în origină și egală cu $\frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ în afara originei.

1. Făcând transformarea $x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta$, unde $\rho \geqslant 0$ și $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, să se arate că funcția $f(x, y)$ este continuă și în punctul 0.

2. Să se calculeze derivatele $f'_x(x, y)$ și $f'_y(x, y)$ într'un punct diferit de origină și apoi și în origină. Să se arate că aceste derivate sunt continui și în punctul 0.

3. Să se calculeze derivatele $f''_{xy}(x, y)$ și $f''_{yx}(x, y)$ într'un punct diferit de origină și în origină și să se verifice astfel că $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$. Să se arate că funcțiile $f''_{xy}(x, y)$ și $f''_{yx}(x, y)$ nu sunt continui în origină.

4. Să se facă un studiu analog pentru funcția $F(x, y)$ care se definește ca egală cu zero în origină și egală cu $y^2[L(x^2 + y^2) - L\,y^2]$ în afara originei. (L este simbolul logaritmilor naturali).

B. BARBĂLAT.

Geometria discriptivă. Linia pământului este paralelă cu marginile mici ale paginei a treia a foii, și la mijloc.

Se consideră ca origine a ordonatelor capătul din stânga al liniei pământului de pe marginea din stânga a paginei.

Se dă:

1. Planul $P\alpha P'$. Punctul α (50,0,0) [1]), urma $\alpha P'$ face un unghiu de 45° pe dreapta cu linia pământului, iar αP, 30°.

2. Punctul A (150,0,0).

Din A se deduce perpendiculara AIB pe planul P, punctul I fiind piciorul perpendicularei pe planul P, iar punctul B, simetricul lui A, față de I pe dreapta AIB.

Se cere să se construiască proiecțiunile octaedrului regulat care are dreapta AIB, în mărime și poziție ca una din diagonalele sale, știind că una din diagonalele patratului diagonal al octaedrului, care se găsește în planul P, se află pe dreapta de cea mai mare pantă a planului P.

In ambele proiecțiuni, muchiile octaedrului se vor trasa prin linie plană, dacă sunt văzute în proiecțiunea respectivă și prin linie întreruptă dacă muchia respectivă nu este văzută.

Să se construiască adevărata mărime a laturei octaedrului. Pe pagina a doua a foii de hârtie se va da o legendă scrisă a metodelor întrebuințate și a mersului lucrării.

ING. I. I. CHIȚULESCU.

---

1) Cele trei numere reprezintă: primul număr este distanța liniei de ordine a punctului, față de origine; al doilea depărtarea și al treilea cota. Cotele sunt date în milimetri.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Politehnicei „Gh. Asachi" din Iaşi. Tome 2. Fasc. 2. Iulie-Decembrie 1947. VICTOR LALAN: Etude des coefficients du binome, modulo le nombre premier *p*. F. MARCUS: Sur quelques surfaces en relation avec les congruences de WAELSH. F. REUTTER: Ueber ganze rationale Funktionen einer Dualkomplexen Veraenderlichen. ŞT. PETRESCU: Sur la géometrisation des systèmes PFAFF. I. CREANGĂ: Sur une correspondance entre deux surfaces reglées. Urmează alte articole cu subiecte tehnice.

Quaterly of applied mathematics. Vol. VI. April 1948. No. 1. J. KAMPÉ DE FÉRIET: Harmonic analysis of the two-dimensional flow of an incompressible viscous fluid. J. L. SYNGE: The method of the hypercicle in elasticity when body forces are present. PAUL I. RICHARDS: General impedance function theory. M. ZBIGNIEW KRZWOBLOCKI: A general approximation method in the theory of plates small deflection. H. J. GREENBERG & R. TRUELL: On a problem in plain strain. J. F. CARRIER & C. C. LIN: On the nature of the boundary loyer near the leading edge of a flat plate. F. S. SHAW: Integral equation by relaxation methodes.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVIII. Nr. 3, Mai 1948. VINCENZO G. CAVALLARO: La génération plus naturelle des cercles de NEUBERG par les segments torricelliens, etc. Notă matematică. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

GH. TH. GHEORGHIU. Curs de geometrie. Vol. I. Geometrie plană elementară. Tipografia Românească. Timişoara 1947.

GH. TH. GHEORGHIU. 67 examene de admitere la Politehnicele din România. Fascicola I conţine 142 probleme de geometrie plană şi în spaţiu. Ediţia II, 1947. Litografiat.

GH. TH. GHEORGHIU. 67 examene de admitere la Politehnicele din România. Fascicula II. Probleme de algebră. Ediţia II, 1947.

GH. TH. GHEORGHIU. 67 examene de admitere la Politehnicele din România. Fascicola IV: Probleme de geometrie analitică şi probleme de sinteză 1947.

A. GLODEN & G. PALAMÀ. Bibliographie des multigrades avec quelques notices biographiques. Luxembourg 1948.

AMOS SABRAS GURREA. Fundamentos de Algebra Superior 1942. Litografiat.

RAMÓN MARTORELL OTZET. Caracteristicas de la carta preliminar del territorio nacional. Vol. XXXVI.

RAMÓN MARTORELL OTZET. La proyeccion gnomonica sobre el horizonte de Ciudad Trujillo. Publicaciones de la Universidad de Santo Domingo. Vol. XXXIX.

RAMÓN MARTORELL OTZET. Teoria de los errores de observacion, aplicada a la Topografia, Geodesia y Astronomia. Segunda parte. Ciudad Trujillo. 1945. Litografiat.

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 244. (Gazeta Matematică, XL, 266). Ca urmare la răspunsul din G. M. Vol. LIII, pag. 273 [1]), dau următoarele informaţiuni, culese din *Istoria Românilor* de CONST. C. GIURESCU, Vol. III, p. II, pag. 916, 1946.

La 15 Aprilie 1641 voievodul cumpără cu 200 taleri, localul necesar şcolii: o casă de piatră pe *« uliţa ciobotărească »*, lângă heleşteul pe care-l forma atunci Bahluiul. Pentru susţinerea şcolii, — deci şi pentru plata dascălilor, — îi dă trei moşii: Răchitenii, Tomşenii şi Iuganii, precum şi venitul *« feredeului »* — baia publică.

La şcoala lui VASILE LUPU se predau: teologia, retorica, dialectica, gramatica, *aritmetica, geometria, astronomia* şi muzica. Exista şi o bibliotecă: e amintit un manuscris de retorică din 1664 pe care au învăţat fiii lui MIRON COSTIN.

Pe vremea lui VASILE LUPU existau la Iaşi şi alte şcoli. Misionarul BANDINI dă cifra de *douăzeci*, adăogând că totalul elevilor abia atinge *două sute* („vix ducenti").

PETRE P. TEODORESCU
clasa a VIII-a B. Lic. „Matei Basarab"

DIVERSE

a) Adunările Societăţii „Gazeta Matemetică"

Adunarea generală extraordinară din ziua de 8 Iunie 1948 a ales ca membri ai Societăţii *Gazeta Matematică* pe: D-l Profesor CEZAR COŞNIŢĂ, D-na Profesoară VIORICA IONESCU şi D-l Profesor EMIL C. MIRON.

b) Sporirea bibliotecii „Gazeta Matematică"

Dr. F. G. MEHLER. Hauptsätze der Elementar-Mathematik. Ausgabe A. Druck und Verlag von GEORG REINER. Berlin 1835—1908.

Donată de D-l G-L GH. BUICLIU.

c) Şedinţele Societăţii Române de Matematici

Societatea Română de Matematici, sub preşidenţia d-lui Prof. V. VÂLCOVICI, a reluat şirul comunicărilor cu caracter elementar. Prima şedinţă s'a ţinut la 24 Mai a. c. Au făcut comunicările arătate în dreptul numelui d-nii:

C. COŞNIŢĂ: Asupra unei teoreme DARBOUX.

A. KAHANE: Funcţiuni de variabile legate.

Şedinţa următoare va avea loc Luni 21 Iunie 1948 orele 19 în localul Facultăţii de Matematică, Bucureşti.

---

1) A se vedea şi răspunsul dat de d-l Prof. P. SERGESCU la pag. 372 din numărul precedent.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2240. *Se dă un triunghiu în care latura* BC *fiind fixă, vârful* A *descrie cercul circumscris. Să se afle înfăşurata cercului lui* BROCARD *al triunghiului* ABC.

AL. PROCA.

In condiţiile problemei, centrul O al cercului ABC este fix, iar punctul simedian K descrie o elipsă bitangentă cercului ABC. (A se vedea de ex. F. G. M.).

Astfel fiind, problema se reduce la a găsi înfăşurata cercului de diametru OK, unde O e fix şi K descrie elipsa sus arătată (sau mai general o curbă oarecare).

Fie K şi K_1 două poziţii vecine ale punctului K şi P intersecţia cercurilor (OK), (OK_1). Dreptele KP şi K_1P fiind perpendiculare pe OP, rezultă că dreapta KK_1 trece prin P. La limită dreapta KK_1 devine tangentă în K la curba descrisă de acest punct, iar P este punctul de tangenţă al cercului (OK) cu înfăşurata sa.

Aşa încât înfăşurata cercului (OK) este podara punctului O faţă de elipsa descrisă de K (sau mai general faţă de o curbă oarecare descrisă de K).

S'au primit soluţii dela d-nii: N. C. ROTARU şi ER. C. ISTRATI (XXI).

I. C. V.

PROBLEMA 4664. *Care este cel mai mare patrat cu toate cifrele diferile şi pare?*

Dar cu toate cifrele diferite şi impare?

Problemă analoagă pentru cuburi.

ULPIU M. FLORESCU.

A. *Patrate.* Folosim următoarele propoziţiuni cunoscute referitoare la patrate şi cifrele lor finale.

a) *Niciun patrat perfect nu poate fi M3 — 1.*

b) *Dacă un patrat este M3 el este M9.*

c) *Ultima cifră a unui patrat nu poate fi 2, 3, 7, 8.*

d) *Nulele la sfârşitul unui patrat sunt în număr pereche.*

e) *Patratele terminate cu 6 au cifra zecilor nepereche.*

f) *Patratele terminate cu 1, 4, 9 au cifra zecilor pereche.*

g) *Patratele terminate cu 5 au cifra zecilor 2. (Culegere de probleme de Aritmetică,* I. IONESCU, ed. II. Cap. XLVIII).

1°. Cifrele pare fiind 0, 2, 4, 6, 8, a căror sumă este 20, deducem că nu putem forma niciun patrat cu toate cele 5 cifre distincte, căci numărul ar fi M3 — 1.

Deci patratul căutat va avea cel mult 4 cifre. Din aceste cifre nu poate lipsi 0, deoarece altfel suma cifrelor rămâne 20.

Patratul căutat nu se poate termina decât cu 4, proprietăţile *c), d), e)* precedente.

Patratul poate fi deci alcătuit folosind cifrele 0 şi 4 cu cele $C_3^2 = 3$ combinări între celelalte 3 cifre.

Grupările posibile vor fi

$$2, 6, 0, 4 \ ; \ 2, 8, 0, 4 \text{ şi } 8, 6, 0, 4$$

Dar prima grupă este M3 fără a fi M9; grupa a doua este M3 — 1; rămâne de cercetat numai grupa a treia, care este M9.

Cu cifrele acestei grupe formăm numerele:

$$8604, 8064, 6804, 6084$$

scrise în ordinea descrescândă.

Descompunând în factori primi, găsim:

$$8604 = 2^2 . 3^2 . 239 \ ; \ 8064 = 2^7 . 3^2 . 7 \ ; \ 6804 = 2^2 . 3^5 . 7;$$

$$6084 = 2^2 . 3^2 . 13^2.$$

Deci singurul patrat perfect cu toate cifrele pare, este

$$6084 = 78^2.$$

2°. Patratele perfecte formate cu cifre impare nu pot fi terminate decât cu 1, 9 sau 5 (prop. *c*). Dar toate aceste patrate trebue să aibă cifra zecilor pereche (prop. *f* şi *g*).

Concluzia este că cel mai mare patrat format cu cifre impare este $9 = 3^2$.

B. *Cuburi.* Pentru a trata chestiunea referitoare la cuburi folosim următoarele propoziţiuni cunoscute. *(Culegere de probleme de aritmetică* de I. IONESCU, Cap. XLIX).

h) *Orice cub perfect este sau M9 ± 1 sau M27 (deci şi M9).*

i) *Dacă un cub se termină cu 0, el se termină cu 3M nule.*

j) *Dacă ultima cifră e 5, zecile sunt 2 sau 7.*

k) *Dacă ultima cifră e 2 sau 6, zecile sunt neperechi.*

l) *Dacă ultima cifră e 4 sau 8 zecile sunt perechi.*

3°. Să examinăm cazul cifrelor pereche.

Cubul nu poate avea toate cele 5 cifre pare, nici cele 4 cifre pare semnificative, căci ar fi M9 + 2.

Ar putea fi de 4 cifre, între care 0 nu poate lipsi.

Ultima cifră poate fi 4 sau 8 (vezi *i*, *k*, *l*).

Cubul poate fi format din grupele de cifre:

0, 2, 6, 4; 0, 2, 8, 4; 0, 6, 8, 4 şi 0, 2, 4, 8; 0, 2, 6, 8; 0, 4, 6, 8.

Numai grupele ultime din ambele şiruri (care sunt formate din aceleaşi cifre) satisfac condiţia *h*, fiind M9.

Cu cifrele acestei grupe, putem forma tabloul

8604, 8064, 6084, 6804, 4608, 4068, 6048, 6408.

Eliminând numerele care nu sunt divizibile cu $8 = 2^3$, ne rămân numerele

8064, 4608, 6048, 6408.

Observăm că am plecat dela o grupă care e M9 şi eliminând pe acelea care, divizate cu 3 nu ne dau un nou M9, ne rămâne

$$6048 = 2^5 . 3^3 . 7$$

care nu e cub.

Deci nu există cub cu 4 cifre pare distincte.

Să cercetăm numerele de 3 cifre.

Grupurile de 3 cifre ce se pot forma cu cifrele pare, în număr de $C_5^3 = 10$, sunt

024, 026, 028, 046, 048, 068, 246, 248, 268, 468.

Eliminăm grupul 026 care nu conţine una din cifrele 4 sau 8 şi aplicăm celorlalte grupe criteriul *h*.

Numai grupele 028, 046 şi 486 satisfac acel criteriu şi dau numerele de trei cifre

208, 604, 468, 648, 684, 864.

După eliminarea celor ce nu se divid cu 8 ne rămân numerele

208, 648 şi 864

care, descompuse în factori primi, dau

$$208 = 2^4 . 13 \quad ; \quad 648 = 2^3 . 3^4 \quad ; \quad 864 = 2^5 . 3^3$$

din care niciunul nu e cub.

Cercetând acum numerele de două cifre se găseşte uşor că singura soluţie a acestui caz este

$$64 = 4^3.$$

4°. Cuburi cu cifre impare diferite.

Cum $1+3+5+7+9 = 25 = M9+7$ numărul căutat nu poate avea 5 cifre.

Il căutăm printre numerele de 4 cifre impare diferite. Aceste numere se deduc formând toate permutările posibile în fiecare din $C_5^4 = 5$ combinări, formate cu cele 5 cifre:

1357, 1379, 1359, 1579, 3579.

Din aceste grupe vom păstra însă numai grupa 1359, pentrucă celelalte nu verifică propoziţia *h*. Dintre numerele deduse din această combinare, îndepărtăm pe cele terminate cu 5, pe baza propoziţiei *j*.

Se formează astfel tabloul:

1359, 1539, 1593, 1953, 9153, 5139, 5193, 5913, 9513,

3159, 3519, 3591, 3951, 9351, 5319. 5391, 5931, 9531.

In acest tablou singurele numere M27 sunt:

1539, 1593, 9153, 5913, 3159, 3591, 5319, 9531

şi câturile nefiind cuburi perfecte, deducem că, afară de 1, nu există cub perfect format numai din cifre impare diferite.

Soluţia de faţă a fost redactată, în mare parte, după cea trimisă de d-l PETRE BOLDESCU, în anul 1936.

D-sa a examinat însă un număr mult mai mare de numere la cazul 1° şi 3°, iar la cazul 3° a pierdut soluţia $64 = 4^3$ şi a dat soluţia greşită $8 = 2^3$.

D-l VALERIU A. PETCU (Lic. „Mihai Viteazul", Bucureşti) a dat soluţia exactă şi completă, pe o cale analoagă.

Observaţiuni. 1°. Enunţul acestei probleme nu pare să lase loc la interpetări. Totuşi s'au primit 2 soluţiuni dela o d-ră şi un corespondent, foarte activi în acea vreme, care au interpretat că toate cele 5 cifre, pare sau impare, trebue să figureze în numărul căutat. In consecinţă n'au găsit nicio soluţie.

Un alt corespondent n'a considerat că cifra 0 este pară.

2°. N'am folosit direct în soluţia de mai sus tabloul ultimelor două cifre cu care se poate termina un patrat, pentrucă propoziţiile enunţate sunt mai uşor de reţinut. Am insistat asupra criteriilor deduse din divizibilitatea cu 3, pentrucă au fost neglijate de toţi corespondenţii, afară de d-l PETRE BOLDESCU, care a tratat şi partea referitoare la cuburi.

3°. Au găsit soluţiunile numerice, folosind tabloul ultimelor două cifre ale patratelor şi ridicând la cub numerele 1—46, d-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU, AURELIAN CĂLINESCU şi MIRCEA GRUMĂZESCU.

U. M. F.

4°. Dacă nu se pune condiţia ca cifrele să fie *diferite* se găsesc următoarele patrate de 5 cifre pare:

$2^2 = 00004$; $8^2 = 00064$; $20^2 = 00400$; $80^2 = 06400$; $22^2 = 00484$;
$162^2 = 26244$; $168^2 = 28244$; $200^2 = 40000$; $202^2 = 40804$; $220^2 = 48400$;
$262^2 = 68644$; $298^2 = 88804$.

Aceste numere sunt soluţiile problemei 5762, propusă de I. IONESCU, şi rezolvată la pag. 476, Vol. XLVIII.

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 5106. *Să se găsească un cub perfect de nouă cifre de forma*

$$N^3 = 10^6 x + 10^3 y + z$$

ştiind că numerele x, y, z *de câte 3 cifre sunt legate între ele prin relaţia*

$$y = x + z + 1.$$

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de d-l P. P. DRĂGHICESCU.

Eliminând pe z între relaţiile din enunţ se găseşte

$$N^3 + 1 = (N+1)(N^2 - N + 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13\ [999x + y]. \quad (1)$$

Se observă că

$$N^2 - N + 1 = (N+1)^2 - 3N$$

ceia ce înseamnă că $N + 1$ şi $(N+1)^3 - 3N$ nu pot avea alţi divizori comuni de cât divizori de ai lui 3N. Cum însă un divizor al lui N nu divide pe $N + 1$ de cât dacă divide pe 1, rezultă că cei 2 factori consideraţi nu pot avea alt divizor comun de cât pe 3. Prin urmare nici unul din factorii produsului $7 \cdot 11 \cdot 13$ nu poate divide simultan pe $N + 1$ şi pe $N^2 - N + 1$. Se deduce că pentru rezolvat problema trebue examinate următoarele 8 posibilităţi:

1°. $N+1=1001m$; 2°. $N^2-N+1=1001m$;
3°. $N+1=7m$ cu $N^2-N+1=143n$; 4°. $N+1=11m$ cu $N^2-N+1=91n$;
5°. $N+1=13m$ cu $N^2-N+1=77n$; 6°. $N+1=77m$ cu $N^2-N+1=13n$;
7°. $N+1=91m$ cu $N^2-N+1=11n$; 8°. $N+1=143m$ cu $N^2-N+1=7n$;

1°. N^3 fiind de 9 cifre urmează că

$$N < 1000 \therefore N + 1 < 1001$$

deci egalitatea 1° *nu dă soluții.*

2°. Rezolvând pe 2° în raport cu N și considerând numai soluția pozitivă, se găsește:

$$2N = 1 + \sqrt{4004m - 3}$$

Pentru ca N să fie întreg trebue să avem

$$4004m - 3 = X^2 \quad \therefore \quad 4\,(1001m - 1) = (X - 1)\,(X + 1) \quad (2)$$

ceia ce arată că X este nepereche. Fie

$$X = 2p + 1$$

care dus în (2) dă

$$p^2 + p + 1 = 1001m.$$

Suma p^2+p+1 nu se divide însă prin 11, după cum ușor se poate verifica înlocuind pe p prin $11+r$ și dând lui r succesiv toate valorile 0, 1, 2, ..., 9, 10. Prin urmare (2) nu are loc în numere întregi și deci 2° *nu dă soluții.*

3°. Inlocuind în 3° pe N prin $7m - 1$ se găsește

$$44m^2 - 12m + 5m^2 + m + 3 = 11 \cdot 13n.$$

Procedând ca la 2° se constată că suma $5m^2 + m + 3$ nu se divide cu 11 și deci egalitatea precedentă nu are loc în numere întregi, prin urmare cazul 3° *nu dă soluții.*

4°. Inlocuind pe N prin $11m - 1$ se găsește

$$119m^2 - 35m + 2m^2 + 2m + 3 = 7 \cdot 13 \cdot n$$

Dar $2m^2 + 2m + 3$ se divide prin 7 numai dacă

$$m = 7p + 1 \quad \text{sau} \quad m = 7p + 5$$

Pentru prima valoare avem

$$N = 77p + 10$$

$$N^2 - N + 1 = 13 \cdot 65p^2 + 13 \cdot 16p + 13 + p\,(2p + 1) = 13n$$

$$\therefore \qquad p = 13t \quad \text{sau} \quad p = 13t + 6$$

care dau $N = 1001t + 10$ și $N = 1001t + 472$

care dau soluțiile

$$N^3 = 10^3 = 000.001.000 \quad \text{cu} \quad 001 = 000 + 000 + 1$$

$$N^3 = 472^3 = 105.154.048 \quad \text{cu} \quad 154 = 105 + 048 + 1$$

Se găseşte pe aceiaşi cale soluţia

$$N^3 = 439^3 = 084.604.519 \quad \text{cu} \quad 604 = 084 + 519 + 1.$$

Procedând la fel pentru celelalte cazuri găsim că 5^0 şi 7^0 nu dau soluţii iar 6^0 şi 8^0 admit soluţiile

$$153^3 = 003.581.577 \quad \text{cu} \quad 581 = 003 + 577 + 1$$

$$285^3 = 023.149.125 \quad \text{cu} \quad 149 = 023 + 125 + 1$$

$$615^3 = 232.608.375 \quad \text{cu} \quad 608 = 232 + 375 + 1.$$

Notă. 1°. Soluţia precedentă este analoagă cu acela dată la pag. 598 Vol. XLV, problemei 5151, propusă tot de d-l V. THÉBAULT, în care se cereau pătratele de 9 cifre pentru care

$$y = x + z + 1.$$

2°. D-l ŞT. C. TILICĂ a examinat problema parţial şi a găsit soluţiile 472^3 şi 615^3.

3°. D-l P. P. DRĂGHICESCU a dat şi următoarele numere asemănătoare celor din enunţul problemei.

a) $N^3 = 10^6 x + 10^3 y + z \quad \text{cu} \quad x + z = y + 1$

$$1^3 = 000.000.001 \; ; \quad 100^3 = 001.000.000 \; ; \quad 144^2 = 002.985.984;$$

$$386^3 = 057.512.556 \; ; \quad 562^3 = 177.504.328 \; ; \quad 848^3 = 609.800.192.$$

b) $N^3 = 10^6 x + 10^3 y + z \quad \text{cu} \quad x + z = y + 1002$

$$529^3 = 148.035.889 \; ; \quad 714^3 = 367.061.696 \; ; \quad 991^3 = 973.242.271.$$

c) $N^4 = 10^6 x + 10^3 y + z \quad \text{cu} \quad x + z = y + 1$

$$34^4 = 001.336.336.$$

d) $N^3 = 10^6 x + 10^3 y + z \quad \text{cu} \quad x + z = y + 1$

$$1^6 = 000.000.001 \; ; \quad 10^6 = 001.000.000 \; ; \quad 12^6 = 002.985.984.$$

4°. D-l V. THÉBAULT a dat în nota de la pag. 357, Vol. XLIII al *Gazetei Matematice,* cuburile

$$349^3 = 042.508.549 \quad \text{şi} \quad 848^3 = 609.800.192$$

pentru care

$$x + y = z + 1 \quad \text{şi} \quad x + z = y + 1.$$

GH. B.

PROBLEMA 6168. *Se circumscrie triunghiului echilateral* ABC *de latură* a, *un triunghiu dreptunghic* A'B'C' ($\sphericalangle$ BA'C = 90°), *care are* $\sphericalangle$ BC'A = 30°. *Insemnând cu* S *o suprafață, să se determine unghiul* A'BC = x, *astfel încât ariile*:

$$S_{B'CA} \; ; \; S_{A'BAC} \; ; \; S_{C'AB}$$

să fie în progresie aritmetică.

Să se verifice pe cale geometrică rezultatul aflat.

GH. D. SIMIONESCU.

Soluție dată de d-nii: M. V. MIȘICU (Politehnica București), IOAN I. NOVAC (liceul „N. BĂLCESCU" Brăila), și VIRGIL G. CONSTANTINESCU (liceul Slatina).

Pentru a exprima ariile din enunț avem nevoe în primul rând de unghiurile de mai jos; în funcție de unghiul x:

$\sphericalangle A'CB = 90^0 - x$; $\sphericalangle ACB' = 180^0 - 60^0 - (90^0 - x) = x + 30^0$;

$\sphericalangle CAB' = 180^0 - 60^0 - (x + 30^0) = 90^0 - x$;

$\sphericalangle C'AB = 180^0 - 60^0 - (90^0 - x) = x + 30^0$;

$\sphericalangle C'BA = 180^0 - 60^0 - x = 120^0 - x$.

Folosind formulele care dau aria unui triunghiu atunci când se cunoaște o latură și cele două unghiuri alăturate, avem:

$$S_{B'CA} = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin(x+30^0) \sin(90^0-x)}{\sin 60^0} = \frac{a^2 \sin(x+30^0) \cos x}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$S_{A'BAC} = S_{A'BC} + S_{ABC} = \frac{1}{2} a^2 \sin x \cos x + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2(\sqrt{3}+\sin 2x)}{4} \quad (2)$$

$$S_{C'AB} = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin(x+30^0) \sin(120^0-x)}{\sin 30^0} =$$

$$= a^2 \sin(x+30^0) \sin(x+60). \quad (3)$$

Dacă ținem seamă de formulele care transformă produsele trigonometrice în sume:

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

și

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

atunci (1) şi (3) se mai pot scrie sub formele:

$$S_{B'CA} = \frac{a^2[\sin(2x+30^0)+\sin 30^0]}{2\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}\sin(2x+30^0)}{6} + \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \quad (1')$$

$$S_{C'AB} = \frac{a^2[\cos -30^0 \cos(2x+90^0)]}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sin 2x}{2} \quad (3')$$

Condiţia ca cele trei arii din enunţ să fie în progresie aritmetică este:

$$2\,S_{A'BAC} = S_{B'CA} + S_{C'AB} \quad (4)$$

Inlocuind aci expresiile din (1'), (2) şi (3') obţinem:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2\sin 2x}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{12} + \frac{a^2\sqrt{3}\sin(2x+30^0)}{6} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sin 2x}{2}$$

ecuaţia trigonometrică în care termenii $\frac{a^2\sin 2x}{2}$ se reduc, iar după aceia se poate împărţi cu $a^2\sqrt{3}$. Gonind apoi numitorii obţinem:

$$\sin(2x+30^0) = 1 \quad \text{deci} \quad 2x+30^0 = 90^0 \quad \therefore \quad x = 30^0. \quad (5)$$

Verificarea geometrică. Pentru $x = 30^0$ latura A'C' este perpendiculară pe AB, iar Δ B'AC este echilateral. Luăm pe AC' punctul D astfel ca $\sphericalangle ABD = 60^0$. Triunghiul ABD este tot echilateral, iar BDC' se desparte prin înălţimea din D în două triunghiuri egale fiecare cu A'BC. Astfel cele trei arii din enunţ sunt în progresie aritmetică, având raţia $S_{A'BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Soluţia a II-a. Inlocuim în (4) expresiile ariilor aşa cum se găsesc în (1), (2), (3) şi după împărţirea cu a^2 avem:

$$\frac{\sqrt{3}+\sin 2x}{2} = \frac{\sin(x+30^0)\cos x}{\sqrt{3}} + \sin(x+30^0)\sin(x+60^0)$$

$$= \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sqrt{3}\cos^2 x}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sin 2x}{2}.$$

Termenul $\frac{\sin 2x}{2}$ se reduce, iar în ecuaţia rămasă înlocuim pe $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$. Ecuaţia se reduce la

$$\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2. \quad (6)$$

Rezolvarea se poate face imediat observând că prin împărţirea cu 2 se capătă:

$$\sin 2x \cos 30^0 + \cos 2x \sin 30^0 = 1 \quad \therefore \quad \sin (2x + 30) = 1$$

adică tocmai (5).

Metoda generală de rezolvare a ecuaţiilor de forma (6) constă în a împărţi cu unul din coeficienţi, de ex. $\sqrt{3}$:

$$\sin 2x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos 2x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

apoi se pune $\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^0 = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0}$. Se ajunge tot la (5).

Au rezolvat problema pe căi apropriate d-nii: MIRCEA D. POPA, SLT. CONSTANTIN ŞERBAN, RADU I. BEŞCHEA, CEZAR BOERESCU, CRISTU CANTUNIAR, PETRE D. COLUMBEANU, GH. A. GRIGORE, ŞTEFAN I. GHEORGHIŢĂ, MIRCEA V. SOARE, MIRCEA D. PETCULESCU, A. I. VARGĂ (studenţi la şcoala Polit. Bucureşti), MIRCEA A. SĂVESCU (colegiul „Sf. Sava" Bucureşti), ANDRÉ E. DONEAUD, DINU SENI (liceul „T. Maiorescu" Bucureşti), PETRE P. TEODORESCU (liceul „Matei Basarab" Bucureşti), MIHAI A. BARBAIANI (liceul „Aurel Vlaicu" Bucureşti), RADU SP. HARET (lycée français Bucureşti), GEORGE V. MANOLESCU (liceul „Bălcescu" Brăila), MIHAI R. CONSTANTINESCU (liceul „Petru şi Pavel" Ploeşti), CONST. C. CORDUNEANU, ION T. MUNTEANU şi COST. V. ROŞU (colegiul naţional „N. Filipescu" Predeal); VALERIU A. PETCU (liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti); AL. GH. MORAITE (Bacalaureat, Bucureşti); AL. N. PANTEA (liceul „Samuil Vulcan" Beiuş); D. I. CRĂCEA (liceul „Radu Greceanu" Slatina).

Observări. 1°. Intre cele două metode desigur că prima este mai elegantă fiindcă are calcule mai puţine şi duce direct la ecuaţia (5). Majoritatea corespondenţilor însă au folosit metoda a II-a şi au ajuns la ecuaţia (6). Din toţi cei citaţi la a doua soluţie numai d-l A. I. VARGĂ a rezolvat această ecuaţie prin metoda generală ajungând la forma (5).

Ceilalţi au exprimat pe $\sin 2x$ şi $\cos^2 x$ (sau $\cos 2x$) în funcţie de $\operatorname{tg} x$, sau au făcut o ridicare la patrat. Vreau să atrag atenţia în special că ridicările la patrat sunt periculoase fiindcă introduc rădăcini în plus, iar dacă aci au dus la rezultat, se datoreşte faptului că x e un unghiu ascuţit.

Din cele de mai sus se desprinde faptul că nu se cunoaşte de către corespondenţi metoda generală de rezolvare a ecuaţiilor de forma $a \sin x + b \cos x = c$.

2°. Problema aceasta a fost dată la concursul G. M. din anul 1945. Nici un candidat nu a rezolvat-o şi de aceia am publicat-o ca problemă propusă.

G. D. S.

PROBLEMA 6192. *Fiind dat triunghiul* ABC, *să se afle locul punctelor* M *ale căror triunghiuri podare sunt automediane. Să se examineze şi cazul când* ABC *este el însuşi automedian.*

ANDREI DOBRESCU.

Presupunând triunghiul podar $A_0B_0C_0$ al punctului M automedian — cu B_0C_0 ca latură mijlocie —, însemnează că avem:

$$2\overline{B_0C_0}^2 = \overline{A_0B_0}^2 + \overline{A_0C_0}^2.$$

Ţinând seamă de relaţiile:

$$\overline{B_0C_0} = \overline{AM}.\sin A = \frac{a\cdot\overline{AM}}{2R},$$

$$\overline{C_0A_0} = \overline{BM}.\sin B = \frac{b\cdot\overline{BM}}{2R},$$

$$\overline{A_0B_0} = \overline{CM}.\sin C = \frac{c\cdot\overline{CM}}{2R},$$

unde a, b, c sunt laturile, iar R raza cercului circumscris triunghiului ABC, (1) se mai scrie:

$$-2a^2.\overline{AM}^2 + b^2.\overline{BM}^2 + c^2.\overline{CM}^2 = 0, \qquad (2)$$

care este ecuaţia tripolară a unui cerc (Ω_a), coordonatele tripolare ale centrului Ω_a şi raza ρ_a fiind date de relaţiile:

$$\overline{A\Omega_a}^2 = \frac{b^2c^2(2b^2+2c^2-a^2)}{(2a^2-b^2-c^2)^2}, \quad \overline{B\Omega_a}^2 = \frac{c^2a^2(2a^2+2b^2-c^2)}{(2a^2-b^2-c^2)^2}$$

$$\overline{C\Omega_a}^2 = \frac{a^2b^2(2a^2+2c^2-b^2)}{(2a^2-b^2-c^2)^2}, \quad \rho_a^2 = \frac{3a^2b^2c^2}{(2a^2-b^2-c^2)^2}. \qquad (3)$$

In mod asemănător, locul punctului M, al cărui triunghiu podar $A_0B_0C_0$ este automedian — cu C_0A_0 ca latură mijlocie — este cercul (Ω_b) de ecuaţie:

$$a^2.\overline{AM}^2 - 2b^2.\overline{BM}^2 + c^2.\overline{CM}^2 = 0, \qquad (4)$$

iar locul punctului M, al cărui triunghiu podar $A_0B_0C_0$ este automedian — cu A_0B_0 ca latură mijlocie — este cercul (Ω_c) de ecuaţie:

$$a^2.\overline{AM}^2 + b^2.\overline{BM}^2 - 2c^2.\overline{CM}^2 = 0. \qquad (5)$$

Cercurile (Ω_a), (Ω_b), (Ω_c) trec prin centrele izodinamice W, W' ale triunghiului ABC, deoarece triunghiurile podare ale acestor puncte, fiind echilaterale, pot fi socotite automediane cu oricare latură ca latură mijlocie.

Urmează că centrele Ω_a, Ω_b, Ω_c sunt pe dreapta lui LEMOINE a triunghiului ABC.

Se ştie însă (a se vedea de ex. C. d. P. de Geometrie de G. ŢIŢEICA, pag. 157, soluţia problemei 64, cap. IX, sau *Exercices de géomètrie moderne* par G. PAPELIER, tome I, II-ème édition, p. 35—36) că centrul cercului de ecuaţie tripolară:

$$\alpha \cdot \overline{AM}^2 + \beta \cdot \overline{BM}^2 + \gamma \cdot \overline{CM}^2 = K \qquad (6)$$

este punctul în care se întretaie cevienele AA', BB', CC', care împart laturile triunghiului fundamental ABC în rapoartele:

$$\frac{A'B}{A'C} = -\frac{\gamma}{\beta}, \quad \frac{B'C}{B'A} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{C'A}{C'B} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

[Aceasta revine a spune că centrul cercului (6) are coordonatele baricentrice α, β, γ].

Deducem că centrele Ω_a, Ω_b, Ω_c sunt pe simedianele interioare ale triunghiului ABC.

In definitiv putem enunţa:

Locul punctelor din planul unui triunghiu ABC, *ale căror triunghiuri podare sunt automediane, este format din trei cercuri* (Ω_a), (Ω_b), (Ω_c), *care fac parte din fascicolul determinat de cercurile lui* APOLLONIUS *şi ale căror centre sunt punctele de întretăiere ale simedianelor interioare cu dreapta lui* LEMOINE *a triunghiului* ABC.

In cazul particular când triunghiul ABC este el însuşi automedian, de ex. cu BC ca latură mijlocie, potrivit relaţiilor (3) rezultă că *cercul* (Ω_a) *degenerează într'o dreaptă, anume dreapta* WW' *a lui* BROCARD. Cât priveşte cercurile (Ω_b) şi (Ω_c), ele sunt simetrice faţă de WW', de oarece (Ω_b) *trece prin al doilea punct* Ω' *al lui* BROCARD, *pe când* (Ω_c) *trece prin primul punct* Ω *al lui* BROCARD, iar aceste puncte sunt simetrice faţă de WW'.

In adevăr, dacă M vine în Ω', $A_0B_0C_0$ devine triunghiul podar $\gamma'\alpha'\beta'$ al lui Ω' (γ' pe BC, α' pe CA şi β' pe AB), asemenea cu ABC şi deci automedian cu $\beta'\gamma' \equiv C_0A_0$ ca latură mijlocie, astfel că Ω' aparţine cercului (Ω_b).

Dacă M vine în Ω, $A_0B_0C_0$ devine triunghiul podar $\beta\gamma\alpha$ al lui Ω (β pe BC, γ pe CA şi α pe AB), asemenea cu ABC şi deci automedian, cu $\beta\gamma \equiv A_0B_0$ ca latură mijlocie, astfel că Ω aparţine lui (Ω_3).

Notă. 1°. Au dat soluţii analoage d-nii: EMIL MARINESCU (student-inginer Bucureşti), C. S. TĂNĂSESCU (Bucureşti), LT. MIRCEA D. POPA şi EUGEN WEGENER (student-inginer Bucureşti).

(De menţionat soluţiile — aproape complete — ale d-lor MARINESCU şi TĂNĂSESCU).

2°. D-l MIRCEA R. CONSTANTINESCU (clasa VIII-a liceul „Sf. Petru şi Pavel" Ploeşti) a dat o soluţie prin geometria analitică (folosind coordonate carteziene rectangulare), cu greşeli.

3°. D-l EMIL MARINESCU observă că *segmentele determinate de laturile triunghiului* ABC *pe dreptele lui* SIMSON $A_aB_aC_a$ şi $A'_aB'_aC'_a$ *ale punctelor* M_a *şi* M'_a, *în care cercul* (Ω_a) *taie cercul* (O, *circumscris triunghiului* ABC, *verifică relaţiile:*

$$\overline{B_aC_a}^2 = 2\,\overline{A_aB_a}\cdot\overline{A_aC_a}\ ,\quad \overline{B_aC_a}^2 = 2\,\overline{A_aB_a}\cdot\overline{A_aC_a},$$

relaţii analoage verificând şi segmentele determinate de laturile lui ABC pe dreptele lui SIMSON ale punctelor în care cercul (O) este tăiat de (Ω_b) şi (Ω_c).

4°. Tot D-l MARINESCU enunţă proprietatea: *Locul punctelor din planul triunghiului* ABC, *ale căror triunghiuri podare sunt dreptunghice, este format din 3 cercuri, având centrele în vârfurile triunghiului tangenţial al lui* ABC *şi trecând fiecare prin câte 2 din vârfurile lui* ABC.

Această proprietate se poate demonstra pe o cale asemănătoare cu cea urmată mai sus [1].

5°. Se poate enunţa încă proprietatea: *Dacă* ABC *este automedian cu* BC *ca latură mijlocie, dreapta lui* BROCARD *şi dreapta lui* LEMOINE *se întâlnesc pe* BC.

Este de ajuns să demonstrăm că centrul ω_a al cercului lui APOLLONIUS relativ la latura BC se găseşte pe dreapta WW' a lui BROCARD, la care se reduce cercul (Ω_a). Se constată imediat că coordonatele tripolare absolute ale lui ω_a:

$$\overline{A\omega_a} = \frac{abc}{|b^2-c^2|}\ ,\quad \overline{B\omega_a} = \frac{ac^2}{|b^2-c^2|}\ ,\quad \overline{C\omega_a} = \frac{ab^2}{|b^2-c^2|} \qquad (2)$$

verifică relaţia (2).

ANDREI DOBRESCU.

---

1) O demonstraţie geometrică şi alte proprietăţi ale acestor cercuri am dat în articolul *„Asupra triunghiurilor podare şi unor cercuri ataşate unui triunghiu"* (POZITIVA, anul I, nr. 9—10).

2) *„Despre centrele izodinamice"* (*Gazeta Matematică*, L, p. 349).

PROBLEMA 6228. *Un vas semisferic de rază* R, *conține apă jumătate din capacitatea lui. Să se calculeze:*

1°. *Valoarea maximă a unghiului cu care putem înclina vasul, pentru ca apa să nu curgă din el.*

2°. *Forța necesară ce trebue aplicată pe marginea vasului, perpendiculară pe suprafața apei, pentru a-l menține în această poziție.*

C. MIHU.

1°. Fie V, volumul sferei și V_1 volumul segmentului sferic de înățțime h, ce conține apă. Conform enunțului, trebue să avem:

$$V_1 = \frac{V}{4} \quad \text{adică} \quad \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) = \frac{\pi R^3}{3}$$

ecuație ce se poate scrie sub forma:

$$\left(\frac{h}{R}\right)^3 - 3\left(\frac{h}{R}\right)^2 + 1 = 0; \tag{1}$$

Prin substituția: $\frac{h}{R} = 1 - x$; ecuația (1) devine:

$$x^3 - 3x + 1 = 0; \tag{2}$$

Formula lui CARDAN dă:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}};$$

sau, sub formă trigonometrică:

$$x = (\cos\beta + i\sin\beta)^{\frac{1}{3}} + (\cos\beta - i\sin\beta)^{\frac{1}{3}} \quad \text{cu} \quad \beta = \frac{2\pi}{3};$$

Desvoltând și simplificând găsim:

$$x = 2 \cdot \cos\frac{\beta + 2k\pi}{3}; \qquad k = 0,\ 1,\ 2.$$

Cele trei rădăcini ale ecuației (2) vor fi:

$$x_0 = 2\cos 40^0 = 2\cdot\sin 50 > 1; \ldots k = 0;$$
$$x_1 = 2\cdot\cos 160^0 = -2\cdot\sin 70 < -1; \ldots k = 1;$$
$$x_2 = 2\cdot\cos 280 = 2\cdot\sin 10 < 1; \ldots k = 2;$$

Din figură se vede că:

$$1 - \frac{h}{R} = \frac{R-h}{R} = \sin\alpha = x$$

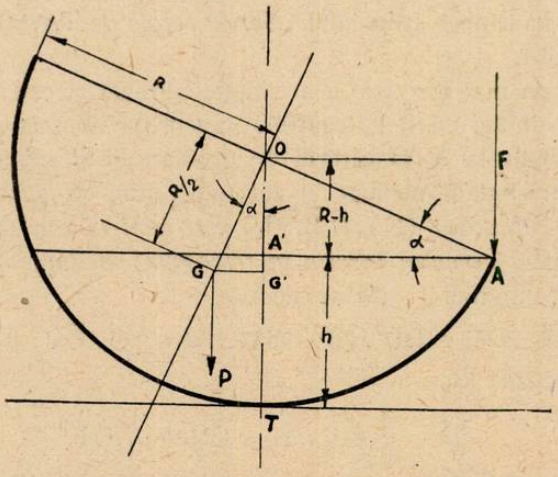
cum $x = \sin\alpha$; trebue ca: $-1 \leqslant x \leqslant 1$; deci vom avea o singură soluţie reală a ecuaţiei (2);

$$x = \sin\alpha = 2\sin 10 = 2 \times 0,\ 17365 = 0,3473;$$

$$\alpha = 20^0 19'20'';$$

cum: $$\frac{h}{R} = 1 - x = 1 - 0,3473 = 0,6527;$$

găsim deasemenea: $h = 0,6527\,R;$



2⁰. Fie F, forţa aplicată pe marginea vasului, perpendiculară pe suprafaţa apei şi P greutatea vasului gol.

Luând momentele în raport cu punctul de contact (T) al vasului cu planul orizontal, avem:

$$\bar{F} \times AA' = \bar{P} \times GG' \qquad (3)$$

cum: $AA' = R\cos\alpha$; $GG' = OG \cdot \sin\alpha = \frac{R}{2}\sin\alpha$; ecuaţia (3) devine

$$\bar{F} \cdot R \cdot \cos\alpha = P \cdot \frac{R}{2};\ \sin\alpha; \quad \text{de unde:} \quad F = \frac{P}{2} \cdot tg\alpha;$$

în care, α are valoarea $20^0 19'20''$

$$F = 0,18847 \cdot P.$$

Notă. La această problemă au trimis soluţii bune d-nii: CEZAR N. I. BOERESCU, PETRE D. COLUMBEANU MIRCEA D. POPA (Studenţi Politehnica Bucureşti), VAL. G. I. STANCIU şi I. C. UDREA (Lic. Militar Craiova).

Soluţiile trimise de d-nii: MIRCEA V. SOARE, VIRGIL G. CONSTANTINESCU şi AL. GH. MORAITE au unele erori.

C. MIHU.

PROBLEMA 6273. *Să se demonstreze că diametrul cercului ortogonal cercurilor ex-înscrise unui triunghiu este egal cu* $\sqrt{p^2+r^2}$, *unde* p *şi* r *sunt semiperimetrul şi raza cercului înscris în triunghiul dat.*

EM. E. MARINESCU.

Problema este cunoscută şi rezolvată în G. M. vol. 50 pag. 101—104, în cadrul articolului „*Sur le cercle de* TAYLOR" al d-lui V. THÉBAULT.

Vom da mai jos o a 2-a soluţie directă acestei probleme.

Dacă notăm cu I, I_A centrele cercurilor înscris şi exînscris lui ABC relativ la A, G centrul de greutate şi Ω centrul cercului înscris în triunghiul median al lui ABC, ştim că *centrul cercului ortogonal cercurilor* (I_A), (I_B), (I_C) *este centrul lor radical, care este şi centrul cercului înscris în triunghiul median, adică* Ω.

Din triunghiul $I_A I\Omega$ se deduce:

$$\overline{II_A^2}\cdot\overline{\Omega G}+\overline{\Omega I_A^2}\cdot\overline{GI}-\overline{GI_A^2}\cdot\overline{I\Omega}=\overline{IG}\cdot\overline{G\Omega}\cdot\overline{I\Omega} \qquad (1)$$

şi ţinând seamă că

$$\overline{I\Omega}=\frac{3}{2}\overline{GI} \quad \text{şi} \quad \overline{G\Omega}=\frac{1}{2}\overline{GI}$$

relaţia (1) devine:

$$\overline{\Omega I_A^2}=\frac{3}{2}\overline{GI_A^2}+\frac{3}{4}\overline{GI}^2-\frac{1}{2}\overline{II_A^2} \qquad (2)$$

Pe de altă parte relaţia care leagă punctul I_A de A, B, C, G este

$$\overline{GI_A^2}=\frac{1}{3}\left(\overline{AI_A^2}+\overline{BI_A^2}+\overline{CI_A^2}\right)-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$$

şi cum

$$a^2+b^2+c^2=2p^2-8Rr-2r^2 \quad \text{şi} \quad \overline{GI}^2=\frac{1}{9}(p^2+5r^2-16Rr)$$

relaţia (2) devine:

$$\overline{\Omega I_A^2}=\frac{1}{2}\left(\overline{AI_A^2}+\overline{BI_A^2}+\overline{CI_A^2}-\overline{II_A^2}\right)+\frac{1}{4}(3r^2-p^2) \qquad (3)$$

Din triunghiul dreptunghic GBI_A se scoate $\overline{II_A^2}$, valoare care introdusă în (3) ne dă:

$$\overline{\Omega I_A^2} = \frac{1}{2}(\overline{AI_A^2} + \overline{CI_A^2} - \overline{BI^2}) + \frac{1}{4}(3r^2 - p^2) \qquad (4)$$

Avem însă:

$$\overline{AI_A^2} = p^2 + r_a^2 \; ; \; \overline{CI_A^2} = r_a^2 + (p-b)^2 \; ; \; \overline{BI^2} = r_a^2 + (p-b)^2$$

care introduse în (4) dau

$$\overline{\Omega I_A^2} = \frac{1}{4}(p^2 + r^2) + r_a^2$$

Insemnând cu ρ raza cercului ortogonal lui (I_A) și cu centrul în Ω, avem

$$\rho^2 = \overline{\Omega I_A^2} - r_a^2 = \frac{1}{4}(p^2 + r^2) \; \therefore \text{ diametrul } d = \sqrt{p^2 + r^2}$$

MIRCEA D. POPA.
(Student inginer Politehnica București)

1°. D-l I. I. NOVAC (Student Politehnica Timișoara) a rezolvat problema pe cale trigonometrică.

EXERCIȚII

28. *Fie* A_1 *și* A_2 *intersecțiile dreptei* BC *cu perpendicularele duse din vârful* A *pe diametrele cercului circumscris triunghiului* ABC *și care trec respectiv prin* B *și* C. *Analog avem punctele* B_1, B_2, C_1, C_2. *Să se arate că:*

$$(1) \quad \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_2C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_2A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_2B}} = -1 \; ; \; (2) \quad \frac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}} = \frac{b^2}{a^2}$$

(3) $\overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1} \cdot \overline{CC_1} = abc$; (4) $\overline{AA_1^2} = \overline{AA_2^2} = \overline{BA_1} \cdot \overline{A_2C}, \ldots$

(5) $\overline{AB_1} \cdot \overline{BC_1} \cdot \overline{CA_1} = \overline{AC_2} \cdot \overline{BA_2} \cdot \overline{CB_2}$;

(6) $\overline{A_1A_2} \cdot \overline{B_1B_2} \cdot \overline{C_1C_2} = 8abc \cos A \cos B \cos C$; (7) $\overline{A_1A_2} \operatorname{tg} A = \overline{B_1B_2} \operatorname{tg} B$.

C. IONESCU-ȚIU.

Rp. Triunghiurile ABC, A_1BA, A_2AC, BB_1C, AB_2B, ACC_1, CBC_2 fiind asemenea, avem:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{A_1A}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BA_1}} \; ; \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CA_2}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AA_2}} \; ; \ldots \text{ de unde}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BA_1} \; ; \quad \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{A_2C} \; ; \ldots \text{ deci } \frac{c^2}{b^2} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_2C}} \; ; \ldots$$

şi rezultă $$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_2C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_2A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_2B}} = -\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} = -1.$$

Din primele egalităţi mai obţinem

$$\overline{AA_1} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{bc}{a} \; ; \ldots \text{ şi rezultă astfel relaţiile (2) şi (3).}$$

Tot din primele egalităţi, deducem;

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{CA_2}} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{AA_2}}, \ldots \text{ şi ţinând seamă că triunghiurile } AA_1A_2, \; BB_1B_2 \text{ şi } CC_1C_2$$

sunt isoscele, obţinem relaţiile (4).

$$\text{Apoi, } = \overline{CA_1} = \overline{BA_1} - a = \frac{c^2 - a^2}{a} \; ; \ldots \overline{BA_2} = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a} ; \ldots$$

Prin înlocuiri obţinem relaţia (5)

$$\overline{A_1A_2} = \overline{CA_2} + \overline{CA_1} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a} = \frac{2bc \cos A}{a} \; ; \ldots \text{ de unde rezultă (6) şi (7)}$$

PROBLEME PROPUSE

6481. Fie $\varphi_1(N)$ indicatorul aritmetic al lui N, $\varphi_2(N)$ indicatorul lui $\varphi_1(N)$ şi în general $\varphi_n(N) = \varphi_1[\varphi_{n-1}(N)]$. Să se stabilească egalitatea:

$$\varphi_n(A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_s^{\alpha_s}) = A_1^{\alpha_1 - n} A_2^{\alpha_2 - n} \ldots A_s^{\alpha_s - n} \varphi_n[A_1A_2 \ldots A_s]^n,$$

unde $A_1, A_2, \ldots, A_s$ sunt numere întregi şi pozitive oarecare, iar exponenţii satisfac inegalităţile

$$n \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_n .$$

IOAN B. FLORESCU.

6482. Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscând unghiul A, latura BC şi ştiind că vârful A se află pe o dreaptă dată, iar vârful C pe un cerc dat. Discuţie.

M. GHERMĂNESCU.

6483. Vârful B al triunghiului ABC, dreptunghic în B, se proiectează în D pe mediana CC'. Fie P intersecţia înălţimei BB' cu perpendiculara în C pe BC. Să se arate că dreapta PD trece printr'un punct fix când C variază pe BC.

G-L GH. BUICLIU.

6484. Pe bisectoarea unghiului A a triunghiului ABC se iau două puncte oarecare M şi N. Să se arate că:

1°. Proiecţiile lui A pe BM, BN, CM, CN sunt pe un cerc (Γ).

2°. Polarele lui A faţă de cercurile (Γ) trec prin intersecţia D a laturii BC cu bisectoarea exterioară a unghiului A.

3°. Cercurile (Γ) sunt ortogonale cercului descris pe AD ca diametru.

G-L GH. I. POPESCU.

6485. Fie ABC un triunghiu înscris într'un cerc O; T intersecţia tangentelor în B şi C la cerc. Paralela din C la AB retaie cercul în D, BD taie pe AC în U. Să se arate că TU este paralelă cu AB.

N. N. MIHĂILEANU.

6486. Intr'un cerc O se duc doi diametri perpendiculari AB şi CD. Cu centrele în A şi B şi cu raze egale cu AB se descriu două cercuri care taie pe AC şi BC în E şi F. Se descrie apoi arcul de cerc EHF cu centrul în C şi cu raza CE. Figura curbilinie obţinută ADBEHFA, poartă în desen numele de „*ou*". Să se găsească suprafaţa şi volumul corpului obţinut prin rotirea acestei figuri în jurul diametrului CD.

I. ST. TEODORESCU, Ploeşti.

6487. Să se elimine u şi v între ecuaţiile:

$$x = \frac{a(1-u^2v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)}, \quad y = \frac{b(u^2+v^2)(1+uv)}{(u+v)(1+u^2)(1+v^2)},$$

$$4a^2uv + b^2(u^2-1)(v^2-1) = 0.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6488. O secantă de direcție dată taie o parabolă (P) în B și C. Fie A polul lui BC față de (P). Când BC se deplasează paralel cu ea însăși, să se găsească:

1°. Locul ortocentrului triunghiului ABC.

2°. Locul lui A în cazul când ortocentrul triunghiului ABC este fix.

3°. Locul intersecțiilor cercului lui EULER cu înălțimea din A și construcția triunghiului astfel că $\sphericalangle B - \sphericalangle C = 90^0$.

4°. Locul centrului cercului lui EULER.

5°. Locul piciorului simedianiei interioare din A.

1°. Limita razei cercului ABC când BC devine tangentă parabolei (P).

7°. Folosind rezultatele dela 1°, 2° și 6° să se găsească o construcție a centrului cercului de curbură într'un punct oarecare al parabolei (P).

8°. Să se găsească la limită poziția cercului lui EULER.

MIRCEA D. POPA.

6489. 1°. Să se găsească curba plană (M) pentru care, polul razei vectoare OM față de cercul osculator în M la curbă, să descrie o dreaptă.

2°. Aceeași chestiune pentru cazul când cercul osculator este înlocuit cu un cerc tangent în M la (M) și trecând prin O.

3°. Caz particular: (M) este o conică ce trece prin O. Să se determine ansamblul conicelor ce satisfac condiția 1°.

LT. COL. MIHAIL I FOCȘENEANU.

6490. Un biciclist, însumând greutatea P împreună cu vechiculul său, trebue împins dela spate cu o forță minimă p pentru a putea fi pus în mișcare.

Luând startul într'o competiție ciclistă ce se dispută pe o șosea perfect orizontală și rămânând în urma adversarilor săi, biciclistul se agață de un camion care merge cu o viteză constantă pe șosea, în direcția în care merg bicicliștii. Indată ce-și zărește primul adversar, biciclistul se desprinde de camion, putând parcurge în continuare, un drum d, fără a pedala. Se cere viteza camionului, știind că între rezistența aerului și patratul vitezei biciclistului este un raport constant dat.

AL. GH. MORAITE.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Berdan C. (6403); *Constantinescu R. M.* (6453, 8, 64, 9, P); *Constantinescu Paul* (6412, 6, 20); *Constantinescu G. Virgil* (4360, 520, 717, 5123, 36, 871, 942, 6168, 294, 325, 71, 88, 418, 41, 4, 5, 6, E, P); *Crăcea I. D.* (4132, 571, 812, 5129, 843, 939, 57, 6227, 88, 305, 30, 3, 62, 72, 80, 8, 416, 8, 22, 9, 38, 41, 6, 58); *Deleanu I. A.* (5033); *Făcăoaru Gh. I.* (6446); *Gross A. Toma* (6445); *Ionescu-Bujor C. Claudiu* (6441); *Marinescu E. Em.* (P); *Moroianu D. Aurel* (6436, E); *Neguţ A. I.* (6452, 8, 61, 3, E, P); *Pantea N. Al.* (6422, 41); *Păunescu Şt. Gh.* (5871, 6378, 98, 416, 46); *Petcu Al. Val.* (6471); *Popa F. Pavel* (6233); *Rizan V. Vasile* (6445); *Soare V. M.* (5577, 6412, 6); *Ştefănescu I. Sofronie* (6416, 22, 7, 36, 52, E. P); *Teodorescu P. P.* (P, R); *Teodorescu Ploeşti S. I.* (5441, 687, P); *Thébault V.* (P); *Vargă I. Anton* (6466, 71, 9, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de geometrie, a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate, cu preţul de 800 lei volumul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—III, V—X, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia a III-a. Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 270

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 90

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 450

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh iteanu.* Lei 130

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 160

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . Lei 450

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . Lei 230

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 90

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.270

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 360

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 180

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 90

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* Lei 230

PENTRU BIBLIOTECI ŞI AUTORITĂŢI TOATE PREŢURILE SE TRIPLEAZĂ

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Costul abonamentului este de Lei 800

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Octombrie 1947 la 1 Iunie 1948 inclusiv. Costul abonamentului este de. . . . . Lei 360

Abonamentele se pot plăti la cont CEC Nr. 26220 sau pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 12.227.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIII

NUMĂRUL 11. — IULIE 1948

SUMARUL

1. † Profesorul inginer Cezar D. Orăşanu *Cr. Mateescu*
2. *Triunghiuri întregi, triunghiuri raţionale şi total raţionale* . . . . . *N. Ciorănescu*
3. Raport pentru decernarea premiului „Gh. Ţiţeica" . . . . . *Ş. Gheorghiu, N. N. Mihăileanu.*
4. Note matematice: 32—34.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri.
8. Diverse.
9. **Probleme rezolvate**: 4407, 4753, 5854, 6159, 6165, 6411, 6427, 6431.
10. **Exerciţii**: 29—30.
11. **Probleme propuse**: 6491—6500.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALA
1948

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie, compusă în prezent din d-nii: **G. G. Constantinescu,** Doctor în Matematici; **C. C. Teodorescu,** Inginer, Profesor la Politehnica Bucureşti; **Al. D. Bunescu,** Inginer (Casier).

Şedinţele următoare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Marţi 27 Iulie ora 18: Adunarea materiei pentru Nr. 12 şi discutarea modificării statutelor societăţii.

Marţi 3 August ora 18: Facerea copertei Nr. 12 şi discutarea modificării statutelor societăţii.

Marţi 24 August ora 17: A doua adunare generală.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1947 sunt indicate în tabla de materii a volumului LII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **63**91, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **4**00, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 30, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 50, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 60, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 80, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 90, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, **5**00.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 – 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *«Gazeta Matematică»* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU „ 150
— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *«Gazetei Matematice»* . . . . . „ 500

† PROFESORUL INGINER CESAR D. ORĂŞANU

La 12 Iunie 1948, a încetat pe neaşteptate din viaţă profesorul Inginer CESAR D. ORĂŞANU, lăsând unanime regrete, căci pretutindeni unde a trăit, a activat sau numai a trecut, el a radiat căldură sufletească şi a luminat cu entuziasm pe cei ce aveau nevoie de învăţătura lui.

Născut în 10 Martie 1882, în Brăila, CESAR ORĂŞANU a făcut studiile primare şi liceale în acel oraş, iar în anii 1901—1903, îl găsim corespondent al *Gazetei Matematice*, unde a continuat activitatea de corespondent şi în 1904, ca student în anul preparator al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti.

Devine inginer în 1908, intră în serviciul Căilor Ferate Române, unde efectuiază studii de trasee de cale ferată pe teren şi proecte în birou. Astfel a participat la studiul Căilor Ferate: Ţândărei, Piua Pietrei, Medgidia-Ester-Tulcea, Constanţa-Caramurat-Hârşova, Bucureşti-Obor-Filaret.

A mai făcut studii de căi ferate particulare şi de trasee de diguri în regiunea inundabilă a Dunării.

Studiul traseelor de cale ferată care necesită cunoaşterea deplină a topografiei, capitalul de cunoştinţe matematice şi dragostea ce ORĂŞANU avea pentru aceste ştiinţe l-au făcut să aprofundeze din ce în ce mai mult topografia şi geodezia, ajungând în 1933 profesor definitiv de aceste descipline, la Şcoala Politehnică din Bucureşti, după mulţi ani de ucenicie. In această calitate, ORĂŞANU a ilustrat cu strălucire catedra, ţinând lecţiuni admirabile, tipărind cursuri, publicând articole de specialitate.

A efectuat numeroase lucrări în această ramură de activitate precum: geodezia în regiunile Plătăreşti şi Hereşti-Ilfov, Cadastru în judeţul Ilfov, ridicări de planuri în mai multe regiuni precum şi peste 100.000 Ha, pentru reforma agrară.

Dar ORĂŞANU era înzestrat şi cu alte talente: desenator îndemânatec şi spirit constructiv, era indicat să se ocupe cu plănuirea şi construcţia de clădiri. A îndeplinit cu talent şi conştiinţiozitate funcţiunea de arhitect şi inginer constructor, făcând proecte şi conducând executarea mai multor clădiri pentru locuinţe şi birouri la Constanţa, Techirghiol-Movilă, Ismail şi Bucureşti. Mai mult, în anii 1924—1927, a ocupat conferinţa de Construcţii civile la Politechnica din Bucureşti.

O altă trăsătură caracteristică a lui CESAR ORĂŞANU, era pasiunea neîntreruptă pentru noui învăţături. In 1915, la 7 ani dela absolvirea Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele, ia licenţa în matematici, în 1937 obţine certificatul de inginer cadastral iar în ultimii ani urmează cursuri de Urbanism.

In cursul vieţii sale atât de active, ORĂŞANU a fost membru la mai multe instituţiuni, societăţi ştiinţifice şi comisiuni în legătură cu lucrările cadastrale.

A publicat numeroase cursuri, precum: Optică, Astronomie, Geodezie, Perspectivă, Curs General de Construcţii, Topografie, Apărare Pasivă; a publicat studii şi articole în diferite reviste, precum: un studiu asupra măsurătorilor pământului în *Buletinul Soc. Politehnice* din 1921—1922 şi numeroase articole de specialitate în *Buletinul Cadastral* din 1937 până în 1940.

La *Gazeta Matematică* devine membru activ în 1913 şi în acelaş an publică un studiu asupra strămutărilor în spaţiu a unui mediu deformabil cu două dimensiuni. Mai publică în *Gazeta Matematică* în 1916 articolul „Determinarea corecţiunei pendulei siderale, prin observaţiuni de stele" iar în 1925, un articol asupra chestiunei Calendarului.

In afară de Politehnică, ORĂŞANU a mai predat cursuri la Şcolile de Aeronautică (1917—1932), la Şcoala Specială de Geniu (1917—1923) şi la Şcolile de Topometrie din Ministerul Agriculturii şi Domeniilor (1921—1927).

In războiul din 1916—1918, ia parte ca ofiţer, în Batalionul de specialităţi şi este distins cu mai multe ordine.

Pensionat în ultimul timp, ORĂŞANU continuă să desfăşoare o activitate intensă profesională, fără să dea semne de oboseală sau de uzură.

Desigur că, în exercitarea activităţii sale, ORĂŞANU era ajutat de o inteligenţă vie, de talent şi gust artistic, dar şi de alte importante însuşiri sufleteşti precum: putere de muncă, conştiinţiozitate şi cinste profesională exemplare şi mai ales acea simpatie ce simţea pentru toţi semenii săi, pe care-i captiva cu voioşia sa şi îi făcea prieteni. De aceea, cu atât mai grea va fi despărţirea sa de familie şi de prietenii săi intimi.

Fie ca amintirea lui să rămână nepieritoare!

CRISTEA MATEESCU.

TRIUNGHIURI INTREGI, TRIUNGHIURI RAȚIONALE ȘI TOTAL RAȚIONALE

1. Sunt bine cunoscute triunghiurile dreptunghice ale căror laturi sunt numere întregi și care se mai numesc triunghiurile lui PYTHAGORA. Notațiile fiind cele obicinuite, laturile unui astfel de triunghiu sunt date de:

$$a = u^2 + v^2 \quad , \quad b = 2uv \quad , \quad c = u^2 - v^2 \tag{1}$$

u și v fiind doi întregi oarecari primi între ei, dacă a, b, c sunt prime între ele, adică triunghiul corespunzător este *primitiv*.

Mai puțin cunoscute sunt triunghiurile *raționale* sau *întregi*, care sunt triunghiuri oarecari, ale căror *laturi* și *suprafață* sunt exprimate prin numere raționale sau întregi.

Intr'un astfel de triunghiu, rezultă din formulele:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad , \quad \sin A = \frac{2S}{bc} \tag{2}$$

și analoagelele lor, că toate liniile trigonometrice ale unghiurilor triunghiului vor fi numere raționale. Relațiile:

$$R = \frac{abc}{4S} \quad , \quad r = \frac{S}{p} \quad , \quad r_a = \frac{S}{p-a} \text{ etc} \quad ; \quad h_a = \frac{2S}{a}, \ldots \tag{3}$$

arată că razele cercurilor: circumscris, înscris și exînscrise și înălțimile vor fi numere raționale, iar din:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} \tag{4}$$

și analoagele, deducem că tangentele și cotangentele unghiurilor pe jumătate ale unghiului, sunt exprimate prin numere raționale.

In cele ce urmează vom pune în evidență o clasă particulară de triunghiuri raționale, pentru cari și sinusurile, și deci toate liniile trigonometrice, ale unghiurilor pe jumătate, vor fi exprimate prin numere raționale, și pe care le numesc *total raționale*. Pentru această categorie de triunghiuri, deducem din:

$$l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} \quad , \quad l'_a = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b-c} \quad , \text{ etc.} \tag{5}$$

că şi bisectoarele interioare şi exterioare sunt exprimate prin numere raţionale.

Dacă a, b, c, S sunt numere întregi, triunghiul se zice întreg; elementele menţionate mai sus sunt numere raţionale, întâmplător întregi. Aceste triunghiuri sunt importante prin aceea că pot servi ca prototip unui şir infinit de triunghiuri raţionale, toate asemenea între ele.

2. Este uşor de văzut că un triunghiu raţional este format din două triunghiuri dreptunghice cu laturi raţionale, juxtapuse, căci din prima formulă (2) se vede că segmentele determinate de o înălţime pe latura corespunzătoare sunt numere raţionale. Aceste triunghiuri dreptunghice raţionale sunt asemenea cu două triunghiuri primitive de ale lui PYTHAGORA.

Rezultă de aci că unghiurile ascuţite ale unui triunghiu raţional sunt unghiuri ale triunghiurilor primitive ale lui PYTHAGORA, iar cel obtuz, dacă există, suplimentul unui astfel de unghiu.

Deşi această observaţie permite determinarea triunghiurilor raţionale, vom proceda direct la determinarea completă a acestor triunghiuri.

3. Am văzut că din (4) rezultă că $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ şi $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ sunt numere raţionale, dacă triunghiul ABC este raţional. Să punem atunci:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{m_1}{n_1}\quad,\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{m_2}{n_2}$$

unde m_k şi n_k sunt numere întregi, pozitive. Rezultă atunci că:

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{cotg}\frac{A+B}{2}=\frac{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{B}{2}-1}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}}\quad\therefore\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{n_1n_2-m_1m_2}{m_1n_2+m_2n_1}.$$

Prin urmare avem pentru unghiurile triunghiului căutat, expresiile lor raţionale:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{m_1}{n_1}\quad,\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{m_2}{n_2}\quad,\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{n_1n_2-m_1m_2}{m_1n_2+m_2n_1}\cdot\qquad(6)$$

Rezultă în plus pentru cele patru numere întregi condiţia:

$$n_1n_2>m_1m_2.$$

Cu ajutorul formulelor:

$$\sin\theta = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}} \quad ; \quad \cos\theta = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}}$$

deducem:

$$\left.\begin{aligned}
\sin A &= \frac{2m_1n_1}{m_1^2+n_1^2} \quad , \quad \cos A = \frac{n_1^2-m_1^2}{m_1^2+n_1^2} \\
\sin B &= \frac{2m_2n_2}{m_2^2+n_2^2} \quad ; \quad \cos B = \frac{n_2^2-m_2^2}{m_2^2+n_2^2} \\
\sin C &= \frac{2(m_1n_2+m_2n_1)(n_1n_2-m_1m_2)}{(m_1^2+n_1^2)(m_2^2+n_2^2)} \\
\cos C &= \frac{(m_1n_2+m_2n_1)^2-(n_1n_2-m_1m_2)^2}{(m_1^2+n_1^2)(m_2^2+n_2^2)} \\
&= \frac{(n_1^2-m_1^2)(m_2^2-n_2^2)+4m_1m_2n_1n_2}{(m_1^2+n_1^2)(m_2^2+n_2^2)}
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Din aceste expresii vedem, ceeace era apriori evident, că sinusurile tuturor unghiurilor sunt pozitive, iar din cosinusuri, cel mult unu poate fi negativ.

Din (7) deducem cu uşurinţă expresiile tangentelor sau cotangentelor unghiurilor A, B, C.

Mai observăm că putem face ca'n (6) şi (7) să figureze numai trei numere în loc de patru, dacă nu mai presupunem că m_k, n_k sunt prime între ele, şi scriem:

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2} = \frac{m'}{n} \quad , \quad \mathrm{tg}\frac{B}{2} = \frac{m''}{n} \quad ; \quad \mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{n^2-m'm''}{n(m'+m'')} \qquad (6')$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{2m'n}{n^2+m'^2} \quad , \quad \sin B = \frac{2m''n}{n^2+m''^2}$$

$$\sin C = \frac{2n(m'+m'')(n^2-m'm'')}{(n^2+m'^2)(n^2+m''^2)} \qquad (7')$$

şi expresiile corespunzătoare pentru cosinusuri. Sau încă putem lua:

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2} = \frac{\lambda}{\mu} \quad ; \quad \mathrm{tg}\frac{B}{2} = \frac{\lambda}{\nu} \quad , \quad \mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{\mu\nu-\lambda^2}{\lambda(\mu+\nu)} \qquad (6'')$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{2\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2}\ ;\ \sin B = \frac{2\lambda\nu}{\lambda^2+\nu^2}\ ;\ \sin C = \frac{2\lambda(\mu+\nu)(\mu\nu-\lambda^2)}{(\lambda^2+\mu^2)(\lambda^2+\nu^2)}. \quad (7'')$$

4. Să trecem acum la determinarea elementelor metrice ale unui triunghiu raţional.

Din relaţia sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

deducem ţinând seamă de (7) că laturile şi raza cercului circumscris a unui triunghiu raţional, sunt proporţionale cu numerele:

$$m_1 n_1 (m_2^2+n_2^2),\ m_2 n_2 (m_1^2+n_1^2),\ (m_1 n_2+m_2 n_1)(n_1 n_2-m_1 m_2)$$

$$\text{şi } \frac{1}{4}(m_1^2+n_1^2)(m_2^2+n_2^2)$$

factorul de proporţionalitate fiind un număr r raţional. Dacă vrem să avem un triunghiu întreg, putem lua:

$$\left.\begin{aligned} a &= m_1 n_1 (m_2^2+n_2^2)\ ,\quad b = m_2 n_2 (m_1^2+n_1^2) \\ c &= (m_1 n_2+m_2 n_1)(n_1 n_2-m_1 m_2) \\ R &= \frac{(m_1^2+n_1^2)(m_2^2+n_2^2)}{4} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Dacă vrem ca R să fie întreg, trebue să luăm pentru m_k, n_k patru numere impare.

Din prima formulă (3) deducem că:

$$S = m_1 m_2 n_1 n_2 (m_1 n_2+m_2 n_1)(n_1 n_2-m_1 m_2) \quad (9)$$

iar semi-perimetru va fi dat de:

$$p = n_1 n_2 (m_1 n_2+m_1 n_1) \quad (10)$$

iar din celelalte formule (3) obţinem:

$$\left.\begin{aligned} r &= m_1 m_2 (n_1 n_2-m_1 m_2)\ ;\quad r_a = m_1 n_2 (m_1 n_2+m_2 n_1) \\ r_b &= m_2 n_1 (m_1 n_2+m_2 n_1)\ ;\quad r_c = n_1 n_2 (n_1 n_2-m_1 m_2) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Din (9), (10) şi (11) deducem că dacă a, b, c sunt numere întregi date de (8), atunci S, p, r, r_a, r_b, r_c vor fi şi ele numere întregi.

Nu rezultă că luând pentru m_k, n_k numere prime între ele, triunghiul ale cărui laturi sunt date de (8) este primitiv, adică

numerele a, b, c sunt prime între ele, dar se poate deduce uşor prototipul căruia aparţine.

Dacă întrebuinţăm formulele reduse (7') sau (7") obţinem respectiv următoarele expresii pentru laturi:

$$a=m'(n^2+m''^2),\ b=m''(n^2+m'^2)\ ;\ c=(m'+m'')(n^2-m'm'') \quad (8')$$

şi $$a=\mu(\lambda^2+\nu^2)\ ;\ b=\nu(\lambda^2+\mu^2)\ ;\ c=(\mu+\nu)(\mu\nu-\lambda^2) \quad (8'')$$

Sub această ultimă formă se găseşte dat în R. D. CARAMICHAEL: *Analyse indéterminée* Paris 1929 pag. 12, formulele (8") fiind obţinute însă în alt mod. Este uşor de calculat celelalte elemente ale triunghiului, în cazurile (8') şi (8"), care sunt cazuri particulare ale formulelor (8).

Mai rezultă că un triunghiu este raţional, dacă sunt raţionale: $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ şi o latură, sau R, sau p, etc.

5. Am determinat triunghiurile întregi şi raţionale, pornind dela relaţiile (6), adică punând condiţia ca tangentele unghiurilor pe jumătate să fie numere raţionale.

Să ne întrebăm dacă există triunghiuri pentru care şi sinusurile unghiurilor pe jumătate să fie numere raţionale.

Ţinând seama de (6) şi de expresia sinusului în funcţie de tangentă, vom avea:

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}}\ ;\quad \sin\frac{B}{2}=\frac{m_2}{\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$$

Dacă $\sin\frac{A}{2}$ şi $\sin\frac{B}{2}$ sunt raţionale, rezultă că şi $\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$ vor fi raţionale, şi deci şi $\sin\frac{C}{2}$.

Prin urmare, condiţia necesară şi suficientă ca toate liniile trigonometrice ale unghiurilor $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ să fie raţionale este ca $m_1^2+n_1^2$, $m_2^2+n_2^2$ să fie pătrate perfecte, cu alte cuvinte ca m_k, n_k să fie numere de ale lui PYTHAGORA. Putem lua atunci după (1):

$$m_1=u_1^2-v_1^2\ ;\quad m_2=u_2^2-v_2^2\ ;\quad n_1=2u_1v_1\ ;\quad n_2=2u_2v_2$$

unde u_k, v_k sunt numere întregi.

Obţinem astfel triunghiurile total raţionale ale căror laturi pot fi egale cu numerele:

$$\left.\begin{aligned} a &= u_1 v_1 (u_1^2 - v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)^2 \quad ; \quad b = u_2 v_2 (u_2^2 - v_2^2)(u_1^2 + v_1^2)^2 \; ; \\ c &= (u_1 v_2 + u_2 v_1)(u_1 u_2 - v_1 v_2)[(u_1 v_2 + u_2 v_1)^2 - (u_1 u_2 - v_1 v_2)^2] \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

sau proporţionale cu aceste numere.

Ţinând seama de formulele (5) rezultă că atât bisectoarele interioare cât şi cele exterioare ale unui astfel de triunghiu sunt numere raţionale. Deci un triunghiu *total raţional* este împărţit de orice bisectoare a lui în două triunghiuri *raţionale*.

Exemplu. Fie $u_1 = 2$, $v_1 = 1$, $u_2 = 3$, $v_2 = 2$. Vom avea triunghiul ale cărui laturi sunt proporţionale cu numerele: $2 \cdot 3 \cdot 13^2$; $6 \cdot 5 \cdot 5^2$; $7 \cdot 4 \cdot 33$ sau triunghiul asemenea cu el:

$$a = 169, \; b = 125, \; c = 154$$

ale cărui elemente sunt:

$$p = 224, \; S = 9240$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{3}{4} \quad , \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{5}{12} \; , \; \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{33}{56}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{3}{5}, \; \cos\frac{A}{2} = \frac{4}{5} \; , \; \sin\frac{B}{2} = \frac{5}{13}, \; \cos\frac{B}{2} = \frac{12}{13}$$

$$\sin\frac{C}{2} = \frac{33}{65}, \; \cos\frac{C}{2} = \frac{56}{65} \quad ;$$

$$\sin A = \frac{24}{25} \; , \; \cos A = \frac{7}{25} \; ; \; \sin B = \frac{120}{169}; \; \cos B = \frac{119}{169}$$

$$\sin C = \frac{48.77}{65^2} = \frac{3696}{4225} \; ; \; \cos C = \frac{2047}{4225}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{24}{7} \; ; \; \operatorname{tg} B = \frac{120}{119} \; ; \; \operatorname{tg} C = \frac{3696}{2047}$$

In afară de aceste elemente goniometrice, care sunt toate numere raţionale, e uşor de văzut că razele cercurilor: circumscris, înscris, exînscris, înălţimele şi bisectoarele interioare şi exterioare sunt toate numere raţionale.

Las pe seama corespondenţilor *Gazetei Matematice* să brodeze pe marginea acestor consideraţii aritmetico-trigonometrice.

NICOLAE CIORĂNESCU.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „G. ȚIȚEICA“

Cercetând conținutul volumului LII al *Gazetei Matematice*, am constatat că activitatea în domeniul geometriei a nici unuia dintre corespondenți, elevi de liceu nu este la nivelul de a fi premiată.

Propunem deci ca premiul «G. ȚIȚEICA» să nu se acorde în acest an.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „G. ȚIȚEICA“

ȘERBAN GHEORGHIU, N. N. MIHĂILEANU.

Acest raport a fost aprobat în Adunarea generală din 17 Februarie 1948.

NOTE MATEMATICE

32. *Complectarea soluției problemei 6129*[1]. Problema cere numerele întregi x, x_1, x_2, ..., x_n pentru care

$$x = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}.$$

In soluția dată la pag. 154 din acest volum se notează cu d cel mai mare divizor comun al numerelor x_i și se deduc soluțiile

$$x = k\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n; \quad x_i = k\alpha_i[\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n + \alpha_1\alpha_3 \ldots \alpha_n + \ldots + \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}]$$

ceea ce este adevărat numai dacă numerele α_i sunt toate prime între ele ori cum ar fi luate.

Dacă însă numerele α_i sunt prime numai în *totalitatea* lor, atunci două sau mai multe din ele ar putea avea divizori comuni. In acest caz x, determinat ca la pag. 154, citată, se va scrie sub forma

$$x = \frac{d(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n)}{\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n + \alpha_1\alpha_3 \ldots \alpha_n + \ldots \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}} = \frac{da\delta}{b\delta} = \frac{ad}{b}.$$

1) Nota aceasta s'a primit la 23 Martie 1948. Anterior ei și anume la 28 Februarie 1948 s'a primit o carte poștală dela d-l Prof. M. GHERMĂNESCU, care relevează că soluția dela pag. 654 este parțială.

unde δ este c. m. m. d. c. dintre numitor şi paranteza dela numărător, deci a şi b prime între ele. Acum vom avea

$$x = \frac{ad}{b} \quad ; \quad d = kb \quad \therefore \quad x = ka \quad \text{şi} \quad x_i = kb\alpha_i .$$

La fel trebue complectată şi soluţia problemei 20, XXX din *Culegere de probleme* ediţia a II-a de ION IONESCU, unde $n = 3$.

GH. SILAŞ.

33. *O problemă de construcţie.* In rândurile acestea dau o soluţie diferită de cele publicate până acum în *Gazeta Matematică* [1] problemei următoare:

Pe laturile AB *şi* AC *ale triunghiului* ABC *să se determine punctele* D *şi* E *astfel în cât*

$$BD = DE = EC.$$

Polul dublu al figurilor egale BD, CE se găseşte pe de o parte pe cercul ABC, care trece prin punctele omoloage B, C şi prin intersecţia A a dreptelor omoloage BD, CE, iar pe de altă parte pe perpendiculara pe BC în mijlocul său. Acest pol este deci unul din intersecţiile F^+ şi F [2] ale bisectoarelor unghiurilor din A cu cercul ABC. Să considerăm polul dublu F^+. Unghiurile BF^+C, DF^+E sunt egale şi de acelaşi sens. Se deduce

$$\frac{F^+D}{DE} = \frac{F^+B}{BC} \quad \therefore \quad \frac{F^+D}{BD} = \frac{F^+C}{BC}$$

ceea ce arată că punctul D^+ se află la intersecţia laturei AB cu cercul lui APOLLONIUS relativ la vârful C în triunghiul BF^+C. Analog pentru polul F. Se ajunge la concluzia de la pag. 167 din acest volum.

G-L GH. BUICLIU.

34. *Asupra regulii* L'HOPITAL. Discuţiile purtate în jurul acestei teoreme, în coloanele *Gazetei*, fac necesare câteva precizii.

Incepem cu enunţarea ei, aşa cum rezultă din binecunoscutul „*Cours D'Algèbre Supérieure*, par B. NIEWENGLOWSKI, t. II éd. 8^0, pag. 114—116 şi următoarele:

1) Vol. XLIV, pag. 174, 348, 402 şi 457 şi Vol. LIII, pag. 161.

2) A se vedea figura dela pag. 164 din acest volum.

In ipoteză că $f(x)$ şi $\varphi(x)$ *sunt ambele nule sau infinite pentru* $x = a$, *dacă* raportul $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ *tinde către o limită, când* x *tinde către* a, *către aceiaşi limită va tinde şi raportul* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Atât în enunţ, cât şi în demonstraţiile care urmează (una este reprodusă după JULES TANNERY) este vorba deci de *limita raportului* $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, nu de *raportul limitelor*, noţiuni între care se face confuzie. Se demonstrează deci precis că, dacă *raportul* $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ are o limită pentru $x = a$, aceiaşi limită o va avea şi raportul $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, în *ipoteza* făcută că $f(x)$ sunt *ambele deodată*, nule sau infinite pentru $x = a$.

Prin urmare, nu este necesar să *presupunem* că $f'(x)$ şi $\varphi'(x)$ *există separat*, este *necesar* şi *suficient* că *raportul* $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ să aibă o limită pentru $x = a$, pentru ca aceiaşi limită să aibă şi raportul $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Aceasta este regula lui L'HOPITAL.

Trebue bine fixat că *necesar* şi *suficient* se referă la *aplicabilitatea* regulii lui L'HOPITAL, în ipoteza făcută, nu la existenţa limitei raportului $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, care poate avea loc chiar când limita raportului derivatelor nu există pentru $x = a$, după cum se poate constata pe exemplul:

$$f(x) = x + \sin x \quad , \quad \varphi(x) = x - \sin x,$$

pentru care raportul $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tinde către 1, în timp ce raportul $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ este nedeterminat pentru $x = \infty$.

Dacă $f'(a)$ şi $\varphi'(a)$ există separat, evident că raportul $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ are ca limită $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$, dar existenţa limitelor $f'(a)$, $\varphi'(a)$ constitue

numai o condiţie *suficientă* pentru existenţa limitei raportului $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, de aceia, *presupunerea* existenţei celor două limite în demonstrarea regulii lui L'HOPITAL constitue o restricţie, care diminuiază domeniul de aplicabilitate al acestei reguli şi nu cred să existe vreun tratat serios în care asemenea presupuneri să se facă. Exemplul ce am dat, la pag. 364,

$$f(x) = x + \sin x \quad , \quad \varphi(x) = x^2 + 2x\sin x + 4\cos x - \sin^2 x$$

ilustrează clar cele de mai sus. Dimpotrivă, exemplul dat la pag. 366

$$f(x) = \sin x - x\cos x \quad , \quad \varphi(x) = \sin x - (x+1)\cos x$$

nu este concludent, căci nu satisface ipoteza iniţială ca $f(x)$ şi $\varphi(x)$ să fie, ambele, nule sau infinite pentru $x = a$.

Iată însă un exemplu în care această ipoteză nu este satisfăcută şi totuşi, regula lui L'HOPITAL se poate aplica:

$$f(x) = 1 + \cos x \quad , \quad \varphi(x) = x + x\cos x - \sin x - \sin x\cos x;$$

aci $f(\infty)$ şi $\varphi(\infty)$ sunt nedeterminate, totuşi:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x - \sin x} \quad , \quad \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{1}{x - 2\sin x}$$

şi se vede uşor că ambele rapoarte tind către zero pentru $x = \infty$.

Rezultă dar că ipoteza clasică, $f(x)$ şi $\varphi(x)$ nule sau infinite pentru $x = a$, este restrictivă şi că regula lui L'HOPITAL are un câmp mai mare de aplicabilitate, ce urmează a fi determinat.

M. G.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL « GAZETEI MATEMATICE » DIN ANUL 1948

Probele scrise din 6 Mai 1948

(Timpul acordat: 3 ore pentru fiecare materie)

CLASA a VIII-a

Algebra. 1. Să se găsească relaţiile ce trebue să existe între coeficienţii ecuaţiei generale de gr. VI:

$$x^6 + a_1 x^5 + a_2 x^4 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x + a_6 = 0$$

pentru ca rădăcinile sale să aibă două câte două suma egală cu 1.

Să se deducă forma generală a acestui tip de ecuaţie anume:

$$x^6 - 3x^5 + \alpha x^4 - (2\alpha - 5)\, x^3 + \beta x^2 + (\alpha - \beta - 3)\, x + \gamma = 0. \qquad (1)$$

2. Ţinând seama de condiţiile date, să se arate că rezolvarea ecuaţiei de mai sus se poate reduce, printr'o substituţie, la rezolvarea unei ecuaţii de grad pe jumătate. Să se găsească efectiv această ecuaţie rezolvantă.

3. *Aplicaţie numerică.* Să se rezolve ecuaţia:

$$36x^6 - 108x^5 + 193x^4 - 206x^3 + 13x^2 + 72x - 9 = 0.$$

4. Să se determine β şi γ în funcţie de α, astfel ca ecuaţia (1) să admită o rădăcină multiplă de ordinul 4.

GH. D. SIMIONESCU.

Geometria analitică. Se consideră faţă de un sistem de axe perpendiculare, iperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

şi un punct $M_0\ (x_0, y_0)$. Din punctul M se duc perpendicularele D şi D' pe cele două asimptote care taie iperbola în punctele P, Q şi P', Q'.

Se cere:

1. Să se calculeze expresia coordonatelor unui punct M_0 variabil pe D sau D' în funcţie de $x_0, y_0, r = \overline{M_0 M}$ şi unghiul O al asimptotelor.

2. Să se deducă apoi că avem:

$$M_0 P \times M_0 Q = M_0 P' \times M_0 Q' = \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{a^4 + b^4} \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \right).$$

3. Punctele P, Q, P', Q' fiind pe un cerc să se calculeze coordonatele centrului M_1 al cercului.

4. Să se găsească locul punctului M_1 când M_0 descrie un cerc cu centrul în origină.

AL. PANTAZI.

BIBLIOGRAFIE

Archives Internationales d'Histoire des Sciences. No. 3. Avril 1948. J. PELSENER. Les influences dans l'histoire des sciences. G. VACCA: Sur l'histoire de la science chinoise. O. SPIESS: Une édition de l'oeuvre des mathématiciens BERNOULLI. P. ROSSIER: L'histoire des axiomes géométriques et l'évolution psychologique de l'enfant. E. J. WALTER: Warum gab es im Altertum keine Dynamik? P. HUMBERT: Le problème des longitudes entre 1610 et 1666. S. DELORME: PIERRE PERRAULT, auteur d'un traité *De l'origine des Fontaines* et d'une théorie de l'expérimentation. M. GLIOZZI: Relazioni scientifiche tra fra PAOLO SARPI e GIOVAN BATTISTA PORTO. G. DE

REPARAZ: Les sciences géographiques et astronomiques au XIVe siècle dans le nord-est de la péninsule ibérique et leur origine. A. C. MONTEIRO: Le médecin et naturaliste suisse CONRAD GESNER (1516—1566) dans l'histoire des sciences, spécialement au Portugal et au Brésil. E. GOLDSCHMID: Contribution des Etats-Units à l'anatomie pathologique au début du XIXe siècle. LAIGNEL-LAVASTINE: Histoire de la médecine et histoire des sciences. A. MIELI: Digressions autobiographiques sous forme de préface à un panorama général d'histoire des sciences. Comtes redus critiques.

Časopis pro pěstování Matematiky a Fysiky. Ročnik 72—Sešit 3. Praha 1947. M. KATETOV: A note on semiregular and nearly regular spaces. M. KATETOV: On the equivalence of certain types of extension of topological spaces. M. SYPTÁK: Les spirales d'ordres m dans l'espace euclidien au nombre quelconque de dimensions. E. BUNICKIJ: Remarque à l'article « *Sur l'integration des différentielles totales* ». H. HAVLICEK: Contact des courbes et des hyperphères dans un espace euclidien à n dimensions.

Idem. Ročnik 72—Sesit 4. J. BREJCHA: Sur l'existence des polygones non convexes d'une espèce donnée. A. URBAN: Le lieu des centres des coniques semblables dans un réseau de coniques. Z. PACHTA: Le sommet comme un point de base d'un faisceau de coniques. R. PISKA: Contribution à la construction des tangentes et des centres de courbure de certaines quantiques bicirculaires. Z. PIRKO: Equation fondamentale pour le mouvement d'une figure plane variable et son application dans la théorie des courbes planes. FR. KRUAN: Remarques methodologiques sur le théorème de sinus. A. HYSKA: Détérmination systématique de tous les diviseurs d'un nombre composé. J. VAVRINEC: Pour un style noveau dans l'éduction mathématique.

Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, rédigées par B. HOSTINSKY. No. 278—1946. O. BORUVKA: Théorie des décompositions dans un ensemble. No. 281—1946. L. PEREK: On the relation between space-velocity and linear diameter of the G-stars. No. 282—1946. B. HOSTINSKY. Nouveaux problèmes relatifs à la résonance. No. 283—1946. J. KAZDA: Sur quelques cas particuliers de la résonance.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVIII. Nr. 4. Iunie 1948. V. ALACI: Relaţii remarcabile între elementele unui triunghiu. Notă matematică. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

P. COMPARAT—F. ECOCHARD—J. LAFOUCRIÈRE—J. THIBAUD. Uranium 23 et plutonium 239. Publication de l'institut de Physique atomique de l'université de Lyon. Paris. Gauthier-Villars 1948.

VASILE CONSTANTINESCU şi M. I. SURDU. Tabele de calculul majorărilor dobânzilor de intârziere şi reducerile de 5 şi 7 la sută. Cartea Putnei, Focşani 1948.

R. D'AUBRY DE PUYMONIN. Les actions à distance. Paris-Gauthier-Villars 1945.

M. I. SURDU. Amortismente la împrumuturi cu prime şi loturi. Cartea de aur 1942.

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 298. (G. M., Vol. XLVI, 254). Se întreabă dacă există: „Călăuze" pentru matematici în limba română, ca publicaţiune aparte sau incorporate în călăuze pentru alte specialităţi.

In această direcţie am găsit următoarele:

1. Ca publicaţiune aparte există o broşură de 127 pagini, intitulată: *Călăuza în Aritmetică şi Algebră elementară*, Vol. I de N. BALABAN Profesor. Editura Institutului de Arte grafice „Samitca", Craiova 1916.

Pe una din coperte să găsesc următoarele:

...„De acelaşi autor, sub presă:

Vol. II. *Călăuză în Geometrie.*

„ III. *Călăuză în Trigonometrie.*

„ IV. *Călăuză în Algebra superioară.*

„ V. *Călăuză în Mecanică.*

„ VI. *Călăuză în Geometria analitică şi Formular general de Matematici".*

2. In *« Biblioteca de buzunar »*. Nr. 4, apărută în Editura de Stat. Bucureşti 1946, găsim: *Formular de Matematici elementare* de Ing. D. DRĂGULĂNESCU.

3. Nr. 40 din *Biblioteca de buzunar* cuprinde:

Formular de matematici şi calcul II. Calculul analitic de Ing. D. DRĂGULĂNESCU (Editura de Stat 1947).

4. In general am văzut diferite formulare de matematici, încorporate în diferite Table de logaritmi, întocmite de autori români, aşa de exemplu cea mai recentă este tipărită în 1947 de editura „Cugetarea" GEORGESCU-DELAFRAS, Bucureşti şi anume:

Table de logaritmi de V. I. BĂDULESCU Profesor. In aceste table este dat şi un formular de Matematici, cuprinzând: *Algebră, Geometrie, Trigonometrie, Analiză, Geometria analitică, Mecanică.*

LT. COL. EUG. ŞT. IACOB.

DIVERSE

a) Doctorate recente în matematici

In cursul ultimului an s'au trecut următoarele doctorate în matematici la Universitatea din Bucureşti, care n'au fost încă menţionate în *Gazeta Matematică:*

1°. D-l ARNO KAHANE, la 1 Februarie 1947 cu subiectul: *Asupra studiului centroafin al curbelor în plan şi în spaţiu.* Comisiunea a fost compusă din d-nii: V. VÂLCOVICI preşedinte, G. VRÂNCEANU şi AL. PANTAZI membri.

2°. D-l CEZAR COŞNIŢĂ la 26 Iunie 1947 cu subiectnl: *Courbes et surfaces anallagmatiques.* Comisiunea a fost formată din d-nii: G. VRÂNCEANU preşedinte, AL. PANTAZI şi N. RACLIŞ, membri.

3°. D-l MIHAIL NECULCE la 28 Iunie 1947 tratând despre: *Iniţiatorii calculului diferenţial.* Comisiunea a fost compusă din d-nii: GR. MOISIL preşedinte, MIRCEA FLORIAN şi MIRON NICOLESCU, membri.

4°. D-l HARALAMBIE M. IONESCU la 17 Aprilie 1948, cu subiectul: *Schema* TAUCER *generalizată şi ecuaţiile lineare transgresive cu limite variabile.* Doctoratul a fost trecut în faţa comisiunei compusă din d-nii: O. ONICESCU preşedinte, AL. GHICA şi G. DEMETRESCU, membri.

b) Sporirea bibliotecii „Gazeta Matematică"

E. REICHERT. Grundrisz der Physik und Meteorologie. Braunschweig 1881.

Donată de d-l G-L GH. BUICLIU.

Prof. Ing D. A. STAN şi Ing. A. TAUBER. Calculul fundaţiilor de beton armat ale stâlpilor izolaţi. Ed. II-a. Institutul de arte grafice şi editura Statului „Progresul". Sibiu 1948.

Donată de d-l Ing. D. A. STAN.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4407. *Se dau trei triunghiuri* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$. *Centrele de greutate ale acestor triunghiuri formează un triunghiu al cărui centru de greutate este centrul de greutate al triunghiului format de centrele de greutate ale triunghiurilor* $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C\,C_2C_3$.

AL. A. ROŞU.

Soluţie şi generalizare, date de d-nii: ION A. ILIE, DORIN N. THEODORESCU, P. P. DRĂGHICESCU.

Fie în general n poligoane de câte n laturi $A_1B_1 \ldots N_1$, $A_2B_2 \ldots N_2$, $\ldots$, $A_nB_n \ldots N_n$ ale căror centre de greutate sunt G_1, $G_2 \ldots$, G_n. Fie încă G_a, G_b, $\ldots$, G_n centrele de greutate ale poligoanelor $A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$, $\ldots$, $N_1N_2 \ldots N_n$. Notăm coordonatele punctelor figurilor în felul următor:

$$A_1(x_{a_1}, y_{a_1})\ ;\ B_1(x_{b_1}, y_{b_1})\ ;\ \ldots\ N_1(x_{n_1}, y_{n_1})\ ;\ \ldots$$

Vom avea

$$G_1\left(\frac{x_{a_1}+x_{b_1}+\ldots+x_{n_1}}{n}\,,\ \frac{y_{a_1}+y_{b_1}+\ldots+y_{n_1}}{n}\right)$$

$$G_2\left(\frac{x_{a_2}+x_{b_2}+\ldots+x_{nn}}{n}\,,\ \frac{y_{a_2}+y_{b_2}+\ldots+y_{nn}}{n}\right)$$

. . . . . .

$$G_n\left(\frac{x_{n_1}+x_{n_2}+\ldots+x_{nn}}{n}\,,\ \frac{y_{n_1}+y_{n_2}+\ldots+y_{nn}}{n}\right).$$

Centrul de greutate al poligonului $G_1, G_2, \ldots G_n$ este

$$G\left(\frac{x_{a_1}+x_{b_1}+\ldots+x_{n_1}+x_{a_2}+x_{b_2}+\ldots+x_{n_2}+\ldots+x_{n_1}+x_{n_2}+\ldots+x_{nn}}{n^2}\,,\right.$$

$$\left.\frac{y_{a_1}+y_{b_1}+\ldots+y_{n_1}+y_{a_2}+y_{b_2}+\ldots+y_{nn}+y_{n_1}+y_{n_2}+\ldots y_{nn}}{n^2}\right)$$

Centrele de greutate ale poligoanelor $A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$, ..., $N_1N_2 \ldots N_n$ vor fi

$$G_a\left(\frac{x_{a_1}+x_{a_2}+\ldots+x_{an}}{n}\,,\ \frac{y_{a_1}+y_{a_2}+\ldots+y_{an}}{n}\right)$$

$$G_b\left(\frac{x_{b_1}+x_{b_2}+\ldots+x_{bn}}{n}\,,\ \frac{y_{b_1}+y_{b_2}+\ldots+y_{bn}}{n}\right)$$

. . . . . .

$$G_n\left(\frac{x_{n_1}+x_{n_2}+\ldots+x_{nn}}{n}\,,\ \frac{y_{n_1}+y_{n_2}+\ldots+y_{nn}}{n}\right).$$

Se vede imediat că centrul de greutate al poligonului $G_a G_b \ldots G_n$ este tot punctul G.

Au dat exact aceiaşi soluţie pentru $n=3$, din cazul particular al enunţului, d-nii: M. MARGULIUS, N. D. ŞTEFĂNESCU, MIRCEA A. NEGREA, AUREL E. BĂDESCU, CONSTANTIN N. AVRAM, ILIE BOROŞ, JOE SEGAL, PAUL DOBRESCU, MOZES S. CHERŢMAN şi I. N. SAGER.

Proprietatea este adevărată şi pentru un poligon ale cărui vârfuri nu sunt neapărat în acelaşi plan. De asemeni proprietatea se menţine ori cum s'ar forma grupele de poligoane din seria a doua.

PROBLEMA 4753. *Profesorul* PICARD *s'a ridicat într'un balon stratosferic până la înălțimea de 16201 m. Care e suprafața zonei pe care el ar fi putut-o vedea?*

AL. AL. ROȘU.

Se presupune că vederea se poate întinde la ori ce distanță și că pământul este perfect sferic. Fie O centrul pământului, A punctul de înălțime 16201 m, la care s'a ridicat balonul profesorului PICARD, AB tangenta la cercul mare al cărui plan trece prin A, C proiecția lui B pe OA și D intersecția lui OA cu cercul de rază OA din planul OAB. Triunghiul dreptunghic OBA dă

$$\overline{OB}^2 = \overline{OC} \cdot \overline{OA} = (\overline{OB} - \overline{CD})(\overline{OB} + \overline{DA})$$

$$\therefore \quad \overline{CD} = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{DA}}{\overline{OB} + \overline{DA}}.$$

In această egalitate $\overline{DA}$ este dat numeric în enunț, iar $\overline{OB}$ este raza sferei pământești egală cu 6371,104 km așa că

$$\overline{CD} = \frac{6371{,}104 \times 16{,}201}{6387{,}305} \text{ km.}$$

Suprafata S a zonei tăiate de planul BC este dată de

$$S = 2\pi \cdot \overline{OB} \times \overline{CD} = \frac{6{,}28 \times 6371{,}104^2 \times 16{,}201}{6387{,}305} \text{ km}^2$$

Făcând calculele, sau aplicând logaritmii se găsește că Profesorul PICARD ar fi putut vedea o suprafață de

$$S = 646566{,}51 \text{ km}^2$$

adică ceva mai mult decât dublul suprafeței României.

Notă. Singura greutate a problemei este efectuarea calculelor din formula care dă pe S. Din 33 de corespondenți care s'au ocupat de această problemă d-l MIRCEA I. POPA a dat rezultatul cel mai apropiat 646555 km², ceilalți 32 au dat rezultate variabile, pe care le înscriem în km² în paranteza care urmează după nume: GH. TOPALESCU (605744); M. A. VASILESCU-STABU (635371); EM. GH. TÂNJALĂ (635909); SONIA TUDORAN (639997); TR. IGNAȚIU și P. MAMUT (642100); ILEANA MUSCELEANU (643845); DORU AL. IONESCU (645017); A. N. POPESCU-ZORICA (645879); H. L. REISCHER (646014); V. L. FLORESCU (646157); G. ENESCU (646360); TR. TRUFIN (646397); C. BEȘCHEA și GH. BRAN (646427); DAN AL. PROTOPOPESCU (645441); E. G. BEIU-PALADI (646452); CORNELIA COMLOȘAN și M. C. I. VLAD (646519); A. CORNĂȚEANU

(646520); E. MARCOVICI (646528); N. D. ŞTEFĂNESCU (646800); R. I. CIURESCU (646881); OCT. I. IANCULESCU (648698); AD. O. ŞAICHIN (649680); M. N. ROŞCULEŢ (651500); I. CĂLIN DIMITRIU (651830); IOAN STREDER (662640); BENONE PETRESCU (702501); M. F. AMĂRĂŞTEANU (756433); ŞT. C. TILICĂ (756732); G. POPOVICIU (1014884).

Diferenţele provin în majoritate din erori de calcule, celelalte din valoarea numerică ce s'a luat pentru raza pământului. Cinci rezolvitori, care nu sunt menţionaţi aici s'au mulţumit să stabilească fomula lui S în funcţie de CD. Problema este propusă la 15 Dec. 1936, ceea ce explică numele rezolvitorilor citaţi.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5854. *Fiind dat tetraedrul* SABC *şi punând*

$$\overline{SA} = \alpha,\ \overline{SB} = \beta,\ \overline{SC} = \gamma,\ \overline{BC} = a,\ \overline{CA} = b,\ \overline{AB} = c,$$

să se arate că volumul său V *este dat de formula:*

$$144\,V^2 = \Sigma\, a^2(\gamma^2 - \alpha^2)(\alpha^2 - \beta^2) + \Sigma\, a^2(a^2 + b^2 + c^2)\alpha^2 - a^2b^2c^2.$$

Să se deducă relaţia care leagă laturile a, b, c, d *şi diagonalele* e, f *ale unui patrulater plan oarecare:*

$$e^2f^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2) + e^2(b^2 - c^2)(d^2 - a^2)$$
$$+ f^2(c^2 - d^2)(a^2 - b^2) - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(a^2c^2 - b^2d^2) = 0$$

[e *uneşte intersecţia* (a, d) *cu* (b, c)].

ION C. VASILIU.

Conţinutul acestei probleme a apărut ulterior în cadrul articolului *„Extinderea în spaţiu a unei teoreme a d-lui Profesor* D. POMPEIU" (G. M. XLIX, 3). Ne-am fi aşteptat deci la soluţii diferite de cea dată în articolul citat, ceea ce nu s'a întâmplat decât parţial. Iată o astfel de soluţie:

Fie M un punct în planul triunghiului ABC şi λ, μ, ν unghiurile BMC, CMA, AMB.

Folosind relaţia $\lambda + \mu + \nu = 2\pi$, se deduce:

$$\Sigma \cos^2\lambda - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu - 1 = 0.$$

Notăm $\overline{AM} = p$, $\overline{BM} = q$, $\overline{CM} = r$ şi înlocuind

$$\cos\lambda = \frac{-a^2 + q^2 + r^2}{2qr} \ldots \text{etc., găsim relaţia:}$$

$$\Sigma\, a^2(r^2 - p^2)(p^2 - q^2) + \Sigma\, a^2(-a^2 + b^2 + c^2)p^2 - a^2b^2c^2 = 0 \quad (1)$$

demonstrată pe o altă cale în articolul *„Relații metrice în geometria triunghiului"* (G. M. XLVIII, 496).

Pornind de aci, d-l CONST. PANTELIMON dă o soluție originală după cum urmează:

Dacă M e proiecția vârfului S al tetraedrului pe fața ABC și h e înălțimea SM, se scriu relațiile:

$$p^2 = \alpha^2 - h^2 \quad , \quad q^2 = \beta^2 - h^2 \quad , \quad r^2 = \gamma^2 - h^2$$

și înlocuindu-se în (1), se găsește:

$$h^2[\Sigma a^2(-a^2+b^2+c^2)] = \Sigma a^2(\gamma^2-\alpha^2)(\alpha^2-\beta^2)$$
$$+\Sigma a^2(-a^2+b^2+c^2)\alpha^2 - a^2b^2c^2.$$

Insă: $\Sigma a^2(-a^2+b^2+c^2) = 16S^2$ și $S^2h^2 = 9V^2$.

De unde rezultă relația din enunț.

Pentru partea a doua a problemei e suficient să se facă schimbările de notații indicate și gruparea termenilor. Menționăm că la publicarea enunțului în G. M. Vol. XLIX, pag. 111, înaintea parantezelor ultimului termen al formulei a doua, s'a scris eronat semnul plus.

S'a primit o soluție bună dela un anonim. Restul rezolvitorilor au reprodus soluțiile din articolul citat.

D-l P. P. TEODORESCU (clasa a VIII-a Liceul Matei Basarab) ne-a trimis o notă care rectifică atât rezultatele din nota noastră 44 publicată în G. M., Vol. XLVII, pag. 454 precum și enunțul problemei de față.

I. C. V.

PROBLEMA 6159. *Să se studieze mișcarea sistemului din figură, în care corpurile* A, B, C *au respectiv greutățile* $P = \frac{5}{112} G$; $Q = \frac{3}{80} G$ *și* G, *iar scripeții* $\frac{G}{4}$ *și pot fi asimilați unor roți pline, omogene, de aceeași grosime. In timpul mișcării corpul* C *alunecă cu frecare pe un plan orizontal* $\left(\text{coeficient de frecare } f = \frac{67}{240}\right)$ *scripeții* O_2 *și* O_3 *se rotesc în jurul centrelor lor care sunt fixe, iar*

scriptele O_1 *se roteşte în jurul centrului său, în timp ce acest centru coboară pe verticală.*

Presupunând că corpurile A, B, C *reprezintă trei universuri închise să se determine legile căderii libere şi legile pendulului în fiecare din acest univers. Să se studieze ce se întâmplă în fiecare din corpurile* A, B, C *dacă aşezăm în aceste corpuri câte un pendul care pe pământ bate secunda.*

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie dată de d-l EMIL I. CONSTANTINESCU (Politehnica Bucureşti).

Să notăm cu:

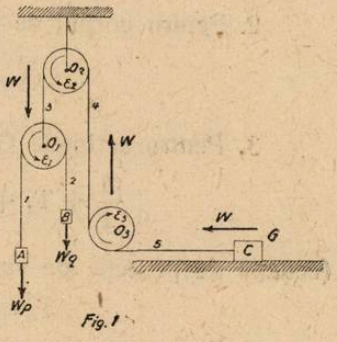
W_p *acceleraţia* corpului de greutate P.

W_q *acceleraţia* corpului de greutate Q.

W *acceleraţia* corpului de greutate G având *sensurile* indicate în fig. 1.

T_1, T_2, T_3, T_4 şi T_5 *tensiunile* în timpul mişcării în firile respective 1, 2, 3, 4 şi 5 (fig. 1).

ε_1, ε_2, ε_3 *acceleraţiile unghiulare* ale scripeţilor O_1, O_2, O_3 în mişcarea lor de rotaţie în jurul centrelor lor respective.



r raza comună a scripeţilor.

I momentul de inerţie al scripetului în raport cu centrul său.

m massa scripetului.

Avem prin consideraţii *cinematice* simple:

$$W_p = W + \varepsilon_1 r \quad ; \quad W_q = W - \varepsilon_1 r \quad ; \quad W = \varepsilon_2 r = \varepsilon_3 r, \qquad (1)$$

iar:

$$I = \frac{mr^2}{2} = \frac{G}{8g} r^2.$$

Să aplicăm *principiul lui* D'ALEMBERT *fiecărui corp aflat în mişcare.*

In fig. 2 sunt arătate *forțele active, forțele de legătură* și *forțele de inerție* ce acționează fiecare corp în parte.

Scriind *condițiile de echilibru* al acestor forțe obținem:

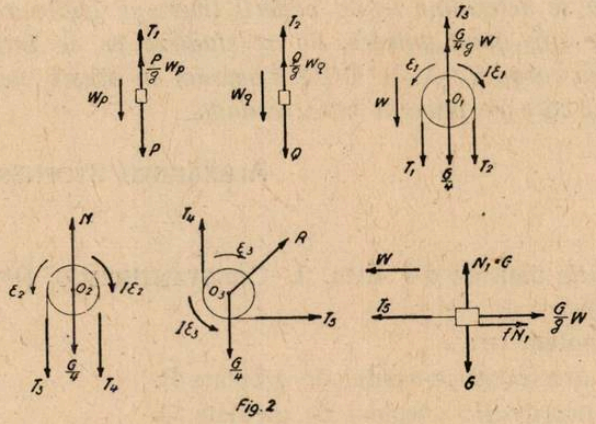


Fig. 2

1. Pentru corpul de greutate P:

$$P - \frac{P}{g} W_p - T_1 = 0. \tag{2}$$

2. Pentru corpul de greutate Q:

$$Q - \frac{Q}{g} W_q - T_2 = 0. \tag{3}$$

3. Pentru scriptele O_1:

$$\frac{G}{4} + T_1 + T_2 - T_3 - \frac{G}{4g} W = 0, \tag{4}$$

(ecuația de proecție pe verticală),

$$T_1 r - T_2 r - I \varepsilon_1 = 0, \tag{5}$$

(ecuația de momente în O_1; termenul $I \varepsilon_1$ reprezintă cuplul forțelor de inerție).

4. Pentru scripetele O_2:

$$T_3 r - T_4 r - I \varepsilon_2 = 0 \tag{6}$$

(ecuația de momente în O_2).

5. Pentru scripetele O_3:

$$T_4 r - T_5 r - I \varepsilon_3 = 0, \tag{7}$$

(ecuația de momente în O_3).

6. Pentru corpul de greutate G:

$$T_5 - \frac{G}{g} W - fG = 0. \qquad (8)$$

In studiul echilibrului dinamic pentru scripeţii O_2 şi O_3 şi pentru corpul de greutate G nu s'au trecut toate ecuaţiile de echilibru, aceste ecuaţii nefiind necesare studiului mişcării, ci servind numai la *determinarea reacţiunilor* N, R şi N_1.

Ecuaţiile 1—8 formează un sistem de 11 ecuaţii cu 11 necunoscute W_p, W_q, W, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 ε_1, ε_2 şi ε_3.

Rezolvând sistemul pentru datele problemei:

$$\left(P = \frac{5}{112} G \;;\; Q = \frac{3}{80} G \;;\; f = \frac{67}{240}\right)$$

se obţine:

$$W_p = \frac{g}{15} = 0{,}654 \text{ m sec}^2 \;;\; W_q = 0 \;;\; W = \frac{g}{30} = 0{,}327 \text{ m sec}^2$$

$$T_1 = \frac{G}{24} \;;\; T_2 = \frac{3}{80} G \;;\; T_3 = \frac{77}{240} G \;;\; T_4 = \frac{19}{60} G \;;\; T_5 = \frac{5}{16} G$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{g}{30\,r} = \varepsilon.$$

Rezultă prin urmare că în mişcarea sistemului:

a) corpul A coboară pe verticală cu o acceleraţie constantă W_p; deci are o *mişcare uniform accelerată;*

b) corpul B are o *mişcare uniformă pe verticală cu viteza iniţială.* In cazul când sistemul pleacă *din repaos*, corpul B *rămâne pe loc;* în această ipoteză rezultă că mişcarea de coborîre a centrului O_1 este anihilată prin rotirea scripetelui în jurul lui O_1;

c) corpul C are o *mişcare uniform accelerată* pe orizontală cu acceleraţia constantă W;

d) scripeţii O_1, O_2, O_3 se rotesc în jurul centrelor lor cu *acceleraţia unghiulară constantă* ε.

Pentru a determina legile căderii corpurilor şi a pendulului în universurile A, B şi C va trebui să cunoaştem mai întâi *acceleraţia relativă* în căderea corpurilor.

Fie g_a, g_b şi g_c aceste acceleraţii (fig. 3). Avem:

$$g_a = g - w_p = g - \frac{g}{15} = \frac{14}{15} g = 9{,}156 \text{ m/sec}^2$$

$$g_b = g - w_q = g = 9{,}81 \text{ m/sec}^2$$

$$\vec{g_c} = \vec{g} - \vec{w} \; ; \quad g_c = \sqrt{g^2 + w^2} = \frac{\sqrt{901}}{30} g \; ;$$

$$tg \sphericalangle (\vec{g_c}, \vec{g}) = \frac{w}{g} = \frac{1}{30} \quad , \quad g_c = 9{,}815 \text{ m/sec}^2, \; \sphericalangle g_c, g) \cong 1^0 55'.$$

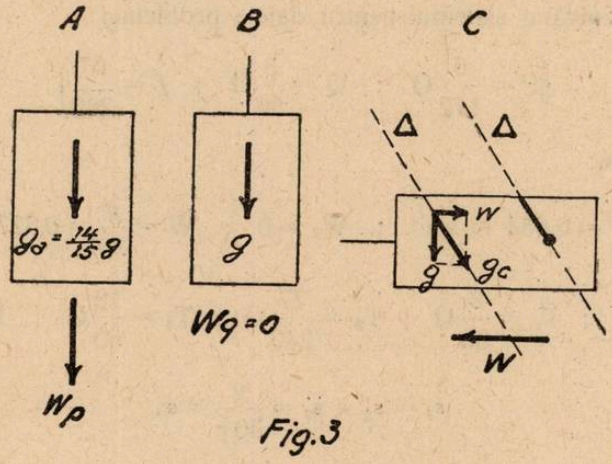


Fig. 3

Ca urmare deducem următoarele:

a) *în universul A,* legile căderii corpului şi cele ale pendulului sunt aceleaşi ca şi pe pământ (pământul este considerat sistem fix) cu deosebirea că în locul acceleraţiei gravitaţiei g se va lua g_a. Corpurile lăsate, liber cad vertical dar *mai încet,* iar perioada de oscilaţie a pendulului simplu T_a *este mai mare* decât pe pământ.

$$T_a = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_a}} > 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

b) *în universul B,* legile căderii corpurilor şi ale pendulului sunt *identice* celor de pe pământ; corpurile cad ca şi pe pământ, iar pendulele oscilează identic ca pe pământ.

Regăsim astfel în cadrul acestei probleme o importantă concluzie a *Mecanicei clasice: „legile naturii rămân aceleaşi pentru*

toate sistemele aflate în mişcare rectilinie uniformă în raport cu sistemul fix" ;

c) *în universul C,* corpurile lăsate să cadă liber *parcurg drepte* Δ *făcând un unghiu de* 1°55′ *cu verticala,* cu o acceleraţie constantă g_c mai mare decât acceleraţia gravitaţiei.

Perioada de oscilaţie a pendulului T_c este *mai mică* decât pe pământ,

$$T_c = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_c}} < 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

In acest univers pendulele oscilează în jurul poziţiei de echilibru, poziţie care are înclinarea dreptelor Δ.

Lichidele în echilibru în sistemul C au ca suprafeţe libere *plane perpendiculare pe direcţia* Δ.

Observăm deci că pentru locuitorii unui asemenea univers, direcţia Δ îndeplineşte rolul verticalei de pe pământ.

Mutând succesiv în cele trei universuri un pendul care pe pământ *bate secunda* se va putea constata următoarele:

în universul A bătaia pendulului este $\frac{T_a}{T} = \sqrt{\frac{g}{g_a}} = \sqrt{\frac{15}{14}} \cong 1{,}035$ sec.

în universul B pendulul bate tot secunda.

în universul C bătaia pendului este $\frac{T_c}{T} = \sqrt{\frac{g}{g_c}} \cong 0{,}999$ sec.

D-l Emil I. Constantinescu face şi un studiu interesant a ceea ce se întâmplă în universurile celor trei scripeţi, studiu pe care regretăm că nu-l putem publica din lipsă de spaţiu.

O altă soluţie de asemenea foarte bună s'a mai primit dela d-l Lt. Aurel Cojan (Braşov).

Al. St.

PROBLEMA 6165. *Fie* Δ *o dreaptă perpendiculară în* M *pe latura* BC *a triunghiului* ABC. *Se cere locul geometric al proiecţiei lui* M *pe transversala reciprocă a dreptei* Δ *faţă de triunghiul* ABC.

Aurelian Stan.

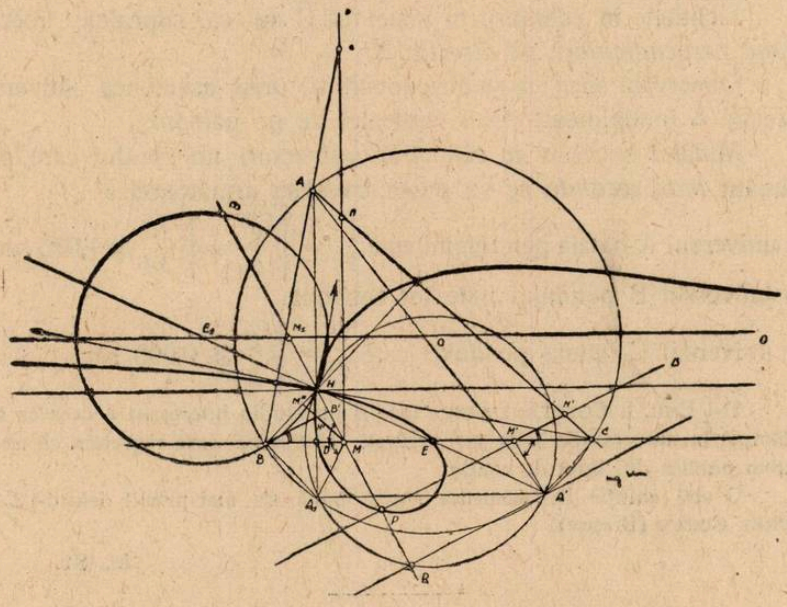
Soluţie geometrică: Fie M, N, Q, punctele de intersecţie ale dreptei Δ cu laturile BC, CA, AB şi M′, N′, Q′ izotomicile lor,

care definesc dreapta Δ', reciproca lui Δ. Avem deci prin construcție $BM = M'C$ și $N'C = NA$.

Înălțimile BB' și MM'' ale triunghiului BHM, se taie în ortocentrul H'. Avem $AH \parallel MN$ și $MM'' \parallel AC$, deci patrulaterul $ANMH$ este un paralelogram, de unde rezultă că $MH' = NA = N'C$.

Dar cum $BM = M'C$ rezultă că triunghiurile BMH' și $M'CN'$ sunt egale și cum $\sphericalangle BMH' = \sphericalangle M'CN'$ rezultă că $BB' \parallel M'N'$, *deci perpendiculara* MP *pe transversala reciprocă a dreptei* Δ *trece prin ortocentrul* H *al triunghiului* ABC.

Rezultă că locul lui P *este podara lui* H *în raport cu învelitoarea dreptei* Δ'.



Fie A_1 intersecția înălțimei AD cu cercul circumscris lui ABC, iar A' diametralul opus lui A în același cerc. Evident că $A_1A' \parallel BC$ și deci $BA_1 = CA'$. Cum însă $BM = M'C$ rezultă că triunghiurile BMA_1 și $CM'A$ sunt egale și deci $\sphericalangle A'M'C = \sphericalangle A_1MB$. Cum $\sphericalangle MBB' = \sphericalangle CM'N'$ ca alterne interne iar $\sphericalangle MBB' + \sphericalangle BMH = 90^0$, rezultă că $A'M'N' = 90^0$. Când Δ variază, rămânând perpendiculară pe latura BC, M' se mișcă pe BC, care este fixă. Cum A' este fix și unghiul $A'M'N'$ drept rezultă că $M'N'$ înfășoară parabola de

focar A', având pe BC tangentă la vârf şi drept directoare, paralela dusă din ortocentrul H, la latura BC.

Locul lui P *este deci podara ortocentrului* H *în raport de această parabolă, podară care este o cubică.*

Să precizăm această cubică. Fie R punctul de intersecţie al cercului de diametru HA', al cărui centru este E, mijlocul lui BC, cu perpendiculara din H la Δ'. Cum A'M' şi NP sunt perpendiculare pe Δ', iar unghiul din R drept, rezultă că $RA' \| PM'$ şi deci $A'M' = RP = MH$.

Fie E_1 simetricul lui E faţă de H. Prin E_1 duc dreapta D paralelă la BC, iar din E_1 ca centru duc cercul de rază E_1H, care este evident egal cu cercul descris pe HA' ca diametru.

Prelungesc dreapta HP până taie cercul E_1 în N_1 şi pe dreapta D în M_1. Datorită faptului că $HM = PR$ şi că cercurile E şi E_1 sunt simetrice, rezultă că:

$$HP = HR - RP = HN_1 - HM_1 = M_1N_1.$$

Locul lui P *este deci strofoida oblică, care are ca punct dublu pe* H (*ortocentrul triunghiului* ABC) *ca asimptotă dreapta* D *şi ca cerc director cercul* E_1, *simetricul faţă de* H *al cercului* E *descris pe* HA' *ca diametru.*

Această strofoidă, trece prin picioarele înălţimilor triunghiului ABC şi prin mijlocul laturei BC, adică prin E. Cele două tangente în punctul dublu sunt perpendiculare, ele fiind dreptele ce unesc pe H cu punctele de intersecţie ale dreptei D cu cercul E_1.

D-l MIRCEA V. SOARE, a găsit şi construit exact locul cerut.

Au arătat, cu ajutorul geometriei analitice că locul lui P este o cubică, d-nii MIRCEA D. POPA, MIHAIL R. CONSTANTINESCU (Liceul Petru şi Pavel din Ploeşti); E. N. WEGENER (Politehnica Bucureşti; CONSTANTIN BERDAN, dar numai primii doi au precizat câteva puncte caracteristice ale locului, fără totuşi a dovedi că locul este o strofoidă.

A. I. S.

PROBLEMA 6411. *Să se arate că expresia*

$$E = 5^{5n+10} + 2 \cdot 7^{5n+5} + 5^{3n+5} \cdot 7^{4n+5} + 2 \cdot 5^{2n+5} \cdot 7^{n}$$

se divide prin 1947, ori care ar fi valoarea întreagă şi pozitivă a lui n.

M. SARIAN.

Soluție dată de d-nii: ANDRÉ BAL (Givors, Franța); GH. ȘT. PĂUNESCU (Lic. „Matei Basarab", București); P. P. TEODORESCU, E. A. DODU, CLAUDIU C. IONESCU-BUJOR (Lic. „Mihai Viteazul", București); D. I. CRĂCEA, VIRGIL G. CONSTANTINESCU (Lic. „R. Greceanu", Slatina). Avem

$$E = (5^{2n+5} + 7^{4n+5})(2 \cdot 7^n + 5^{3n+5}) \quad \text{și} \quad 1947 = 33 \times 59.$$

Dar avem succesiv:

1°. $5^{2n+5} + 7^{4n+5} = 5^3 \cdot 25^{n+1} + 7 \cdot 2401^{n+1} = 5^3 \cdot 25^{n+1} + 7(25 + 33m)^{n+1}$
$= (125 + 7)25^{n+1} + 33m = A \cdot 33 \cdot 25^{n+1} + 33m = M \cdot 33.$

2°. $2 \cdot 7^n + 5^{3n+5} = 2 \cdot 7^n + 5^5(7 + 59m)^n = (2 + 3125)7^n + 59m$
$= 33 \cdot 59 \cdot 7^n + 59m = M' \cdot 59.$

Cum 33 și 59 sunt primi între ei, rezultă că produsul expresiilor 1° 2°, adică E, se divide prin $33 \times 59 = 1947$.

Au rezolvat bine problema, pe căi ceva mai lungi, d-nii: LONGIN-ROMULUS N. ANDRONESCU, VALERIU AL. PETCU, MARCEL D. COTARIU, GEORGE G. ENESCU, PAUL N. CIUCESCU și CONST. D. STĂNESCU (Lic. teoretic Reșița).

PROBLEMA 6427. *Să se studieze natura seriei cu termenul general*

$$a_n = \frac{1}{n^p (\log n)^q (\log \log n)^r},$$

p, q, r *fiind numere reale.*

VIRGIL CLAUDIAN.

Soluție I. Să aplicăm criteriul raportului. Avem:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^q \left(\frac{\log\log(n+1)}{\log\log n}\right)^r$$

Scriem după cum urmează

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} = \frac{\log\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\log n} = 1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} \to 1$$

$$\frac{\log\log(n+1)}{\log\log n} = 1 + \frac{\log\left[\frac{\log(n+1)}{\log n}\right]}{\log\log n} \to 1$$

Prin urmare $\frac{a_n}{a_{n-1}} \to 1$ când $n \to \infty$.

Vom aplica criteriul RAABE-DUHAMEL. Pentru aceasta să pregătim terenul în vederea aplicării acestui criteriu. Pentru prescurtare vom nota: $\log\log n = \log_2 n$, etc.

Să considerăm desvoltarea

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

valabilă pentru $|x| < 1$. Rezultă că avem

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \dots$$

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} = 1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} = 1 + \frac{1}{n\log n} - \frac{1}{2n^2\log n} + \dots$$

$$\therefore \quad \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1 + \frac{1}{n\log n}\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^3} + \dots\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1 + \frac{\alpha_n}{n\log n} \qquad (1)$$

unde $$\alpha_n = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^3} + \dots$$

și $$\alpha_n \to 1 \text{ când } n \to \infty.$$

Scriem acum:

$$\frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n} = \frac{\log\log\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\log\log n} = \frac{\log\left[\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\log\log n}$$

$$= \frac{\log\left\{\log n\left[1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right]\right\}}{\log\log n}.$$

$$\therefore \quad \frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n} = 1 + \frac{\log\left[1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right]}{\log\log n}$$

Insă:

$$1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}=1+\frac{\alpha_n}{n\log n}\text{, unde } \alpha_n\to 1.$$

$$\therefore \qquad \frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n}=1+\frac{\beta_n}{n\log n\log_2 n}, \tag{2}$$

unde

$$\beta_n\to 1 \quad \text{când} \quad n\to\infty.$$

In asemenea condiţiuni rezultă

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left[1+\frac{p}{n}+\frac{p(p-1)}{2n^2}+\ldots\right]\left[1+\frac{q\alpha_n}{n\log n}+\frac{q(q-1)\alpha_n^2}{2n^2\log^2 n}+\ldots\right]$$

$$\times\left[1+\frac{r\beta_n}{n\log n\log_2 n}+\frac{r(r-1)\beta_n^2}{2n^2\log^2 n\log_2^2 n}+\ldots\right].$$

$$\therefore \qquad \frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+\frac{q\alpha_n}{n\log n}+\frac{r\beta_n}{n\log n\log_2 n}+\frac{\theta_n}{n^2\log n}, \tag{3}$$

unde θ_n rămâne finit şi diferit de zero când $n\to\infty$.

Aceste pregătiri odată puse la punct, să aplicăm regula RAABE DUHAMEL. Avem:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p+\frac{q\alpha_n}{\log n}+\frac{r\beta_n}{\log n\log_2 n}+\frac{\theta_n}{n\log n}.$$

Când $n\to\infty$, expresiunea

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\to p.$$

Prin urmare, dacă $p>1$ seria din problemă este convergentă dacă $p<1$ seria e divergentă.

In cazul $p=1$, formăm expresia

$$\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\log n=q\alpha_n+\frac{r\beta_n}{\log_2 n}+\frac{\theta_n}{n}.$$

Când $n\to\infty$, expresiunea din primul membru va avea valoarea q. Prin urmare când $p=1$, $q>1$ seria e convergentă, când

$p = 1$, $q < 1$ seria e divergentă. Să considerăm cazul $q = 1$. Atunci se ia expresiunea următoare

$$\left\{\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]\log n - 1\right\}\log\log n = \tag{4}$$

$$= (\alpha_n - 1)\log\log n + r\beta_n + \theta_n \frac{\log\log n}{n}.$$

Insă din cele expuse mai sus avem

$$\alpha_n = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \ldots$$

$$\therefore \quad \alpha_n - 1 = \frac{1}{n^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{4n^2} + \ldots\right)$$

$$\therefore \quad (\alpha_n - 1)\log\log n = \frac{\log\log n}{n^2}\rho_n$$

unde ρ_n rămâne finit când $n \to \infty$.

Să stabilim limita expresiei $\frac{\log n}{n}$ când $n \to \infty$. După teorema lui CESÀRO *(Analisi algebrica*, 1894, p. 98), reese

$$\lim \frac{\log n}{n} = \lim \frac{\log n - \log(n-1)}{n-(n-1)} = \lim \log\left(\frac{n}{n-1}\right) = 0$$

Deasemenea când $\alpha > 0$ avem:

$$\lim \frac{\log n}{n^\alpha} = \lim \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\log n^\alpha}{n^\alpha}\right).$$

Punând aici

$$n^\alpha = m, \quad \lim \frac{\log n}{n^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\lim \frac{\log m}{m} = 0.$$

La fel deducem pentru $\alpha > 0$:

$$\frac{\log\log n}{n^\alpha} = \left(\frac{\log\log n}{\log n}\right) \cdot \left(\frac{\log n}{n^\alpha}\right) \to 0$$

Pentru $\alpha = 1$, 2 rezultă limitele

$$\lim \frac{\log\log n}{n} = 0 \quad \text{când} \quad n \to \infty$$

$$\lim \frac{\log\log n}{n^2} = 0 \quad \text{când} \quad n \to \infty.$$

In asemenea condiţiuni expresiunea (4) devine la limită egală cu r. Prin urmare dacă $p = 1$, $q = 1$, $r > 1$ seria e convergentă, dacă $p = 1$, $q = 1$, $r < 1$, seria e divirgentă. Rămâne cazul $p = 1$, $q = 1$, $r = 1$. Atunci termenul general al seriei devine

$$a_n = \frac{1}{n \log n \log\log n}; \tag{5}$$

se cunoaşte că o asemenea serie e divergentă. Totuşi voi aminti corespondenţilor un mod de a stabili divergenţa seriei (5). Pornim dela seria cu termenul general

$$u_n = \frac{1}{n \log n}, \tag{6}$$

şi ne servim de criteriul condensator al lui CAUCHY (BROMWICH, *Infinite Series*, 1931, p. 28; KNOPP, *Unendliche Reihen*, 1931, pp. 121—123).

Seria (6) este convergentă în acelaşi timp cu seria

$$2^p u_{2^p} = \frac{2^p}{2^p \log 2^p} = \frac{1}{p \log 2} = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{p}$$

Insă ultima serie este seria armonică, serie divergentă cunoscută. Deasemenea seria (5) este convergentă în acelaş timp cu seria

$$2^p a_{2^p} = \frac{2^p}{2^p \log 2^p \log\log 2^p} = \frac{1}{p \log 2 \log (p \log 2)}$$

Insă

$$\frac{1}{p \log 2 \log (p \log 2)} > \frac{1}{p \log p},$$

deoarece

$$\log 2 < 1$$

$$p \log 2 < p \qquad (p > 0)$$

$$\log (p \log 2) < \log p$$

$$\therefore \quad p \log 2 \log (p \log 2) < p \log p$$

$$\therefore \quad \frac{1}{p \log 2 \log (p \log 2)} > \frac{1}{p \log p}.$$

Insă seria $\frac{1}{p \log p}$ este seria (6) care este divergentă. Prin

urmare seria (5) este divergentă. Aşa dar seria din problema propusă este divergentă când $p = 1$, $q = 1$, $r = 1$.

Soluţia II. Să rezolvăm problema propusă utilizând criteriile logaritmice.

In adevăr să formăm expresiunea:

$$\frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} = p + q\frac{\log \log n}{\log n} + r\frac{\log \log \log n}{\log n}$$

Insă:

$$\frac{\log \log n}{\log n} \to 0, \quad \text{când} \quad n \to \infty$$

$$\frac{\log \log \log n}{\log n} = \left(\frac{\log \log \log n}{\log \log n}\right)\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right) \to 0.$$

Aşa dar

$$\frac{\log \frac{1}{a_n}}{\lim \log n} = p.$$

Prin urmare pentru $p > 1$ convergenţă, pentru $p < 1$ divergenţă.

Pentru $p = 1$ considerăm criteriul logaritmic următor:

$$\frac{\log \frac{1}{n a_n}}{\log \log n} = q + r\frac{\log \log \log n}{\log \log n}.$$

Insă

$$\frac{\log \log \log n}{\log \log n} \to 0, \quad \text{când} \quad n \to \infty$$

fiindcă punând $\log \log n = m$, când $n \to \infty$, totul reducându-se la limita expresiei $\frac{\log m}{m}$ când $m \to \infty$, limită care, am văzut că este egală cu zero. Aşa dar $p = 1$, $q > 1$ convergenţă; $p = 1$, $q < 1$ divergenţă. Când $q = 1$, aplicăm criterul logaritmic următor:

$$\frac{\log \frac{1}{n a_n \log n}}{\log \log \log n} = r.$$

Rezultă că $p = 1$, $q = 1$, $r > 1$ convergenţă; $p = 1$, $q = 1$, $r < 1$ divergenţă.

Cazul $p = 1$, $q = 1$, $r = 1$ este seria (5) care a fost studiată mai înainte.

Divergența seriei (5) se scoate în evidență rapid cu criteriul logaritmic următor în scara întrebuințată.

Avem:

$$\log \frac{1}{\frac{n\, a_n \log n \log_2 n}{\log_4 n}} = 0.$$

In rezumat, rezultatul cercetărilor asupra convergenții sau divergenții seriei considerate se vede din schema următoare:

Convergență
$$\begin{cases} p > 1,\ q \text{ și } r \text{ oarecari} \\ p = 1,\ q > 1,\ r \text{ oarecare} \\ p = 1,\ q = 1,\ r > 1. \end{cases}$$

Divergență
$$\begin{cases} p < 1,\ q \text{ și } r \text{ oarecari} \\ p = 1,\ q < 1,\ r \text{ oarecare} \\ p = 1,\ q = 1,\ r \leqq 1. \end{cases}$$

Observațiuni. **1°. Limita expresiei $\frac{\log n}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ se poate pune în evidență și astfel. Fie p un întreg pozitiv. Atunci avem:**

$$p < \log n < p + 1 \quad \therefore \quad e^p < n < e^{p+1}$$

$$\therefore \quad \frac{\log n}{n^\alpha} < \frac{p+1}{e^{\alpha p}}.$$

Insă $e^\alpha = a > 1$. Să punem $a = \frac{1}{x}$ $(x < 1)$.

In asemenea condițiuni rezultă:

$$\frac{\log n}{n^\alpha} < (p+1)\, x^p.$$

Insă seria cu termenul general pxp este convergentă pentru $x < 1$ prin urmare $p\, x^p \to 0$, când $p \to \infty$. La fel $x^p \to 0$.

Putem deci să scriem:

$$p\, x^p < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{când} \quad p \geqq P_1$$

$$x^p < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{când} \quad p \geqslant P_2$$

Dacă P este cel mai mare dintre întregii P_1 și P_2, atunci rezultă că

$$\frac{\log n}{n^\alpha} < \varepsilon, \quad \text{când } p \geqslant P.$$

Când $\alpha = 1$, regăsim $\lim \frac{\log n}{n} = 0$.

2°) **Divergența seriei** $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ se poate evidenția și în chipul următor.

Dacă x este un număr > 0 avem $\log (1 + x) < x$.

$$\therefore \quad \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$$\therefore \quad \log (1 + n) < \left(1 + \frac{1}{n \log n}\right) \log n$$

$$\therefore \quad \text{loglog } (1 + n) < \log \log n + \log \left(1 + \frac{1}{n \log n}\right).$$

Însă din $\log (1 + x) < x$, reese că

$$\log \left(1 + \frac{1}{n \log n}\right) < \frac{1}{n \log n}.$$

$$\therefore \quad \log \log (1 + n) < \log \log n + \frac{1}{n \log n}$$

Făcând în această inegalitate $n = 2, 3, 4, \ldots$ și adunând, se obține:

$$\log \log (1 + n) < \log \log 2 + S_n,$$

unde s'a însemnat cu S_n, suma primilor n termeni ai seriei $\sum \frac{1}{n \log n}$.

$$\therefore \quad S_n > \log \log (1 + n) - \log \log 2$$

Însă putem găsi un întreg A destul de mare astfel încât pentru $n \geq N$

$$\log \log (1 + n) - \log \log 2 > A$$

și deci $\quad S_n > A \quad$ când $\quad n \leq N$.

Prin urmare $S_n \to \infty$ și deci seria este divergentă.

3°. Să se apropie studiul făcut aici de cercetările autorului publicate în *„Buletinul Politehnicei din București"*, anul 1942, caetul 1—2, pp. 31—41.

4°) Problema a fost rezolvată parțial de d-l ANTON I. VARGĂ (student inginer). D-sa a aplicat primul criteriu logaritmic și a stabilit numai cazurile $p > 1$ convergență, $p < 1$ divergență, lăsând la o parte cazul $p = 1$.

O soluție parțială s'a primit și dela d-l SOFRONIE ȘTEFĂNESCU (Lic. Militar Craiova).

5°) Am dat desvoltările de mai sus pentru a stimula pe corespondenții nostri să se ocupe de acest domeniu așa de plăcut și extrem de important pentru cercetările contemporane, din teoria seriilor.

VIRGIL CLAUDIAN.

PROBLEMA 6431. *Să se formeze un patrat de 8 cifre, întrebuinţând de 2 ori cifra 2 şi de câte 3 ori pe fiecare din cifrele 1 şi 4.*

G-L GH. BUICLIU.

Fie $N^2 = \ldots mszu$

patratul căutat, m, s, z, u fiind respectiv cifra miilor, a sutelor, a zecilor şi a unităţilor. Cifra u fiind terminaţie de patrat şi găsindu-se numai între cifrele date în enunţ nu poate fi decât 1 sau 4 în care caz N se termină în 1 sau 9, sau în 2 sau 8. Din aproape în aproape se determină celelalte cifre ale lui N dând succesiv valorile pe care le pot avea z, s, u printre cifrele date. Insă forma lui N faţă de o terminaţie de 4 cifre a lui N^2 este cunoscută şi dată sub formă de tabel în *Gazeta Matematică* [1].

Folosind rezultatele găsite acolo formăm următorul tabel, utilizând cifrele date în enunţ.

mszu	Forma lineară a lui N	Pentru m egal		
		1	2	4
$m121$	$5000n \pm (500m+11)$ $5000n \pm (500m+1261)$	$5000n \pm 511$ $5000n \pm 1761$	$5000n \pm 1011$ $5000n \pm 2261$	$5000n \pm 2011$ $5000n \pm 3261$
$m241$	$5000n \pm (500m+1921)$ $5000n \pm (500m+671)$	$5000n \pm 2421$ $5000n \pm 1171$	$5000n \pm 2921$ $5000n \pm 1671$	$5000n \pm 3921$ $5000n \pm 2671$
$m441$	$5000n \pm (500m+21)$ $5000n \pm (500m-1229)$	$5000n \pm 521$ $5000n \mp 729$	$5000n \pm 1021$ $5000n \mp 229$	$5000n \pm 2021$ $5000n \pm 771$
$m224$	$2500n \pm (250m+332)$	—	$2500n \pm 832$	$2500n \pm 1332$
$m424$	$2500n \pm (250m+882)$	$2500n \pm 1132$	—	—
$m144$	$2500n \pm (250m+12)$	—	$2500n \pm 512$	$2500n \pm 1012$
$m244$	$2500n \pm (250m+1162)$	—	$2500n \pm 1662$	$2500n \pm 2162$
$m444$	$2500n \pm (250m-288)$	$2500n \pm 38$	—	—

1) I. V. MĂTIEŞ. *Patrate isofinale.* G. M. XLIX—397.

Se observă că

$$11122444 < N^2 < 4442121 \quad \therefore \quad 3335 < N < 6664.$$

Ţinând seamă de aceste limite, valorile pe care le poate avea N pentru diferitele valori ale lui n în tabelul precedent sunt

mszu	Valorile posibile ale lui N pentru m egal cu		
	1	2	4
m 121	5511	3989, 6011	3261
m 241	3829, 6171	3329, 6671	3921, 6079
m 441	4279, 5521, 5729	3979, 4771, 5229, 6021	4229, 5771
m 224	—	3332, 4168, 5832	3668, 3832, 6332
m 424	3868, 6132	—	—
m 144	—	4488, 5512	3988, 6012
m 244	—	3338, 4162, 6663	4662
m 444	4962, 5038	—	—

Pentru a reduce numărul ridicărilor la patrat observăm că suma cifrelor lui N^2 fiind 19, rezultă

$$N^2 = 9m + 1 \quad \therefore \quad N = 9m \pm 1.$$

Numerele de această formă din tabelul precedent sunt 6011, 3329, 3979, 4229, 4168, 3988 şi 3338 pe care ridicându-le la patrat găsim soluţiile

$$3338^2 = 11142244 \quad \text{şi} \quad 3668^2 = 14114224.$$

Pe aceeaşi cale se poate rezolva problema 5272, propusă la pag. 389, Vol. XLV şi la care n'am primit nici o soluţie.

Notă. D-l AUREL TIBĂR (Lic. „Mircea cel Bătrân, Constanţa) a găsit numai prima soluţie afirmând că a făcut P_8 permutări între cifrele date şi *considerând* că pătratul cerut începe cu 1 şi se termină cu 4, ceea ce nici nu se spune, nici nu se subînţelege din enunţ.

EXERCIŢII

29. *Între elementele unui triunghiu avem*

$$\frac{1}{3}\sum \frac{c^2}{a^2-b^2}\sin(A-B)\operatorname{cosec}(A+B)=1.$$

M. D. PETCULESCU.

R. Avem

$$\sin(A-B)\operatorname{cosec}(A+B)=\frac{\sin(A-B)\sin(A+B)}{\sin^2(A+B)}=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 C}.$$

Din relaţiile fundamentale se scoate

$$\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{a^2-b^2}{c^2}\quad\therefore\quad \sin(A-B)\operatorname{cosec}(A+B)\frac{c^2}{a^2-b^2}=1.$$

30. *Să se determine* m *şi* n *astfel ca polinomul*

$$P(x)=mx^{p+1}+nx^p-1$$

să se dividă prin $(x-1)^2$ *şi în acest caz să se găsească câtul.*

I. A. BARBU

R. Făcând în $P(x)$ şi $P'(x)$ pe x egal cu 1 se obţine

$$m+n-1=0\ ,\ m(p+1)+np=0\ \therefore\ m=-p\ ,\ n=p+1$$

De unde se deduce

$$P(x)=-[px^{n+1}-(p+1)x^p+1]=-(x-1)[px^n-x^{n-1}-\ldots-x-1]$$

$$\therefore\quad P(x)=-(x-1)^2[px^{n-1}+(p-1)x^{n-2}+\ldots+3x^2+2x+1]$$

şi sub o formă concentrată, avem câtul:

$$Q(x)=\sum_{i=0}^{p}(p-1)x^{p-i-1}$$

PROBLEME PROPUSE

6491. Pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC, să se găsească punctele M, N, P astfel ca

$$BM=MN=NP=PA.$$

ULPIU M. FLORESCU.

6492. Să se construiască trapezul ABCD, cunoscând unghiul A şi triunghiul BCI, unde BC este una din laturile neparalele şi I este intersecţia diagonalelor AC şi BD.

Caz particular când unghiurile din A şi I sunt drepte.

C. IONESCU-ŢIU.

6493. Perpendiculara dusă din vârful B al triunghiului ABC, pe direcţia diametrului OC al cercului ABC, tae latura AC în D, iar perpendiculara în D pe AC tae cercul de diametru AC în P şi Q.

Se cere locul geometric al punctelor P şi Q când B şi C rămân fixe şi A se mişcă pe cercul ABC. Discuţie.

AURELIAN I. STAN.

6494. Să se arate că dacă suma $a+b$ este reală, atunci $\left(\sqrt[5]{a-i\sqrt{b}}+\sqrt[5]{a+i\sqrt{b}}\right)^5$ şi $\left(\sqrt[7]{a-i\sqrt{b}}+\sqrt[7]{a+i\sqrt{b}}\right)^7$, sunt reale şi egale.

G-L GH. BUICLIU.

6495. Fie

$$C=\frac{A}{2}+\varepsilon\frac{m+n}{m-n}\cdot\frac{\sqrt{B}}{2},$$

$$D=\frac{A}{2}+\varepsilon\frac{m+3n}{m-n}\cdot\frac{\sqrt{B}}{2}. \qquad (\varepsilon=\pm 1)$$

Să se arate, că oricare ar fi parametrii reali $m\neq n\neq 0$, relaţia

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{C+\sqrt{\left(\frac{A}{2}+\varepsilon\frac{\sqrt{B}}{2}\right)D}}\pm\sqrt{C-\sqrt{\left(\frac{A}{2}+\varepsilon\frac{\sqrt{B}}{2}\right)D}}$$

este o identitate, dacă ε este astfel ales încât să avem

$$\pm\varepsilon\frac{m+n}{m-n}>0.$$

G. G. CONSTANTINESCU.

6496. Să se demonstreze inegalitatea

$$C_m^p - C_K^1 C_{m-2}^{p-2} + C_K^2 C_{m-4}^{p-4} - C_K^3 C_{m-6}^{p-6} + \ldots \geqq 2^p C_K^p,$$

unde C_n^i este simbolul combinărilor iar K este numărul întregilor cuprinşi în $\frac{m}{2}$.

MIRCEA ADAM.

6497. Să se studieze natura seriei cu termenul general

$$u_n = \left(\frac{a + \frac{p}{n} \log n}{a + \frac{q}{n} \log n} \right)^n$$

unde a, p, q sunt constante reale.

VIRGIL CLAUDIAN.

6498. Fie seria

$$U = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + \ldots$$

în care $$u_{n+p} = \frac{u_n}{n} + \frac{u_{n-1}}{n-1} + \frac{u_{n-2}}{n-2} + \ldots + \frac{u_{n-p}}{n-p}.$$

Se cere:

1°. Să se studieze seria U pentru $x = 1$ ţinând seama de u_{n+p}.

2°. Să se afle raza cercului de convergenţă a seriei U pentru $|x| \neq 1$. Justificare.

N. GAIU.

6499. Să se studieze cu ajutorul teoremei lui ROLLE ecuaţia

$$x^4 - 2x^3 + \lambda x^2 - (\lambda - 1)x + \mu = 0.$$

Considerând parametrii λ şi μ drept coordonatele unui punct din plan, să se separe planul în regiuni, după natura rădăcinilor ecuaţiei.

GH. D. SIMIONESCU.

6500. Un punct M descrie curba (C) de ecuaţie $r = r(\varphi)$. Fie OA o direcţie fixă ce trece prin polul O al sistemului. Proecţia ortogonală P a lui M pe OA, execută o mişcare armonică.

Se cere să se scrie ecuaţia curbei (C) şi să se studieze caracterul mişcării punctului M.

IOSIF HITZIG.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Crăciunescu E. (P); *Deleanu I. Aristide* (4954); *Enescu G. G.* (E); *Păunescu St. Gh.* (6153, 365, 455); *Soare V. M.* (6470); *Stănescu D. C.* (6411); *Teodorescu P. P.* (N); *Ţopa I. N.* (6394 5, 8); *Vargă I. A.* (2638, 4132, 6472).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate, cu preţul de 800 lei volumul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—III, V—X, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia a III-a. Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 270

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 90

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 450

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 130

XX. **I. I. Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 160

XXI. **M. Ghermănescu**, *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . Lei 450

XXII. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . Lei 230

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 90

XXIV. **A. G. Ioachimescu**, *Mecanica raţională*, Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.270

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 360

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 180

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 90

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* Lei 230

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Costul abonamentului este de Lei 800

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Octombrie 1948 la 1 Iunie 1949 inclusiv. Costul abonamentului este de. . . . . Lei 360

Abonamentele se pot plăti la cont CEC Nr. 26220 sau pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 12.816.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIII

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1948

SUMARUL

1. Asupra unei cuartice piriforme . . . . *Ing. Al. Şcodranu.*
2. Raport asupra premiului de mecanică „Spiru Haret" . . . . . *Ing. I. S. Antoniu, Ing. Al. Stoenescu, Ing. Gab. Ţiţeica.*
3. Note matematice: 35—36.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 2217, 3961, 5839, 5871, 5907, 5951, 6084, 6262.
9. Exerciţii: 31—38.
10. Probleme propuse: 6500—6510.
11. Tabla de materii.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALA
1948

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie, compusă în prezent din d-nii: **G. G. Constantinescu**, Doctor în Matematici; **C. C. Teodorescu**, Inginer, Profesor la Politehnica Bucureşti; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier).

Şedinţele următoare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Marţi 24 August ora 17: A doua adunare generală. Ora 19: şedinţa lunară pentru adunarea materiei pentru Nr. 1 Vol. LIV.

Marţi 31 August ora 18: Continuarea lucrărilor Adunării generale pentru chestiunile care nu au putut fi rezolvate la 24 August.

Marţi 7 Septembrie ora 18: Facerea copertei Nr. 1. Hotărâri asupra concursului *Gazeta Matematică* din 1949.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1947 sunt indicate în tabla de materii a volumului LII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **63**91, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **4**00, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 30, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 50, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 60, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 80, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 90, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, **5**00, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *«Gazeta Matematică»* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . „ 150
— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *« Gazetei Matematice »* . . . . . „ 500

ASUPRA UNEI CUARTICE PIRIFORME

I. Intr'un articol intitulat *Adevărata curbă* **„pară"** şi publicat în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXV, pag. 442, d-l G-L GH. BUICLIU studiază cuartica

$$x^4 - ax^3 + b^2 y^2 = 0, \qquad (1)$$

care generează dintr'un cerc de diametru a, tangent în origină la axa oy, şi a cărei curbă reprezentativă seamănă cu profilul longitudinal al unei pere, mai mult sau mai puţin turtită după cum dreapta $x = b$ este mai apropiată sau mai depărtată de origină.

Curba este tangentă cercului generator şi *îl taie sau nu pe acesta*, după cum parametrul b, luat în valoare absolută, este mai mic sau mai mare decât diametrul a.

Curbe care să sugereze o asemănare cu para se pot găsi în *„Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven"*, de d-l DR. GINO LORIA, Vol. I (ed. 1910), unde se află tratate, printre altele, şi cuartica semnalată de d-l G-L GH. BUICLIU.

In cele ce urmează vreau să dau construcţia unei alte curbe piriforme, pe care am găsit-o întâmplător şi care este tot o cuartică generată de un cerc, *pe care îl taie*, să-i stabilesc ecuaţia şi să arăt câteva proprietăţi de care se bucură.

II. Fie, pentru aceasta, XOY un sistem de axe dreptunghiulare şi (C) un cerc fix cu centrul pe OX şi tangent la OY. O coardă variabilă, paralelă cu OX, taie pe OY în N, iar cercul în M_1 şi M_2, care se proectează în P_1 şi P_2 pe OX. Fie Q_1, Q_2 proecţiunile lui M_1 şi M_2 pe NP_1, NP_2. *Locul geometric al punctelor* Q_1, Q_2, *când coarda* M_1M_2 *se deplasează paralel cu ea însăşi, este o cuartică piriformă.*

Insemnând cu (ξ, η) coordonatele unui punct oarecare M, acelea ale lui Q, construit în condiţiunile problemei, vor rezulta din intersecţia dreptelor PN şi MQ, ale căror ecuaţii sunt

$$\frac{X}{\xi} + \frac{Y}{\eta} = 1 \quad , \quad Y - \eta = \frac{\xi}{\eta}(X - \xi). \qquad (2)$$

Rezolvând sistemul (2) se găseşte

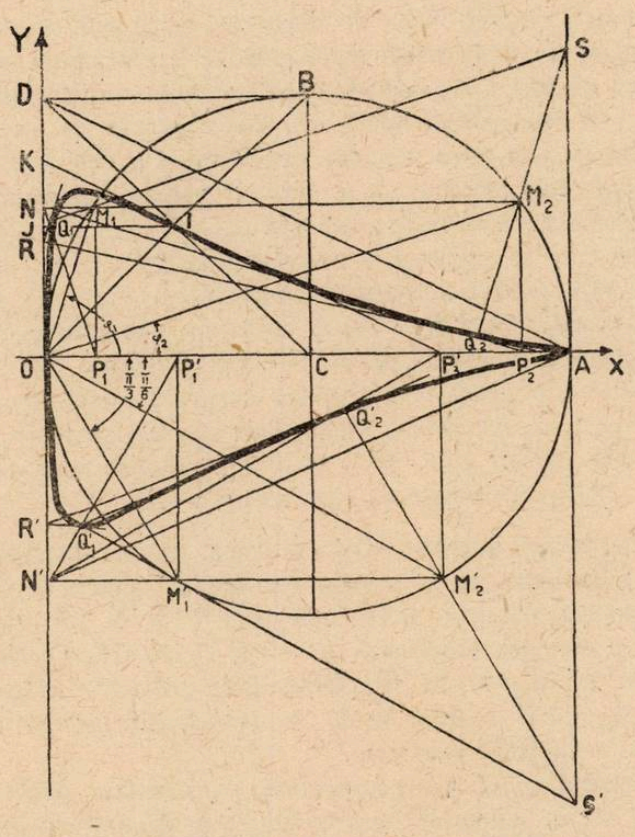
$$X_Q = \frac{\xi^3}{\xi^2 + \eta^2} \quad , \quad Y_Q = \frac{\eta^3}{\xi^2 + \eta^2}. \qquad (3)$$

Când M descrie cercul (C)

$$X^2 + Y^2 - aX = 0, \qquad (4)$$

de diametru a ($a > 0$) şi tangent în origine la OY, coordonatele lui, exprimate în funcţiune de unghiul φ, pe care dreapta OM îl face cu OX, sunt

$$\xi = a\cos^2\varphi \quad , \quad \eta = a\sin\varphi\cos\varphi \tag{5}$$



şi, prin urmare, coordonatele lui Q devin, — însemnându-le cu x, y, când acest punct este curent —,

$$x = a\cos^4\varphi \quad , \quad y = a\sin^3\varphi\cos\varphi, \tag{6}$$

sau, punând $\operatorname{tg}\varphi = t$,

$$\xi = \frac{a}{t^2+1} \quad , \quad \eta = \frac{at}{t^2+1}, \tag{5'}$$

$$x = \frac{a}{(t^2+1)^2} \quad , \quad y = \frac{at^3}{(t^2+1)^2}. \tag{6'}$$

Avem astfel în (6) şi (6') reprezentarea parametrică a curbei căutate. Pentru a-i obţine ecuaţia sub forma $f(x, y) = 0$, eliminăm pe t, observând că avem

$$y = t^3 x, \quad \therefore \quad t^2 = \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{x}.$$

Substituind pe t^2 în expresiunea lui x, avem succesiv

$$(\sqrt[3]{xy^2} + x)^2 = ax \quad \therefore \quad \sqrt[3]{xy^2} = -x \pm \sqrt{ax}$$

$$\therefore \qquad xy^2 = -x^3 \pm 3x^2\sqrt{ax} - 3ax^2 \pm ax\sqrt{ax}$$

şi, înlăturând soluţia $x = 0$,

$$y^2 = -x(x + 3a) \pm (3x + a)\sqrt{ax}.$$

Cum a este pozitiv, x va trebui să fie şi el pozitiv pentru ca produsul ax de sub radical să fie pozitiv. Produsul $(3x + a)\sqrt{ax}$ fiind deci pozitiv, ca şi $x(x + 3a)$, nu putem lua radicalul cu semnul minus înainte, căci y^2 ar rezulta negativ. Extrăgând rădăcina patrată, avem, prin urmare,

$$y = \pm\sqrt{-x(x + 3a) + (3x + a)\sqrt{ax}}, \qquad (7)$$

adică ecuaţia explicită a curbei în raport cu y, care se poate scrie sub forma, mult mai simplă,

$$y = \pm x^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}. \qquad (7')$$

Din (7) se deduce

$$y^4 + 2x(x + 3a)y^2 + x(x - a)^3 = 0, \qquad (8)$$

care este ecuaţia curbei sub forma $f(x, y) = 0$.

III. Curba loc fiind simetrică în raport cu axa OX, îi vom studia numai ramura pozitivă, luând expresiunea lui y cu semnul plus înainte. Ea este reală când

$$0 < x < a,$$

ceeace era evident *à priori*.

Pentru amândouă valorile limită ale lui x, y este nul. Curba trece deci prin origină şi prin punctul diametral opus al cercului generator (punctul A din figură).

Derivata lui y este

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(a+9x) - 2(2x+3a)\sqrt{ax}}{4\sqrt{ax}\sqrt{-x(x+3a)} + (3x+a)\sqrt{ax}}. \qquad (9)$$

Pentru a-i cerceta semnul, înmulţim numărătorul şi numitorul cu conjugata numărătorului, care este o expresiune pozitivă când x variază dela 0 la a şi studiem apoi semnul numărătorului, numitorul fiind pozitiv. Este preferabil însă să utilizăm ecuaţia (7'), care, derivată, ne dă

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}})\,(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{4}}}.$$

Se vede că derivata se anulează pentru $x = \frac{a}{16}$, schimbându-şi semnul dela plus la minus. Curba are deci un maximum, a cărui valoare este $\frac{3a\sqrt{3}}{16}$.

Acest maximum poate fi calculat mai uşor dacă ne raportăm la expresiunea parametrică (6) a lui y. Cum el are loc în acelaşi timp cu maximul lui

$$y^2 = a^2(\sin^2\varphi)^3(\cos^2\varphi),$$

în care

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

y^2 va fi maxim când vom avea

$$\frac{\sin^2\varphi}{3} = \frac{\cos^2\varphi}{1}, \quad \therefore \quad \operatorname{tg}^2\varphi = 3; \quad \therefore \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{3},$$

valorile lui x şi y fiind, în acest caz,

$$x = \frac{a}{16} \quad , \quad y = \pm\frac{3a\sqrt{3}}{16}.$$

Este uşor de văzut că, dacă $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ este unghiul corespunzător capătului M_1' al coardei $M_1'M_2'$, celuilalt capăt M_2' îi va corespunde un unghiu $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$ [1].

1) Spre a nu complica figura, am luat punctele M_1', M_2' pe semicercul inferior.

Pentru $x = a$ derivata este nedeterminată. Cum sistemul format de ecuația (8) împreună cu derivatele ei în raport cu x și y este compatibil pentru $x = a$, $y = 0$, curba va avea în $(a, 0)$ un punct multiplu, al cărui grad de multiplicitate îl găsim mutând axele în acest punct și luând termenii de gradul cel mai mic ai ecuației (8), pe care îi egalăm cu zero, după ce am făcut $y = \lambda x$. Termenul de gradul cel mai mic, după schimbarea axelor, fiind $8a^2y^2$, rezultă $\lambda^2 = 0$, deci $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Curba va avea, prin urmare, în A un punct de întoarcere, tangenta comună fiind axa OX.

In sfârșit, pentru $x = 0$ derivata este infinită. Curba este tangentă în origine la axa OY ca și la cercul care o generează.

Intre punctul de maximum și cel de întoarcere, curba prezintă un punct de inflexiune, a cărui poziție se determină egalând cu zero derivata a doua. Cum calculul acesteia este complicat, vom găsi punctul de inflexiune pe calea arătată la punctul 6° dela IV, care urmează.

Cu aceste date, putem trasa curba. Ea se prezintă ca în figură și are aspectul unei pere, *care taie cercul.* Intr'adevăr eliminând ordonata între ecuațiile (4) și (8), se găsește, în afară de rădăcinile $x = 0$, $x = a$, și rădăcina $x = \frac{a}{9}$ $\therefore$ $y = \frac{2a\sqrt{2}}{9}$.

IV. Voi arăta acum câteva proprietăți ale acestei curbe. Să observăm mai întâi că, atunci când coarda M_1M_2 este tangentă la cerc în B, cele două puncte Q_1, Q_2 ale cuarticei se confundă într'unul singur, I, situat la mijlocul lui OB. Când coarda se deplasează paralel cu diametrul OA, punctele Q_1, Q_2, — pe care le vom numi omoloage —, se depărtează de I, descriind arcele de curbă IO, IA. Ele se găsesc deci întotdeauna deoparte și de alta a ordonatei punctului I, ceeace se poate vedea și din expresiunea (6) a lui x, care, pentru

$\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$, ne dă $x_1 = a\cos^4\varphi_1$, $x_2 = a\sin^4\varphi_1$

și deci $x_1 \leqslant \frac{a}{4}$, $x_2 \geqslant \frac{a}{4}$,

după cum $\varphi_1 \geqslant \frac{\pi}{4}$.

1°. Insemnând cu ξ_1, η, ξ_2, η coordonatele punctelor M_1, M_2 și cu x_1, y_1, x_2, y_2 pe acelea ale punctelor Q_1, Q_2, avem din (3), ținând seama de (4),

$$x_1 = \frac{\xi_1^2}{a}, \quad x_2 = \frac{\xi_2^2}{a} \tag{10}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{(\xi_1 + \xi_2)(\xi_2 - \xi_1)}{a}$$

și cum $\xi_1 + \xi_2 = a$, rămâne

$$x_2 - x_1 = \xi_2 - \xi_1. \tag{11}$$

Distanța pe orizontală a două puncte omoloage ale curbei este egală deci cu lungimea coardei care le generează.

2°. Tot din (3) și (4) avem

$$y_1 = \frac{\eta^3}{a\xi_1}, \quad y_2 = \frac{\eta^3}{a\xi_2}$$

și cum

$$\eta^2 = \xi_1(a - \xi_1) = \xi_2(a - \xi_2) \tag{12}$$

rezultă

$$y_1 = \frac{\eta}{a}(a - \xi_1), \quad y_2 = \frac{\eta}{a}(a - \xi_2) \tag{13}$$

$$\therefore \qquad y_1 + y_2 = \eta,$$

adică *suma ordonatelor a două puncte omoloage ale curbei este egală cu înălțimea coardei generatoare.*

3°. Din (13) avem

$$y_2 - y_1 = -\frac{\eta}{a}(\xi_2 - \xi_1)$$

și, ținând seama de (11),

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{\eta}{a},$$

relație care ne arată că *dreapta care leagă două puncte omoloage ale curbei este paralelă cu dreapta care unește piciorul coardei generatoare pe axa* OY *cu punctul* A.

4°. Când cele două puncte ale curbei se confundă în I, dreapta care le unește ajunge tangentă la curbă în I și paralelă

cu AD, D fiind proiecţiunea lui B pe OY. Fie K intersecţia tangentei în I cu OY şi J punctul unde paralela dusă prin I la OX taie pe OY. Triunghiurile IJK şi AOD fiind asemenea, avem

$$\frac{\overline{JK}}{\overline{JI}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2}, \quad \overline{JK} = \frac{\overline{JI}}{2} = \frac{\overline{OD}}{4}$$

şi, prin urmare,

$$\overline{OK} = \frac{3\,\overline{OD}}{4},$$

deci *tangenta la curbă în* I *taie axa* OY *la trei sferturi din înălţimea coardei generatoare, adică a razei.*

5°. Să vedem dacă această proprietate a tangentei în I nu este generală. Ecuaţia tangentei la curbă în punctul (x, y) este

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

unde x şi y sunt date de relaţiile (6′). Derivând aceste relaţii în raport cu parametrul t, avem

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{4at}{(t^2+1)^3}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{at^2(t^2-3)}{(t^2+1)^3};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{t(t^2-3)}{4}$$

şi deci ecuaţia tangentei devine

$$Y - \frac{at^3}{(t^2+1)^2} = \frac{t(t^2-3)}{4}\left[X - \frac{a}{(t^2+1)^2}\right], \tag{14}$$

$$\therefore \quad Y_0 = \frac{3}{4}\,\frac{at}{t^2+1},$$

Y_0 fiind ordonata ei la origină, sau, ţinând seama de (5′),

$$Y_0 = \frac{3}{4}\eta.$$

Proprietatea dedusă la punctul 4° este deci generală şi, ţinând seama că punctele M_1, M_2 au aceeaşi ordonată, o vom enunţa sub forma: *tangentele la curbă în două puncte omoloage se taie pe axa* OY, *la trei sferturi din înălţimea coardei generatoare.*

6°. Fie R punctul lor de intersecție. Să presupunem că coarda M_1M_2 se deplasează din poziția OA spre tangenta la cerc în B. In acest caz punctele Q_1, Q_2 descriu arcele de curbă OI, AI, iar punctul R se deplasează dela O la K. Curba fiind tangentă în origină la axa OY, convexitatea ei în punctul de contact este îndreptată către Y pozitiv, astfel că înclinarea pe OX a tangentei RQ_1 scade când Q_1 se depărtează de O pe curbă.

Dacă curba ar avea un punct de inflexiune între O și I și Q_1 continuă să se depărteze de O, înclinarea tangentei ar începe să crească din dreptul acelui punct și deci R s'ar apropia de O. Aceasta este însă imposibil, căci, în baza proprietății precedente, ar însemna ca și punctul M_1 să se apropie de O și deci și Q_1.

In mod analog se arată că, curba fiind tangentă în A la axa OX și convexitatea ei fiind îndreptată aici în sensul negativ al axei OY, când punctul Q_2 se depărtează de A, înclinarea tangentei RQ_2 crește continuu, până în dreptul punctului I.

Din cele precedente rezultă că I *este un punct de inflexiune al curbei și singurul pe ramura ei pozitivă.*

7°. *Tangenta la curbă, în punctul unde aceasta taie cercul, trece prin* A. Intr'adevăr, făcând în ecuația (14) $Y = 0$, găsim

$$X_0 = -\frac{3a}{(t^2+1)(t^2-3)}.$$

Abscisa punctului de intersecție cu cercul fiind $\frac{a}{9}$, din (6') scoatem $t^2 = 2$ și, prin urmare, $X_0 = a$.

8°. *Dreapta* Q_1M_1, *care unește un punct al curbei cu punctul de pe cerc care îi dă naștere, întâlnește dreapta analoagă* Q_2M_2 *într'un punct* S, *situat pe tangenta la cerc în* A, *la îndoitul înălțimii coardei* M_1M_2, căci, dacă, în ecuția

$$Y - \eta = \frac{\xi}{\eta}(X - x)$$

a unei drepte QM, înlocuim pe ξ și η prin expresiunile lor din (5') și facem apoi pe $X = a$, se găsește

$$Y_a = \frac{2at}{t^2+1} = 2\eta.$$

Geometric, proprietatea se stabileşte observând că avem $Q_1 M_1 \parallel OM_2$ şi $Q_2 M_2 \parallel OM_1$. Ca un corolar al acestui paralelism rezultă egalităţile

$$\overline{Q_1 M_1} = \overline{Q_2 P_2} \ , \ \overline{Q_1 P_1} = \overline{Q_2 M_2}.$$

9°. Fiind dat un punct oarecare x, y al curbei, putem construi omologul lui, construind mai întâi punctul corespunzător ξ, η depe cerc cu ajutorul relaţiilor (10). Intr'adevăr, ξ fiind medie proporţională între x şi diametrul a, *vom lua intersecţia cu cercul a ordonatei punctului dat şi o vom rabate pe diametrul* OA *printr'un arc de cerc cu centrul în* O. *Perpendiculara ridicată pe* OA *în punctul astfel rabătut taie cercul în punctul care generează pe* (x, y).

Paralela dusă la OA prin punctul depe cerc astfel construit ne conduce apoi la omologul lui (x, y) pe calea arătată la începutul acestui articol.

Din cele de până aici se vede că ordonata punctului dat de pe curbă nu intervine în construcţia punctului de pe cerc, care îl generează. Cu alte cuvinte, pentru orice punct situat pe acea ordonată s'ar obţine acelaş punct pe cerc. Construcţia se cere, prin urmare, verificată în baza modului de generare a curbei, arătat în enunţ, adică în sensul că *dreapta care uneşte punctul rabătut cu piciorul coardei generatoare pe tangenta la cerc în* O, *trebue să taie ordonata punctului dat chiar în acel punct.*

10°. Să calculăm, însfârşit, aria închisă de curbă, arie a cărei expresiune este

$$A = 2\int_0^a y\,dx.$$

Din (6) scoatem

$$dx = -4a\cos^3\varphi \sin\varphi\, d\varphi$$

şi ţinând seama că pentru $x = 0$ avem $\varphi = \frac{\pi}{2}$, iar pentru $x = a$, $\varphi = 0$, găsim

$$A = -8a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4\varphi\cos^4\varphi\, d\varphi, \quad \therefore \quad A = 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\cos^4\varphi\, d\varphi.$$

Apoi observând că

$$\cos^4\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi + \sin^4\varphi,$$

$$A = 8a^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\, d\varphi - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\varphi\, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\varphi\, d\varphi\right].$$

Se ştie însă[1] că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

şi, aplicând la cazul nostru,

$$A = 4\pi a^2\left(\frac{1.3}{2.4} - 2\frac{1.3.5}{2.4.6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)$$

sau, făcând calculele,

$$A = \frac{3\pi a^2}{32} = \frac{3}{8}\,\frac{\pi a^2}{4}.$$

Aria închisă de curbă este egală, deci, cu trei optimi din suprafaţa cercului generator.

Cum aria închisă de cuartica (1) este $\frac{\pi a^3}{16b}$, rezultă că valoarea parametrului b pentru ca această arie să egaleze pe cea calculată mai sus este $b = 2a:3$.

V. Comparată cu cuartica al cărei studiu face obiectul articolului citat şi pe care d-l G-L GH. BUICLIU o numeşte *„adevărata curbă pară"*, cuartica de care ne-am ocupat până acum nu are acel caracter de generalitate pe care îl are ecuaţia (1) prin dependenţa acesteia de parametrul b, datorită variaţiei căruia curba reprezentativă îmbracă o infinitate de forme, comparabile mai mult sau mai puţin cu profilul unei pere. Cuartica (8) este *un caz particular* al unei familii de curbe în raport cu cercul dat.

Problema se poate generaliza prin introducerea unui element variabil, care să joace rolul parametrului b de mai sus, sau pe altă cale.

ING. ALEXANDRU ŞCODRANU.

---

1) J.—A. SERRET: *Lehrbuch der differenzial—und integral Rechnung*, vol. II, ed. 1899, pag. 96.

RAPORT ASUPRA PREMIULUI DE MECANICĂ „SPIRU HARET"

Subsemnaţii membri în comisiunea premiului de Mecanică „Spiru Haret" cercetând ultimul volum apărut al *Gazetei Matematice* şi anume dela 15 Sept. 1946 la 15 Sept. 1947, în urma examinării activităţii în domeniul Mecanicei a corespondenţilor *Gazetei Matematice*, am constatat deosebita activitate a d-lui EUGEN N. WEGENER (Politehnica Bucureşti).

D-sa rezolvă într'un mod simplu şi clar interesanta problemă Nr. 5701; deasemenea a prezentat o soluţie foarte bună a problemei 3640.

D-l EUGEN N. WEGENER arată mult interes pentru Mecanică precum şi frumoase şi temeinice cunoştinţe în acest domeniu.

Pentru aceasta propunem a i se acorda premiul de Mecanică „Spiru Haret" pe anul 1947—1948.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL DE MECANICĂ „SPIRU HARET"

ING. I. S. ANTONIU, ING. AL. STOENESCU, ING. GABRIELA ŢIŢEICA.

Aprobat în Adunarea Generală din 17.II.1948.

NOTE MATEMATICE

35. *Asupra unei chestiuni de geometrie.* Răsfoind *„Anuarul Societăţii de elevi Matematica Bârlădeană"* pe anul 1921—1922 am găsit acolo următoarea problemă dată de E. BARISIEN:

Intr'un triunghiu ABC *se construiesc cercurile de centre* A, B, C, *şi cu raze cât laturile a, b, c. Centrul radical al acestor 3 cercuri este simetricul ortocentrului în raport cu centrul cercului circumscris.* Cred că problema a fost reprodusă după *Gazeta Matematică* [1]. Iată o soluţie prin calcul cu câteva observaţiuni de ordin topologic, precum şi o proprietate, poate inedită.

1) Problema 2411 propusă de E. N. BARISIEN şi rezolvată la pag. 298 vol XXVII.

Fie γ simetricul lui H față de O. Să calculăm succesiv, puterea P a lui γ față de fiecare din cercurile menționate. Avem

$$P_A = \overline{\gamma A}^2 - a^2$$

Aplicând teorema medianei în triunghiul AHγ scriem

$$\overline{\gamma A}^2 + \overline{AH}^2 = 2\,\overline{AO}^2 + 2\,\overline{OH}^2$$

$$\therefore \quad \overline{\gamma A}^2 + 4R^2\cos^2 A = 2R^2 + 2R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$$

$$\overline{\gamma A}^2 = 4R^2\sin^2 A - 16R^2\cos A\cos B\cos C$$

$$P_A = \overline{\gamma A}^2 - a^2 = -16R^2\cos A\cos B\cos C.$$

Aceiași valoare o găsim și pentru P_B, P_C. Rezultă că γ este centrul radical al celor 3 cercuri menționate.

Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghiu, punctul γ se găsește în interiorul fiecăruia din cele 3 cercuri menționate.

Dacă triunghiul ABC este obtuzunghiu, punctul γ se găsește în exteriorul fiecăruia din cele 3 cercuri.

Intr'un triunghiu dreptunghic ABC, *cercurile de centre* A, B, C *și cu raze respectiv cât laturile a, b, c, sunt concurente într'un punct* γ.

VIRGIL GHIȚESCU.

36. *Completare la nota 27.* Recitind Nota mea Nr. 27 (G. M. LIII, pag. 365) observ că am omis câteva explicațiuni, ce fac textul nesatisfăcător. Deaceea completez aci.

Când spunem, de exemplu, că avem :

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$$

însemnează că, fiind dat un număr pozitiv ε, arbitrar de mic, putem determina un altul N astfel ca pentru $N \leqq m$ să avem și:

$$\left|\left(1+\frac{1}{m}\right)^m - e\right| \leqq \varepsilon. \qquad (1)$$

Sau, oricum ar fi ales șirul sau mulțimea de valori ale lui m, — număr întreg, prim, rațional sau irațional, putere rațională sau irațională a lui π etc., — de îndată ce m este suficient de mare inegalitatea (1) este verificată.

Nu tot astfel se întâmplă în cazul particular din Nota 27.

Pentru a arăta aceasta reiau acel exemplu modificând convenabil notațiile.

Consider curba:

$$x = x(t) = \frac{1}{\pi} \sin \pi t - t \cos \pi t ,$$

(C)

$$y = y(t) = \frac{1}{\pi} \sin \pi t - (t+1) \cos \pi t$$

și construesc porțiunea (C_n) din această curbă corespunzătoare valorilor lui t cuprinse în intervalul dela $2n$ până la $2n+2$, n fiind un număr întreg, pozitiv sau negativ. Se obține următorul tablou de variație:

t	$2n$		$2n+\frac{1}{2}$		$2n+1$		$2n+\frac{3}{2}$		$2n+2$
x	$-2n$	↗	$\frac{1}{\pi}$	↗	$2n+1$	↘	$-\frac{1}{\pi}$	↘	$-(2n+2)$
y	$-(2n+1)$ *înapoiere*	↗	$\frac{1}{\pi}$	↗	$2n+2$ *înapoiere*	↘	$-\frac{1}{\pi}$	↘	$-(2n+3)$ *înapoiere*

Punctele $A_n(-2n, -2n-1)$, $B_n(2n+1, 2n+2)$ și $A_{n+1}(-2n-2, -2n-3)$ sunt puncte de înapoiere, iar tangentele în aceste puncte trec prin origine. Punctele

$$C\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right) \text{ și } C'\left(-\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{\pi}\right)$$

sunt puncte multiple prin care trec toate porțiunile (C_n). Deasemeni, este ușor de arătat, că arcul A_nCB_n este interior conturului $A_nCB_nOA_n$, iar arcul $B_nC'A_{n+1}$ se găsește înăuntrul conturului $B_nC'A_{n+1}OB_n$. Punctele A_n sunt situate pe dreapta: $y = x - 1$ iar punctele B_n pe dreapta: $y = x + 1$.

Rezultă din aceasta că pentru valorile foarte mari ale lui n, arcul A_nCB_n, poate fi înlocuit prin segmentele de drepte A_nC și CB_n, iar arcul $B_nC'A_{n+1}$ prin segmentele B_nC' și $C'A_{n+1}$. Eroarea ce se face astfel este de ordinul lui $\frac{1}{[n]}$. Așa, de exemplu, diferența între ordonata unui punct de pe arcul A_nC și ordonata

punctului ce are aceeaşi abscisă de pe dreapta $A_n C$ este mai mică decât:

$$\frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{\pi}.$$

Analog, se obţin limite superioare asemănătoare şi pentru celelalte părţi ale segmentelor porţiunei (C_n) [1].

Curba (C) fiind obţinută prin reunirea tuturor porţiunilor (C_n) este evident că pentru $t \to \infty$, această curbă nu tinde către un singur punct, ci către întreaga dreaptă CC' sau $y = x$. Intr'adevăr fie $L(l, l)$ un punct arbitrar pe această bisectoare. Presupun, de exemplu, $l > \frac{1}{\pi}$. Ori cât de mic ar fi numărul pozitiv ε, este clar că pentru n pozitiv şi destul de mare dreptele CB_n şi $C'B_n$ întâlnesc cercul cu centrul în L şi de rază $\frac{\varepsilon}{2}$. Rezultă că există puncte de ale curbei (C) la o distanţă de L mai mică decât ε. Punctul L este deci unul din punctele limită, către care tind punctele curbei (C) când $t \to \infty$. Analog, putem arăta punctele segmentului CC' ca şi cele de pe aceeaşi dreaptă dar la stânga lui C' sunt tot puncte limită. Deasemeni, se poate uşor arăta că nici un punct din afara dreptei CC' nu poate fi punct limită al punctelor lui (C) pentru $t \to \infty$.

Dacă voim acum, să găsim:

$$X = \lim_{t \to \infty} \frac{y(t) - l}{x(t) - l},$$

constatăm imediat că, spre deosebire de ceea ce se întâmplă în cazul numărului e, această limită depinde de modul cum t tinde către ∞.

Fie (E_t) o mulţime oarecare de valori, cuprinzând un număr nelimitat de elemente ce tind către ∞, sau:

$$(E_t)\ t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots \to \infty.$$

---

1) Acesta nu este, dealtminteri, singurul mijloc de a aproxima curba (C). Este uşor de văzut că dreptele $A_n B_n$ trec prin punctul $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ iar dreptele $B_n A_{n+1}$ prin punctul $D'\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Arcul $A_n C B_n$ poate fi înlocuit prin coarda $A_n D B_n$, iar $B_n C' A_{n+1}$ prin $B_n D' A_{n+1}$.

Mulţimea (E_m) a punctelor curbei (C), corespunzătoare valorilor lui t din (E_t), admite unul sau mai multe puncte limită.

Fie $L'(l', l')$ punctul sau unul din aceste puncte limită şi (E'_m) submulţimea extrasă din (E_m), a punctelor ce tind către L. Dacă L' este diferit de L avem evident:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{y(t) - l}{x(t) - l} = \frac{l' - l}{l' - l} = 1,$$

$x(t)$ şi $y(t)$ fiind bine înţeles coordonatele unui punct din (E'_m). Analog se poate proceda şi pentru toate celelalte submulţimi ale lui (E_m) ce admit ca puncte limită puncte diferite de L. Pentru toate aceste submulţimi avem:

$$X = 1.$$

Dacă punctul L este unul din punctele limită ale mulţimii (E_m) se poate întâmpla ca ultima egalitate să nu mai fie exactă. Astfel admit că printre punctele submulţimei (E_l) ce are pe L ca punct limită se găsesc şi punctele de intersecţie cu (C) ale unei drepte oarecare Δ, de coeficient unghiular $\lambda \neq 1$, ce trece prin L. Pentru punctele din (E_l) egalitatea noastră nu este valabilă deoarece, pentru valori ori cât de mari ale lui t există puncte de intersecţie de ale lui (C) cu Δ, pentru care avem:

$$\frac{y(t) - l}{x(t) - l} = \lambda \neq 1.$$

Totdeodată, pentru punctele aceleiaşi submulţimi nu este valabilă nici regula lui L'HOPITAL sau

$$\lim_{t \to \infty} \frac{y(t) - l}{x(t) - l} = \lim_{t \to \infty} \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

deşi ambii termeni ai primul raport tind către zero, iar cel de al doilea are o limită bine definită.

Exemplul acesta este fără îndoială mai puţin simplu decât acela din Nota 26, § 3 (G. M. L. III, pag. 364) unde iregularitatea valorilor lui $sin\, t$ sau $cos\, t$ pentru $t = \infty$ este acoperită de valorile foarte mari ale puterilor întregi ale lui t. Însă, tocmai din nevoia de a se evita dificultăţi în felul acestora din exemplul nostru, se admit pentru demonstrarea regulei lui L'HOPITAL, ipotezele oarecum restrictive arătate în Nota mea anterioară.

Ş. G.

CHESTIUNI DE EXAMEN

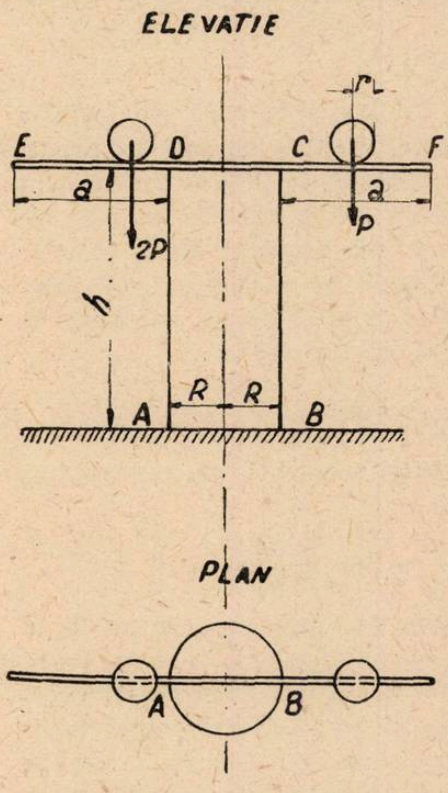
CONCURSUL « GAZETEI MATEMATICE » DIN ANUL 1948

Probele scrise din 6 Mai 1948

(Timpul acordat: 3 ore pentru fiecare materie)

CLASA a VIII-a

Mecanica. *Problema I.* Un cilindru ABCD circular, drept, omogen (rază R şi înălţime h) se reazimă pe un plan orizontal. O bară orizontală, de greutate neglijabilă EDCF (ED = CF = a) trecând prin centrul bazei superioare este prinsă rigid de cilindru.



Două bile, de aceiaşi rază r, de greutate P şi 2P pot ocupa diferite poziţii pe bara EDCF.

1. Ştiind că prin aşezarea bilelor în poziţia cea mai defavorabilă pentru stabilitatea cilindrului, acesta este gata să se răstoarne (limita echilibrului) să se determine greutatea specifică a cilindrului.

2. Aşezând bila de greutate P în F, unde trebue să aşezăm bila de greutate 2P pentru a obţine maximul de stabilitate pentru cilindru?

3. Să se determine poziţiile extreme în care rezultanta greutăţilor bilelor şi a cilindrului înţeapă diametrul AB.

4. Ce s'ar întâmpla dacă bara EDCF, în loc de a fi prinsă rigid de cilindru, este numai aşezată pe aceasta?

Problema II. Dintr'un acelaşi punct sunt lăsate să cadă liber în mod succesiv, trei picături de apă. La un moment dat, un cercetător situat pe picătura a doua, comunică următoarele sale constatări:

„Picăturile întâia şi a treia se depărtează de noi cu vitezele respective de 40 m/sec şi 20 m/sec, distanţa dintre aceste picături fiind de 660 m".

1. Pe baza acestei declarații să se determine pozițiile celor trei picături și vitezele lor în momentul observației făcute de cercetător.

2. Ce constatări ar face trei cercetători situați pe cele trei picături după 20 secunde dela plecarea primei picături?

Rezistența aerului se va neglija. Accelerația gravității se va lua $g = 10$ m/sec^2.

ING. AL. STOENESCU.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Societății Politehnice din România. Anul LXI. Nr. 1—3, Ianuarie—Martie 1948.

Endeavour. Vol. VII Nr. 26, 1948.

Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien. 1. Jahrgang December 1947. Nr. 2.— 2 Jahrgang. April 1948 Nr. 3.

Revista Matematică din Timișoara. Anul XXVIII. Nr. 5 Iulie 1948. D. POMPEIU: Despre explicație în matematică. M. V. SOARE: Axe de simetrie la cubice. Notă matematică. Bibliografie. Probleme rezolvate și propuse.

Revista Științifică „V. Adamachi". Vol. XXXIV Nr. 1—2. Ianuarie—Iunie 1948. Număr închinat memoriei profesorului EM. RACOVIȚĂ.

J. CHAZY. *Cours de Mécanique rationnelle.* Vol. I 482 pag. 1947, Vol. II, 511 pag. 1948. Gauthier-Villars. Paris.

Acest curs corespunde programului de Mecanică pentru licența dela Sorbona la care autorul adaugă enunțurile problemelor dela examenele din ultimii 20 ani. In volumul I se tratează dinamica punctului material, iar în al II-lea dinamica sistemelor materiale, la care sunt adăugate 2 capitole de Hidrostatică și Hidrodinamică, precum și teoria atracției și potențialului newtonian. Cursul este foarte interesant, cu numeroase aplicații și exemple care ilustrează teoria, și este foarte indicat pentru studenții doritori de a cunoaște mai în detaliu mecanica rațională. Cartea este în special utilă pentru studenții în Matematici, cari vor regăsi în ea metoda de tratare a Școlii franceze de Mecanică.

G. G. CONSTANTINESCU. A propos d'une théorie unitaire des équations intégrales. (Extras din Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Bucarest Nr. 1 1948).

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 86 (G. M. XXVII, 240). Se întreabă ce se știe despre studiile matematice ale lui VASILE ALEXANDRI.

In completarea răspunsului dat la pag. 206 din acest volum, iată ce găsim în *« Viața lui Alexandri »* de ELENA RĂDULESCU-POGONEANU, la pag. 40, după ce se arată că urmase medicina și dreptul:

«... Nici dreptul însă nu părea a răspunde mai mult înclinărilor sale profunde; de aceea după șase luni îl părăsește și, după îndemnul tatălui său, orientându-se spre cariera de inginer ca ION GHICA [1]*, intră în școala preparatoare a lui* BONIN *spre a pregăti bacalaureatul în științe, la care se prezintă într'adevăr, dar e respins.*

Atunci, renunțând la studiu sistematic în vederea unei cariere, ia hotărîrea de a nu se mai împotrivi gustului neînvins ce simțea pentru literatură...»

Concluzia este deci aceiași ca în răspunsul de la pag. 206.

PETRE P. TEODORESCU.

Cl. a VIII-a B. Lic. „M. Basarab", București.

DIVERSE

Ședințele Societății Române de Matematici

Societatea Română de Matematici, sub președinția d-lui Prof. V. VÂLCOVICI a ținut ședință de comunicări cu caracter elementar la 21 Iunie a. c. cu următoarea ordine de zi:

VIRGIL CLAUDIAN: Asupra unor ecuații diofantiene.

CEZAR COȘNIȚĂ: Cercuri și sfere de similitudine.

N. N. MIHĂILEANU: O generalizare a polarei.

Doritorii de a face comunicări cu caracter elementar se vor adresa d-lui Prof. V. VÂLCOVICI la Laboratorul de Mecanică al Facultății de Științe, Bd. Academiei, 7. Se primesc lucrări și dela persoanele din provincie; aceste lucrări vor fi prezentate în ședință, de membrii comitetului.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2217. *Un triunghiu variabil* ABC *are vârful* A *fix și latura* BC *constantă ca lungime și direcție. Se iau pe laturile* AB, AC *punctele* D *și* E *astfel ca dreapta* DE *să aibă o lungime dată* l *și să fie paralelă cu o direcție dată* Δ.

Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ADE *când vârful* B *descrie un cerc dat* O.

AL. ROȘU.

1) Care se înscrisese cu un an înainte la facultatea de științe și la școala de mine.

Dacă M este mijlocul lui DE, atunci centrul de greutate G al triunghiului ADE se află pe AM aşa în cât

$$3\,\overline{AG} = 2\,\overline{AM}.$$

Locul lui G este omoteticul locului lui M, centrul şi raportul de omotetie fiind respectiv A şi $\frac{2}{3}$. Vom căuta deci locul lui M, luând ca axe paralela Ax la Δ şi perpendiculara în A pe ea. Dacă M (X, Y) atunci

$$D\left[X + \frac{l}{2},\ Y\right],\quad E\left[X - \frac{l}{2},\ Y\right],$$

iar ecuaţiile dreptelor AD şi AE sunt

$$(AD)\quad y = \frac{Y}{X + \frac{l}{2}}\,x\,;\qquad (AE)\quad y = \frac{Y}{X - \frac{l}{2}}\,x.$$

Fie α, β cosinii directori ai laturei BC de lungime constantă *d*. Când B descrie un cerc de centru O(*a b*) şi rază *r*, vârful C va descrie un cerc cu centrul O′(*a′, b′*) egal cu O şi al cărui centru se află pe paralela la BC la distanţa $OO' = d$, razele OB, O′C rămânând egale şi paralele între ele. Vom exprima poziţiile vârfurilor B, C în funcţie de un parametru θ în felul următor:

$$B(a + r\cos\theta,\quad b + r\sin\theta);\quad C(a' + r\cos\theta,\quad b' + r\sin\theta).$$

Scriind că B şi C se află respectiv pe AD şi AE găsim următorul sistem în X şi Y:

$$(b + r\sin\theta)X - (a + r\cos\theta)Y + \frac{l}{2}(b + r\sin\theta) = 0$$

$$(b' + r\sin\theta)X - (a' + r\cos\theta)Y - \frac{l}{2}(b' + r\sin\theta) = 0$$

de unde se deduce

$$X = \frac{l}{2}\,\frac{(a + r\cos\theta)(b' + r\sin\theta) + (a' + r\cos\theta)(b + r\sin\theta)}{(a + r\cos\theta)(b' + r\sin\theta) - (a' + r\cos\theta)(b + r\sin\theta)}$$

$$Y = \frac{l\,(a + r\cos\theta)(b' + r\sin\theta)}{(a + r\cos\theta)(b' + r\sin\theta) - (a' + r\cos\theta)(b + r\sin\theta)}.$$

Acesta este locul lui M exprimat în funcţie de parametrul θ.

Rezolvând sistemul precedent în raport cu X, Y şi trecând la coordonate curente găsim

$$lr\sin\theta = (a-a')y - (b-b')x - \frac{l}{2}(b+b')$$

$$lr\cos\theta = (a-a')x - (b-b')\frac{x^2 - \frac{l^2}{4}}{y} - \frac{l}{2}(a+a').$$

Eliminăm pe θ între aceste ecuaţii şi relaţia

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

şi găsim că locul lui M este o cuartică, din care se deduce locul lui G înlocuind pe x şi y prin $\frac{2}{3}x$ şi $\frac{2}{3}y$.

Caz particular. Dacă DE este paralelă cu BC atunci $b = b'$ iar locul lui M şi deci al lui G este un cerc, ceia ce se poate demonstra şi geometric observând că AM trece prin mijlocul N al lui BC, care descrie evident un cerc O″ egal cu cercurile O şi O′, şi cum

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = K,$$

M descrie un cerc omotetic lui O″.

ION ST. TEODORESCU, Ploeşti.

D-nii MIRCEA D. POPA şi ANTON I. VARGĂ au dat o foarte bună soluţie luând axa absciselor paralela din A la BC.

PROBLEMA 3961. *Să se găsească numărul de patru cifre* abcd *astfel ca numerele de câte două cifre* ab *şi* cd *să fie prime consecutive şi ştiind că el este triplul unui număr prim la care suma cifrelor este egală cu 11.*

M. NICOLAU.

De oarece *abcd* se divide cu 3 suma $a+b+c+d$ se divide cu 3. Vom alege deci din numerele prime de câte 2 cifre, acele grupe de 2 numere prime consecutive care au suma cifrelor

divizibilă prin 3. Avem 13 astfel de grupe şi anume (11, 13), (13, 17), (17, 19), (19, 23), (29, 31), (37, 41), (41, 43), (43, 47), (59, 61), (67, 71), (71, 73), (79, 83) şi (89, 97).

Formăm numerele de 4 cifre prin sudarea numerelor din paranteze. Se obţin 26 de numere *abcd*, din care 13 pentru $ab < cd$ şi 13 pentru $ab > cd$.

Impărţim pe fiecare din aceste 26 numere prin 3 şi făcând suma cifrelor câtului obţinut, care trebuie să fie multiplu de 11, găsim numai soluţia

$$1923 = 3 \times 641$$

pentru cazul $ab < cd$. Cazul $cd < ab$ nu dă nici o soluţie.

In volumul XXXVI sunt anunţaţi ca rezolvitori ai acestei probleme d-nii: N. N. ALDEA, C. N. ANDREESCU, G. CĂLINESCU, GH. A. CIOCOIU, R. N. DUMITRAŞCU, I. A. EPURAN, M. IONESCU, V. I. IONESCU, EM. MAREŞ, EM. MEREUŢĂ, N. N. MIHĂILEANU, MARIN V. NEDELCU, I. GH. POPA, I. C. PAREPEANU, C. D. RUSU şi M. VELEA.

Recent d-l Maior E. ST. IACOB a rezolvat problema pe această cale, fără a examina şi cazul $cd < ab$.

PROBLEMA 5839. 1°. *Să se reprezinte grafic funcţiunea:*

$$y = \frac{x(x-1)^2 + 3}{2(x+1)}.$$

2°. *Prin punctul de intersecţie al curbei reprezentative cu parabola* $x = y^2$ *se duce un cerc cu centrul în origine.*

Să se calculeze aria cuprinsă între cerc şi parabolă.

LT.-COL. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

Soluţie dată de d-l MIHAIL A. LEON (student Politehnica Bucureşti).

A) *Reprezentarea grafică.* 1°. *Puncte situate pe axe. Asimptote.*

Pentru $x = 0$, $y = \frac{3}{2}$. Curba reprezentativă trece prin punctul $\left(0, \frac{3}{2}\right)$. Valorile care fac $y = 0$ sunt date de ecuaţia

$$\varphi(x) = x(x-1)^2 + 3 = 0,$$

ale cărei rădăcini reale le găsim formând şirul lui ROLLE.

Rădăcinile derivatei membrului I al ecuației sunt $\frac{1}{3}$ și 1.

Șirul lui ROLLE al ecuației va fi:

$\varphi(-\infty)$	$\varphi\left(\frac{1}{3}\right)$	$\varphi(1)$	$\varphi(+\infty)$
$-$	$\frac{85}{27}$	3	$+$

Admite deci o rădăcină în intervalul $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$.

Acest inteval se micșorează dacă observăm că

$$\varphi(-1) = -1 < 0 \quad \text{și} \quad \varphi\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{51}{125} > 0.$$

Rădăcina reală este cuprinsă între -1 și $-0{,}8$ și reducând acest interval din nou, găsim $x_1 = -0{,}86$.

Curba reprezentativă trece prin punctul A $(-0{,}86; 0)$.

Pentru *asimptote*, anulăm numitorul și căutăm rădăcinile cari nu anulează în acelaș timp și numărătorul.

Observăm că pentru $x = -1$ avem $y = \pm\infty$, ceiace arată că curba reprezentativă are o asimptotă paralelă cu axa y-lor, $x = -1$.

Domeniile de continuitate ale curbei sunt

$$(-\infty, -1-\varepsilon) \quad \text{și} \quad (-1+\varepsilon, +\infty).$$

2°. *Maxime și minime.* Derivata 1-a a funcțiunii este

$$y' = \frac{(2x+1)(x^2-2)}{4(x+1)^2}.$$

Rădăcinile sale sunt

$$x_1' = -\sqrt{2}, \quad x_2' = -\frac{1}{2}, \quad x_3' = \sqrt{2}.$$

Valorile lui y pentru aceste valori ale lui x sunt respectiv

$$y_1 = 6{,}32 \; ; \; y_2 = 1{,}87 \; ; \; y_3 = 0{,}68.$$

Coordonatele punctelor de maxim și minim vor fi:

$$M_1(-\sqrt{2}; 6{,}32), \quad M_2\left(-\frac{1}{2}; 1{,}87\right) \; ; \; M_3(\sqrt{2}; 0{,}68)$$

Cercetând semnele derivatei, pentru a vedea care din aceste puncte sunt maxime şi care sunt minime, observăm:

a) In intervalul

$$(-\infty, -\sqrt{2}) \quad ; \quad y' < 0, \quad \text{iar între} \quad (-\sqrt{2}, -1) \quad ; \quad y' > 0.$$

Punctul M_1 *este deci un minim.*

b) In intervalul

$$\left(-1, -\frac{1}{2}\right); \; y' > 0,$$

iar în intervalul

$$\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right); \; y' < 0.$$

Punctul M_2 *este deci un maxim.*

c) In intervalul

$$(\sqrt{2}, +\infty) \quad ; \quad y' > 0.$$

Rezultă că M_3 *este un minim.*

3°. *Puncte de inflexiune.* Derivata a 2-a se scrie succesiv:

$$y'' = \frac{1}{16(x+1)^4}\left[4(x+1)^2[2x(2x+1)+2(x^2-2)]-8(x+1)(2x+1)(x^2-2)\right]$$

sau efectuând operaţiile:

$$y'' = \frac{x(x^2+3x+3)}{2(x+1)^3}.$$

Singura rădăcină reală a numărătorului lui y'', care nu anulează şi numitorul, este $x_1'' = 0$, ceiace dă $y_i = \frac{3}{2}$.

Curba reprezentativă are un punct de inflexiune $I\left(0, \frac{3}{2}\right)$ situat chiar pe axa y-lor şi pe ramura dintre M_2 şi M_3.

Semnele derivatei 2-*a* ne arată:

— în intervalul $(-\infty, -1)$, $y'' > 0$ şi curba are concavitatea către y pozitiv;

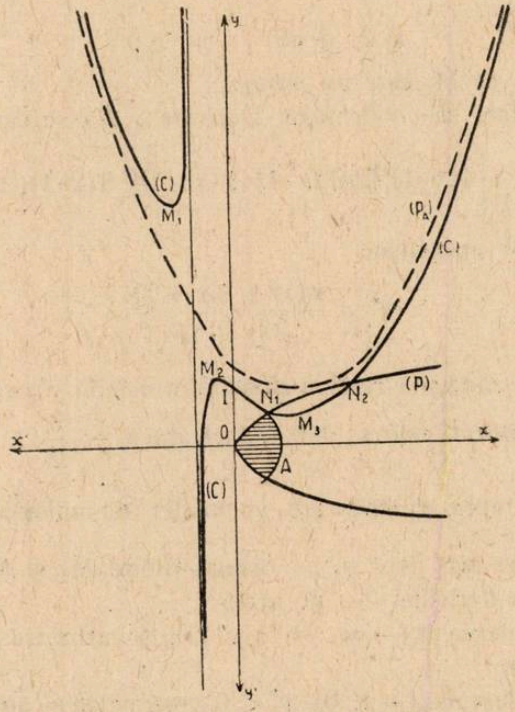
— în intervalul $(-1, 0)$, $y'' < 0$, concavitatea către y negativ;

— în intervalul $(0, +\infty)$, $y'' > 0$ şi concavitatea este către y pozitiv.

4°. *Tabloul variației* funcțiunii este următorul:

Puncte	M_1			A		M_2	I	M_3		
x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$-1-\varepsilon$	$-1+\varepsilon$	$-0{,}86$	$-\frac{1}{2}$	0	$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$ 0	$+$		$+$	0	$-$	0		$+$
y''		$+$				$-$	0		$+$	
y	$+\infty \searrow$	6,32 (minim)	$\nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow$ 1,87 (maxim)	$\searrow \frac{3}{2} \searrow$	0,68 (minim)		$\nearrow +\infty$

5°. *Curba reprezentativă* ca în figură, ea este o *cubică* plană cu o asimptotă reală, un maxim și două minime și o inflexiune pe axa y-lor.



B) Pentru a calcula *aria* cerută, să găsim intersecția cubicei cu parabola $y^2 = x$.

Ordonatele punctelor căutate sunt soluţii ale ecuaţiei

$$y = \frac{y^2(y^2-1)^2+3}{2(y^2+1)} \qquad (1)$$

sau

$$f(y) = y^6 - 2y^4 - 2y^3 + y^2 - 2y + 3 = 0.$$

Această ecuaţie are 2 *rădăcini reale*, cuprinse în intervalele

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ şi } \left(\frac{3}{2}, 2\right),$$

de oarece:

$$f(-\infty) > 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{121}{64} > 0 \text{ şi } f(1) = -1 < 0,$$

iar

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{207}{64} < 0 \text{ şi } f(2) = 19 > 0, \text{ iar } f(+\infty) > 0.$$

1°. Rădăcina $\frac{1}{2} < y_1 < 1$ o găsim cu 2 zecimale exacte, aplicând metoda lui NEWTON.

$$f'(y) = 2(3y^5 - 4y^3 - 3y^2 + y - 1)$$
$$f''(y) = 2(15y^4 - 12y^2 - 6y + 1).$$

In intervalul $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ avem $f'(y) < 0$, $f''(y) < 0$ şi urmează că, aplicând metoda părţilor proporţionale, avem valoarea prin lipsă.

Această valoare este

$$y_1 = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} - 1}{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}83.$$

Aplicând metoda mai departe pentru intervalul (0,83; 1), găsim

$$y_1 = 0{,}86, \text{ care ne dă } x_1 = y_1^2 \cong 0{,}74.$$

2°. Rădăcina $\frac{3}{2} < y_2 < 2$ se calculează în acelaş mod:

$$y_2 = 1{,}69, \text{ care dă } x_2 = y_2^2 \approx 2{,}86.$$

3°. *Raza* cercului cu centrul în origine şi trecând prin unul din punctele de intersecţie N_1 (0,74; 0,86) sau N_2 (2,86; 1,69) are una din valorile

$$R_1 = \sqrt{0{,}74^2 + 0{,}86^2} = 1{,}134,$$

$$R_2 = \sqrt{2{,}86^2 + 1{,}69^2} = 3{,}342.$$

4°. *Aria* cuprinsă între parabola $y^2 = x$ şi cercul $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ ($R = R_1, R_2$) are expresiunea:

$$\frac{1}{2}A = \int_0^{0,74} \sqrt{x}\,.\,dx + \int_{0,74}^{1,13} \sqrt{R^2 - x^2}\,.\,dx$$

sau

$$\frac{1}{2}A' = \int_0^{2,86} \sqrt{x}\,.\,dx + \int_{2,86}^{3,34} \sqrt{R^2 - x^2}\,.\,dx.$$

Cele 2 integrale sunt cunoscute, ele au valorile

$$I_1 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c_1 \text{ şi } I_2 = \frac{1}{2}\left[R^2 \arcsin\frac{x}{R} + x\sqrt{R^2 - x^2}\right] + c_2.$$

Făcând calculele respective găsim valoarea ariilor în cele două cazuri:

$$A = \frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^{0,74} + \frac{1}{2}\left[1{,}134^2 \arcsin\frac{x}{1{,}134} + x\sqrt{1{,}134^2 - x^2}\right]_{2,86}^{3,34} \quad (2)$$

sau $$A = 1{,}318.$$

De asemenea

$$A' = \frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^{2,86} + \frac{1}{2}\left[3{,}342^2 \arcsin\frac{x}{3{,}342} + x\sqrt{3{,}342^2 - x^2}\right]_{2,86}^{3,34}$$

sau $$A' = 9{,}117.$$

Notă. 1°. D-l MIRCEA V. SOARE a dat o bună soluţie, asemănătoare celei de mai sus, în ceea ce priveşte prima parte, iar ariile le-a găsit cu ajutorul formulelor elementare, referitoare la parabole.

D-l PETRE P. TEODORESCU (cl. 8-a Lic. Matei Basarab) a rezolvat bine partea 1-a a problemei; la cea de a 2-a a avut însă unele erori de calcul.

2°. ***Observaţiuni.*** *a)* D-l MIHAIL A. LEON punând ecuaţia curbei sub forma

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 4) - \frac{1}{2(x+1)},$$

observă că ***admite parabola***

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 4)$$

drept curbă asimptotică.

In adevăr intersecția parabolei cu curba reprezentativă are abscisa $+\infty$, iar diferența ordonatelor punctelor curbei date și parabolei tinde către zero când $x \to \pm \infty$.

b) Cubica reprezentată de funcțiunea noastră are o serie de *generalizări*, dintre cari semnalăm câteva, pentru atențiunea corespondenților.

Prima generalizare, o constitue curba de ecuație:

$$y = k\,\frac{x^3 + px + q}{x + a} \tag{3}$$

la care se reduce orice ecuație generală $y = \dfrac{\varphi_3(x)}{ax+b}$ unde $\varphi_3(x)$ este un polinom de gradul 3.

Ecuația se scrie:

$$y = k(x^2 - ax + a^2 + p) - k\,\frac{a^3 + pa - q}{x + a}$$

Se observă imediat că are *o asimptotă paralelă cu axa* y-*lor* și admite *parabola asimptotică*

$$y = k(x^2 - ax + a^2 + p). \tag{4}$$

Cubica (3) trece prin intersecțiile hiperbolei:

$$y = -\,k\,\frac{a^3 + pa - q}{x + a} \tag{5}$$

cu dreptele paralele cu axa y-lor prin punctele unde parabola (4) taie axa x-lor.

Dacă considerăm derivata 1-a

$$y' = k\,\frac{(3a-1)\,x^3 + 3a\,x^2 + pa - q}{(x+a)^2},$$

discriminantul ecuației $(3a-1)\,x^3 + 3a\,x^2 + pa - q = 0$ ne conduce la condițiile

$$[2a^3 + (3a-1)(pa-q)]^2 - 4a^6 \gtrless 0$$

pentru a avea un singur maxim sau minim, un maxim și două minime, sau un minim și 2 maxime sau în fine o inflexiune în care tangenta este paralelă cu axa x-lor [1].

A 2-a generalizare o constitue funcțiunile

$$y = \frac{f_m(x)}{f_n(x)} \qquad (m > n)$$

în care $f_n(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \cdot \cdot (x - a_p)\, g_{n-p}(x)$.

Ecuația curbei se scrie:

$$y = \varphi_{m-n}(x) + \frac{r_{n-1}(x)}{(x - a_1) \cdot \cdot \cdot (x - a_p)\, g_{n-p}(x)}.$$

Curba admite *p asimptote paralele cu axa* y-lor și pe $y = \varphi_{m-n}(x)$ *drept curbă asimptotică* [2].

L-T. Col. M. I. F.

---

1) Th. Angheluță. *Curs de algebră superioară* 1945 pag. 141.

2) N. Abramescu. *Geometria analitică* 1927 pag. 235 chest. 143.

PROBLEMA 5871. *Să se stabilească într'un triunghiu oare care* ABC, *în care notaţiile sunt cele obicinuite, relaţiile*

$$\Sigma a^3 \cos(B - C) = 3abc \quad ; \quad \Sigma a^3 \sin(B - C) = 0.$$

V. ALACI.

Prima soluţie. Ţinând seamă că

$$a = 2R \sin A = 2R \sin(B + C),$$

putem scrie succesiv

$$\Sigma a^3 \cos(B - C) = 8R^3 \Sigma \sin^2 A \sin(B + C) \cos(B - C)$$
$$= 4R^3 \Sigma \sin^2 A (\sin 2B + \sin 2C) = 8R^3 [\sin^2 A (\sin B \cos B + \sin C \cos C) + \sin^2 B (\sin C \cos C + \sin A \cos A) + \sin^2 C (\sin A \cos A + \sin B \cos B)] = 8R^3 [\sin A \sin B (\sin A \cos B + \sin B \cos A) + \sin B \sin C (\sin B \cos C + \sin C \cos B) + \sin C \sin A (\sin C \cos A + \sin A \cos C)] = 8R^3 [\sin A \sin B \sin (A + B) + \sin B \sin C \times \sin (B + C) + \sin C \sin A \sin (C + A)] = 8R^3 (\sin A \sin B \sin C + \sin B \sin C \sin A + \sin C \sin A \sin B) = 24R^3 \sin A \sin B \sin C,$$

$$\Sigma a^3 \cos(B - C) = 3 (2R \sin A) (2R \sin B) (2R \sin C) = 3abc.$$

A doua soluţie. Putem scrie încă

$$\Sigma a^3 \sin(B - C) = 8R^3 \Sigma \sin^2 A \sin(B + C) \sin(B - C)$$
$$= 4R^3 [\sin^2 A (\cos 2B - \cos 2C) + \sin^2 B (\cos 2C - \cos 2A) + \sin^2 C (\cos 2A - \cos 2B)] = 4R^3 [\sin^2 A (1 - 2 \sin^2 B - 1 + 2 \sin^2 C) + \sin^2 B (1 - 2 \sin^2 C - 1 + 2 \sin^2 A) + \sin^2 C (1 - 2 \sin^2 A - 1 + 2 \sin^2 B)] = 8R^3 (-\sin^2 A \sin^2 B + \sin^2 A \sin^2 C - \sin^2 B \sin^2 C + \sin^2 B \sin^2 A - \sin^2 C \sin^2 A + \sin^2 C \sin^2 B) = 0.$$

Soluţia a 3-*a.* 1°. In virtutea relaţiilor cunoscute

$$a \cos(B - C) = b \cos B + c \cos C \quad , \quad b \cos C + c \cos B = a.$$

(*Culegere de Probleme de Trigonometrie*, V. CRISTESCU partea 2-a, pag. 7), putem scrie succesiv

$$\Sigma a^3 \cos(B - C) = \Sigma a^2 (b \cos B + c \cos C)$$
$$= a^2 (b \cos B + c \cos C) + b^2 (c \cos C + a \cos A) + c^2 (a \cos A + b \cos B) = ab (a \cos B + b \cos A) + bc (b \cos C + c \cos B) + ca (c \cos A + a \cos C) = abc + bca + cab = 3abc.$$

2°. Ţinând seamă de relaţia

$$\sin(B - C) = \sin A \frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2 - c^2}{2aR}.$$

(*Culegere de Probleme de Trigonometrie* de V. CRISTESCU, partea 2-a, pag. 7), putem scrie,

$$\Sigma a^3 \sin(B - C) = \frac{1}{2R} \Sigma a^2 (b^2 - c^2) = \frac{1}{2R} (a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2 - b^2a^2 + c^2a^2 - c^2b^2) = 0.$$

Notă. D-l C. C ILIESCU (Şc. ofiţeri tehnici Auto) a dat o bună soluţie analoagă cu prima soluţie.

Soluţii analoage cu soluţia a treia s'au primit dela d-şoara ELENA DRĂGHICESCU şi dela d-nii: I. A. BARBU (Lic. Caracal); GH. BRAŞOVEANU (Lic. T.-Severin); CR. CANTUNIAR, TR. MUSTĂCESCU (Lic. „T. Maiorescu" Bucureşti); C-TIN CHIRIAC, P. COLUMBEANU, DORIN FURTUNESCU, MARINEL MARINESCU, (Colegiul Naţional „N. Filipescu"), ILIE CONSTANTINESCU, STELIAN MARINESCU, C. TINCU, D-TRIU TIGRAN, P. STANCIU, (Polit. Timişoara); C-TIN CRUCERU, P. P. DRĂGHICESCU, MIRCEA PETCULESCU, MARIN VĂDUVA (Polit. Bucureşti); M. R. CONSTANTINESCU (Lic. Ploeşti); M. COTARIU (Brăila); S-Lt. ION DIACONESCU (Găeşti); C-TIN DIACONU, GH. A. GRIGORE, MIHAI MANOLIU, EM. E. MARINESCU, M. LEON (Lic. „A. Vlaicu" Bucureşti); AL. MORAITE (Bucureşti); S-Lt. C. PANTELIMON (Ploeşti); V. D. PĂLĂCEANU (Şc. Of. Geniu Bucureşti); MIRCEA PĂTRĂSCIOIU (Lic. Buzău); Locot. M. D. POPA; BARBU POPESCU, STELIAN POPESCU, MIRCEA PRISECARU, C-TIN STAICU, D-TRU VASILIU, GH. G. VRÂNCEANU (Lic. milit. Timişoara); P. P. TEODORESCU (Lic. „Matei Basarab" Bucureşti); S-Lt. M. A. VASILESCU-STABU: E. N. WEGENER, I. T. MUNTEANU, C. V. ROŞU, I. GLIGOR (student), CONST. CORDUNEANU, GEORGE ENESCU (Elev particular, Bucureşti), VALERIU-PANDELE A. PETCU (Lic. „Mihai Viteazul", Bucureşti); D. I. CRĂCEA, P. N. CIUCESCU, VIRGIL G. CONSTANEINESCU (Lic. „R. Greceanu" Slatina); GH. ST. PĂUNESCU.

PROBLEMA 5907. *Să se găsească cifra* d, *numărul de două cifre* ac *şi numărul de trei cifre* abc, *ştiind că*

$$abc = 11 \times b \times d = 11 \times ac$$

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de d-nii: G. G. VRÂNCEANU, PETRE F. IONESCU, PETRE A. STANCIU şi ILIE N. CONSTANTINESCU.

Evident că $b \neq 0$, $a \neq 0$ căci altfel ar rezulta $ac = 0$ şi $abc = 0$.

Primul şi ultimul membru al egalităţilor dau

$$100a + 10b + c = 110a + 11c \quad \therefore \quad b = a + c \qquad (1)$$

Ţinând seama de (1) şi de ultima egalitate din enunţ se găseşte

$$9a = b\,(d - 1) \qquad (2)$$

Din (2) se vede că $a \leqslant 8$, căci dacă $a = 9$ atunci

$$b = 9 \text{ şi } d - 1 = 9 \quad \therefore \quad d = 10$$

ceea ce este contra ipotezei. Din (2) se mai observă că de oare ce produsul $b\,(d - 1)$ se divide prin 9 urmează ca unul din numerele b, $d - 1$ este egal cu 9 sau că ambele aceste numere se divid cu 3. Ţinând seamă de aceste elemente dăm lui a pe rând valorile 0, 1, ... 8 iar din (1) şi (2) deducem pe b, c şi d şi găsim următorul tabel de soluţii:

a	b	c	d	abc	Numărul soluţiilor
0	m	m	1	$0mm$ cu $0 < m \leqslant 9$	10
1	3, 9	2, 8	4, 2	132, 198	2
2	3, 6, 9	1, 4, 7	7, 4, 3	231, 264, 297	3
3	9	6	4	396	1
4	6, 9	2, 5	7, 5	462, 495	2
5	9	4	5	594	1
6	9	3	7	693	1
7	9	2	8	792	1
8	9	1	9	891	1

Total 22 soluţiuni dintre care pentru primele 10 numărul abc este formal de trei cifre.

II. Soluţie dată de d-l I. V. ROGOZ (Liceul militar Timişoara).

Din enunţ se deduce

$$b \times d = ac \quad ; \quad b = a + c \quad \text{şi} \quad d\,(a + c) = ac$$

Ultima egalitate arată că numărul de 2 cifre ac se divide prin suma cifrelor lui. Vom proceda prin eliminări. Din numerele de 2 cifre eliminăm numerele prime şi pe acelea la care suma cifrelor este mai mare ca 9 căci $a + c = b \leqslant 9$. Din numerele rămase eliminăm pe acelea nedivizibile prin suma cifrelor şi pe acelea care fiind divizibile prin suma cifrelor dau câturi mai mari ca 9. Rămân ultimele 12 soluţii din tabloul de la soluţia I.

Dacă luăm şi $a = 0$, găsim $d = 1$ şi deci primele 10 soluţii dela soluţia I.

Au dat soluţiile exacte pe căi analoage cu cele de la prima soluţie d-nii: M. R. CONSTANTINESCU, P. P. DRĂGHICESCU, C. C. TINCU, MIHAI MANOLIU, C. C. DIACONU, P. D. COLUMBEANU, BARBU I. POPESCU, P. P. TEODORESCU, SOFRONIE ŞTEFĂNESCU, DORIN FURTUNESCU, MIRCEA I. PĂTRĂŞCIOIU şi VALERIU AL. PETCU.

Au întrebuinţat căi analoage cu prima soluţie şi au găsit numărul de soluţii parţiale arătate în paranteze după cum urmează: MIRCEA D. POPA (21); I. A. BARBU (20); AL. N. PANTEA (20); D. I. CRĂCEA (20); MIRCEA V. SOARE, GEORGE M. NICOLAE, CONST. ROŞU, C. CORDUNEANU, I. T. MUNTEANU. PAUL CONSTANTINESCU, V. D. PĂLĂCEANU, E. ST. IACOB, AL. MINCULESCU, CR. I. CANTUNIAR (câte 12 soluţii în care $a \neq 0$); M. IOSIFESCU (11); V. GH. DIACONU, AL. AL. TIMOTIN (câte 9 soluţii); M. D. COTARIU, ST. STAICU, M. F. VĂDUVA, LUCIAN GH. MUNTEANU (câte 8 soluţii); GH. A. GRIGORE, AL. IEŞAN, M. AL. LEON (câte 4 soluţii), E. N. WEGENER (2).

PROBLEMA 5951. *Să se găsească cel mai mic patrat de forma* ABCCBA, *unde* A, B, C *sunt întregi cu aceleaşi număr de cifre.*

M. GHERMĂNESCU.

Fie m numărul cifrelor numerelor A, B, C; dacă N^2 este patratul căutat, putem scrie

$$\begin{aligned} N^2 &= 10^{5m}A + 10^{4m}B + 10^{3m}C + 10^{2m}C + 10^{m}B + A \\ &= (10^m + 1)\,[(10^{4m} - 10^{3m} + 10^{2m} - 10^m + 1)\,A + \\ &\quad + 10^m(10^{2m} - 10^m + 1)\,B + 10^{2m}C] \end{aligned}$$

sau, punând $10^m + 1 = u$,

$$\begin{aligned} N^2 &= u^2[(u^3 - 5u^2 + 10u - 10)\,A + \\ &\quad + (u^2 - 4u + 6)\,B + (u - 2)\,C] + u\,(5A - 3B + C). \end{aligned}$$

Să presupunem că $u = 10^m + 1$ nu conţine divizori primi la o putere mai mare ca unitatea; în acest caz, N^2 fiind divizibil prin u, este divizibil şi prin u^2, deci $5A - 3B + C$ este divizibil prin u. Cum A, B, C au cel mult m cifre rezultă

$$5A - 3B + C \leqslant 6(10^m - 1)$$

deci $5A - 3B + C = k(10^m + 1)$, unde $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Inlocuind, obţinem

$$N^2 = u^2\,[k(u-1)^2 + (u^3 - 5u^2 + 5u)\,A + (u^2 - u)\,B], \quad (1)$$

care cere

$$P^2 = k(u-1)^2 + (u^3 - 5u^2 + 5u)\,A + (u^2 - u)\,B, \quad (2)$$

Cum se cere cel mai mic patrat de forma dată, vom lua $m = 1$, deci $u = 11$; A, B, C sunt de câte o cifră, iar problema revine la a determina A, B, C, K astfel ca

$$100K + 781A + 110B = P^2. \qquad (3)$$

Cum $A \neq 0$, se vede că $P^2 > 781$, deci $P \geqslant 28$. P^2 fiind câtul împărţirii lui N^2 prin 121, găsim $P < 91$.

Fie $P = 10m + n$; (3) devine

$$100\,(m^2 - 7A - B - K) + 10\,(2mn - 8A - B) + n^2 - A = 0. \qquad (3')$$

Se vede că $n^2 - A$ se divide prin 10. Cum $A = 1, 4, 5, 6, 9$; să examinăm aceste cazuri. Vom examina numai cazul $A = 1$. $A = 1$, deci $n = 1$ sau $n = 9$. Dacă $n = 1$, (3') cere $2m - 8 - B = 0$

$$m^2 - 7 - B - K = 0.$$

Eliminând B, găsim $(m-1)^2 = k$, deci $m = 1, 2, 3$ căci $k \leqslant 5$. Cum $P \geqslant 28$, convine numai $m = 3$, care dă $P = 31$, dar care nu dă soluţie. Dacă $n = 9$, (3') cere $B = 18m - 10P$, apoi $(9 - m)^2 = 88 - 10p + k$, care există în întregi pentru $p = 1$, $k = 3$, $m = 0$; $p = 4$, $k = 1$, $m = 2$; $p = 8$, $k = 1$, $m = 6$. Ultimele două dau P=29, P=69, care nu dau soluţie. In acelaşi mod, examinând celelalte cazuri, găsim soluţia unică

$$698896 = 836^2.$$

Notă. 1°. La această problemă, s'au trimis numeroase încercări de soluţii, în care metoda principală constă din ... încercări.

Singuri d-nii: MIRCEA V. SOARE şi PETRE P. TEODORESCU au dat condiţia $5A - 3B + C = 11k$, pentru cazul $m = 1$.

2°. D-l MIRCEA D. POPA, a dat o foarte interesantă soluţie, folosind metoda dată de d-l prof. O. ŢINO (G. M. LI, pag. 729).

3°. Unii corespondenţi au arătat că problema propusă constitue obiectul Ex. 39, v. XLIX, pag. 759, dar acest exerciţiu a apărut după problema de mai sus.

4°. Recomandăm cercetarea cazului general, cuprins în (1) şi (2). Astfel, pentru $k = 0$, (2) devine.

$$P^2 = u\,[(u^2 - 5u + 5)\,A + (u - 1)\,B], \qquad (4)$$

care cere $5A - B = pu$, deci

$$10^m\,(A - p) + A + p = M^2.$$

Egalitatea precedentă pune o frumoasă problemă, pe care o recomandăm:

Să se găsească un patrat perfect de 2m *cifre, în care numerele formate de primele şi ultimele* m *cifre să fie* $A \pm p$, *unde* p, A *sunt întregi,* A *fiind terminaţie de patrat.* M. G.

PROBLEMA 6084. *Să se găsească cifrele a, b, c, d cu care să se formeze numerele de 1, de 2 și de 3 cifre, care să satisfacă simultan următoarele operațiuni aritmetice, indicate prin semne:*

$$\begin{array}{ccccc} abc & : & cd & = & b \\ - & & - & & + \\ aba & + & aa & = & adc \\ \times & & - & & + \\ cd & - & ab & = & aa \\ - & & = & & - \\ ab & \times & d & = & aac \\ - & & - & & - \\ aa & \times & d & = & dd \end{array}$$

G-L GH. BUICLIU.

Soluție dată de d-nii: Locot. MIRCEA D. POPA; M. R. CONSTANTINESCU (Lic. „Sf. Petru și Pavel", Ploești); Maior E. ȘT. IACOB; E. N. WEGENER (Student-inginer, București); V. D. PĂLĂCEANU (Șc. Ofițeri geniu, București); BARBU I. POPESCU, I. V. ROGOZ, G. G. VRÂNCEANU (Lic. militar, Timișoara); AL. AL. TIMOTIN (student-inginer, București); AL. MINCULESCU, CONST. C. TEODORESCU (Lic. militar, Iași); CONST. C. DIACONU (Lic. „A. Vlaicu", București); GH. GH. GOLDIȘ (Lic. Beiuș); ILIE N. CONSTANTINESCU (Lic. „N. Bălcescu", Brăila); P. D. COLUMBEANU (Col. Naț. „N. Filipescu", Predeal); P. P. TEODORESCU (Lic. „Matei Basarab", București); M. V. SOARE (Col. Naț. „Sf. Sava", București), M. SINTESCU, DAN D. SILIȘTEANU, AUREL TELNICEANU, I. CÂRJE, EM. CONSTANTINESCU, GH. M. VLASIE, I. NEGULESCU, STELIAN M. POPESCU, STELIAN A. POPESCU, ALEX. S. MĂRĂNDICI, TITUS C. RĂUTU (Lic. militar „Ștefan Cel Mare", Pitești); CR. I. CANTUNIAR, M. A. SĂVESCU (Col. Naț. „Sf. Sava"); M. G. IOSIFESCU (Ploești); VIRGIL G. CONSTANTINESCU, D. I. CRĂCEA, (Lic. „R. Greceanu", Slatina), AL. N. PANTEA (Beiuș).

Eliminând soluția banală $a = b = c = d = 0$, scoatem din ultima egalitate orizontală

$$a \times d \times 11 = d \times 11 \quad \therefore \quad a = 1.$$

A doua și a treia egalitate dau

$$10b - 10d - c = -12 \quad \text{și} \quad 10c + d - b = 21. \qquad (1)$$

Inmulţind pe ultima din (1) cu 10 şi adunând-o cu prima găsim

$$99c = 198 \quad \therefore \quad c = 2.$$

Ducem pe $c = 2$ în a doua sau a treia egalitate orizontală din enunţ şi obţinem

$$d = b + 1$$

care dusă în penultima egalitate orizontală, dă:

$$1b \times (b + 1) = 112. \qquad (2)$$

Grupele de două cifre consecutive al căror produs se termină cu 2 sunt 3 cu 4 şi 6 cu 7. Prima grupă nu verifică pe (2). A doua grupă dă

$$b = 6 \quad \text{şi} \quad d = 7.$$

Cifrele căutate sunt deci

$$a = 1 \ , \ b = 6 \ , \ c = 2 \ , \ d = 7.$$

Ele verifică toate relaţiile orizontale precum şi restul operaţiilor aritmetice verticale din tabloul din enunţ.

PROBLEMA 6262. *Aria unui patrulater este egală cu de nouă ori aria patrulaterului format de centrele de greutate ale celor patru triunghiuri formate de laturi şi diagonale.*

G. V. MANOLESCU.

Soluţie dată de d-nii: I. A BARBU, N. A. CERNESCU, P. A. CERNESCU, VIRGIL G. CONSTANTINESCU, G. ENESCU, T. M. HANGAN, ST. C. PANTAZOPOL, V. A. PETCU, C. S. TĂNĂSESCU.

Fie $P = A_1 A_2 A_3 A_4$ patrulaterul dat şi $G = G_1 G_2 G_3 G_4$ patrulaterul format de centrele de greutate al triunghiurilor $A_2A_3A_4$, $A_3 A_4 A_1$, $A_4 A_1 A_2$, $A_1 A_2 A_3$.

Dacă I este mijlocul laturei $A_3 A_4$, G_1 este aşezat pe A_2 I şi G_2 pe A_1 I astfel ca

$$\frac{\overline{I A_2}}{\overline{I G_1}} = \frac{\overline{I A_1}}{\overline{I G_2}} = 3.$$

Patrulaterul dat P are deci laturile paralele cu ale patrulaterului G şi în acelaşi raport 3, deci ariile lor stau în patratul raportului de asemănare, adică 9.

Observări. 1°. Dreptele A_1G_1, A_2G_2 se taie în C, mijlocul segmentului IJ care unește mijloacele a două laturi opuse. Deci patrulaterele P, G sunt omotetice în raport cu C, centrul mediilor distanțe, raport 3.

O foarte bună soluție directă, în acest sens, a dat d-l VIRGIL STĂNESCU (lic. Armatei, Craiova).

2°. Alte *soluții geometrice* date de d-nii: C. N. BOERESCU, D. I. CRĂCEA, A. E. DONEAUD, ȘT. FIRESCU, I. T. MUNTEANU, I. L. POPESCU, V. I. ȘANDRU.

3°. *Soluții analitice* date de V. C. BĂRBULESCU, N. D. AUGUST, M. R. CONSTANTINESCU, V. CONSTANTINESCU, SANDA M. HANGAN, V. A. PETCU, C. ȘERBAN, A. G. VIȘIAN, I. C. UDREA, V. DIACONU, R. SP. HARET, ȘT. A. NANUL.

4°. D-ra SANDA M. HANGAN și d-l STELIAN C. PANTAZOPOL observă că textul problemei admite încă următoarea interpretare:

Dacă O este intersecția diagonalelor, să considerăm patrulaterul format de centrele de greutate ale triunghiurilor OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, OA_4A_1. *Aria acestui patrulater este două noimi din a patrulaterului dat.*

In adevăr, acest patrulater *g* este omotetic paralelogramului *p* format de mijloacele laturilor patrulaterului P în raportul două treimi; iar *p* are ca arie, jumătate din aria lui P.

Sub acest enunț problema este rezolvată și în *Journal de mathématiques élémentaires*, Paris, vol. VI, 1882, pag. 14.

Au dat *soluții geometrice* pentru această interpretare, d-nii: P. D. COLUMBEANU, P. CONSTANTINESCU, C. CORDUNEANU, R. SP. HARET, I. MĂNCESCU, AL. G. MORAITE, I. I. NOVAC, ST. C. PANTAZOPOL, P. P. TEODORESCU, A. I. VARGĂ, D. E. VASILIU, C. C. DIACONU.

5°. Orginea problemei 6262 o constituie observațiile cu care autorul a însoțit soluția exercițiului VIII. 789 din *Suplimentul cu Exerciții* Vol. XII.

N. M.

EXERCIȚII

31. *Fie* Oy *bisectoara unghiului* xOz *de* 120°. *Să se demonstreze că proecțiile* M_x, M_y, M_z *ale unui punct* M *din planul acestor drepte respectiv pe* Ox, Oy, Oz *sunt vârfurile unui triunghiu echilateral.*

EM. E. MARINESCU.

R. Din patrulaterele inscriptibile formate se scoate

$$\sphericalangle MOM_y = \sphericalangle MM_zM_y = \varphi \quad ; \quad \sphericalangle OM_zM_x = \sphericalangle OMM_x = \varphi + 30^\circ$$

$$\therefore \quad \sphericalangle MM_zM_x = 90^\circ - (\varphi + 30^\circ) = 60^\circ - \varphi$$

și

$$\sphericalangle M_xM_zM_y = 60^\circ - \varphi + \varphi = 60^\circ$$

La fel pentru celelalte unghiuri ale triunghiului $M_xM_yM_z$.

32. *Să se demonstreze că*

$$\operatorname{tg} 2n^2 x = \sum_{k=1}^{k=x} \left[1 + \operatorname{tg} 2k^2 x + \operatorname{tg} 2(k-1)^2 x)\right] \operatorname{tg} 2(2k-1)x.$$

D. I. CRĂCEA.

R. Se observă că

$$\operatorname{tg} 2(2k-1)x = \operatorname{tg}[2k^2 - 2(k-1)^2 x] = \frac{\operatorname{tg} 2k^2 x - \operatorname{tg} 2(k-1)^2 x}{1 + \operatorname{tg} 2k^2 x \operatorname{tg} 2(k-1)^2 x}$$

$$\therefore [1 + \operatorname{tg} 2k^2 x \operatorname{tg} 2(k-1)^2 x] \operatorname{tg} 2(2k-1)x = \operatorname{tg} 2k^2 x - \operatorname{tg} 2(k-1)^2 x.$$

Dând lui k succesiv valorile 1, 2, . . şi adunând, se găseşte identitatea de demonstrat.

33. *Dacă razele cercurilor exînscrise unui triunghiu sunt în progresie aritmetică atunci*

$$8R^2 \cos^4 \frac{A}{2} = ap.$$

P. P. TEODORESCU.

R. Conform enunţului

$$2r_a = r_b + r_c.$$

Inlocuind pe r_a, r_b, r_c prin $p \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, $p \operatorname{tg} \frac{B}{2}$, $p \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ avem

$$2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

$$\therefore \quad \cos^4 \frac{A}{2} = \sin A \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{a}{2R} \cdot \frac{p}{4R} = \frac{ap}{8R^2}.$$

34. *Dacă laturile a, b, c ale unui triunghiu sunt în progresie aritmetică, aşa în cât*

$$a + c = 2b$$

atunci raza cercului înscris este a treia parte din raza cercului exînscris unghiului B.

AL. GH. MORAITE.

R. In orice triunghiu avem

$$r_b = r \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}. \tag{1}$$

In triunghiul special din enunţ, conform exerciţiului 21 din *Gazeta Matematică*, Vol. XLIX, pag. 458, avem

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = 3. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) se deduce proprietatea enunţată.

35. *Fiind dat triunghiul* ABC *inscris în cercul* (O), *se cere să se găsească pe arcele* BC, CA, AB *ale cercului circumscris, punctele* P, N, M *astfel în cât segmentele interceptate de laturi pe dreptele lui* SIMSON *ale acestor puncte, să fie egale.*

EMIL E. MARINESCU.

R. Fie DEF dreapta lui SIMSON al punctului P ales astfel în cât

$$DE = DF$$

punctul D fiind pe BC iar E şi F pe AB şi AC. Triunghiul AEF tăiat de transversala BC în mijlocul laturei EF dă

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} \quad (1)$$

Insă $\sphericalangle EPB = \sphericalangle CPF$

aşa că triunghiurile dreptunghice CPF, BPE sunt asemeni, deci

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{CF}} \quad (1)$$

Din (1) şi (2) se scoate

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EP}}{\overline{AB}}$$

ceea ce arată că P se află pe simediana care pleacă din A.

36. *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$(y''')^2 = y''\, y^{IV}$$

I. A. COHN.

R. Din ecuaţia dată avem succesiv

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{y^{IV}}{y'''} \quad ; \quad \frac{dy''}{y''} = \frac{dy'''}{y'''}$$

$$\text{Log}\, y'' = \text{Log}\, y''' - \text{Log}\, \alpha \quad \therefore \quad \frac{y'''}{y''} = \alpha \quad ; \quad \frac{dy''}{y''} = \alpha$$

$$\text{Log}\, y'' = \alpha x + \beta \quad \therefore \quad y'' = \beta e^{\alpha x}.$$

Integrând de 2 ori

$$y' = \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha x} + \gamma \quad \therefore \quad y = \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} + \gamma x + \delta$$

unde α, β, γ, δ sunt nişte constante.

37. *Dacă suma*

$$\sqrt{A^2+AB+C}-\sqrt{A^2+AC+B}=K$$

este un număr raţional, atunci sumele A^2+AB+C *şi* A^2+AC+B *sunt patrate perfecte.*

LT. COL. E. ST. IACOB.

R. Avem

$$\sqrt{A^2+AB+C}=K+\sqrt{A^2+AC+B}$$

$$\therefore \quad A^2+AB+C=K^2+A^2+AC+B+2K\sqrt{A^2+AC+B}$$

$$\therefore \quad A^2+AC+B=\left[\frac{(B-C)(A-1)-K^2}{2k}\right]^2$$

La fel se găseşte

$$A^2+AB+C=\left[\frac{(C-B)(A-1)-K^2}{2k}\right]^2$$

38. *Să se găsească natura seriei al cărei termen general este*

$$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx\,.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx.$$

MARIN F. VĂDUVA.

R. Se ştie că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx=\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+1)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx=\frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.7.5\ldots(2n+1)} \quad \therefore \quad u_n=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2n+1}$$

adică termenul general al seriei armonice înmulţit cu $\frac{\pi}{2}>1$. Seria dată este prin urmare divergentă.

PROBLEME PROPUSE

6501. La un concurs se cere a se calcula produsul 9×25. Intre rezultatele date, o parte din concurenţi găsesc 225, unii 199, şi alţii 160. Să se arate că toţi concurenţii au dat rezultate exacte.

C. I. BUDEANU.

6502. Să se calculeze $\sum_1^n (i-2)(i-1)i^3$.

G-L GH. BUICLIU.

6503. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$x+y+z+u=a+b \;\; ; \;\; x-y+z-u=a-b,$$

$$xy+zu=3ab \;\; ; \;\; \frac{x}{y}+\frac{z}{u}=\frac{a}{b}.$$

GH. BAZACOV.

6504. Să se rezolve sistemul

$$x+y+z=0 \;\; , \;\; \frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}=0,$$

$$\left(\frac{1}{h_a^2}-\frac{1}{h_b h_c}\right)x+\left(\frac{1}{h_b^2}-\frac{1}{h_c h_a}\right)y+\left(\frac{1}{h_c^2}-\frac{1}{h_a h_b}\right)z=0,$$

h_a, h_b, h_c fiind înălţimi în triunghiul de laturi a, b, c.

I. I. STAMATE.

6505. Fie şirul cu scară de recurenţă lineară şi cu coeficienţi constanţi

$$u_n=p\,u_{n-1}+q\,u_{n-2}$$

Să se arate că dacă $u_n^2=v_n$, avem:

$$v_n-(p^2+q)\,v_{n-1}-q\,(p^2+q)\,v_{n-2}+q^3\,v_{n-3}=0.$$

C. BERDAN.

6506. Fie seria

$$\frac{u_0}{u_0+1}+\frac{1!\,u_1}{(u_0+1)\,(u_1+2)}+\ldots+\frac{n!\,u_n}{(u_0+1)\,(u_1+2)\ldots(u_n+n+1)}+\ldots$$

în care u_i sunt pozitivi, iar seria $\sum u_i$ este divergentă, dar sumabilă, adică există limita sumei

$$\frac{S_0+S_1+S_2+\ldots+S_n}{n+1} \qquad n\to\infty .$$

Se cere:

1°. Să se arate că termenul general al seriei tinde către zero când $n\to\infty$.

2°. Seria dată este convergentă şi să i se afle suma.

N. GAIU.

6507. Să se studieze natura seriilor cu termenii generali:

$$u_n = \frac{(an+b)^{\alpha}[\log(a_1 n+b_1)]^{\alpha_1}}{(cn+d)^{\beta}[\log\log(c_1 n+d_1)]^{\beta_1}}.$$

$$v_n = \frac{(an^2+bn+c)^{\alpha}[\log(a_1 n^2+b_1 n+c_1)]^{\alpha_1}}{(dn^2+en+f)^{\beta}[\log\log(d_1 n^2+e_1 n+f_1)]^{\beta_1}}.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6208. In planul unui cerc C considerăm: o dreaptă d, care taie cercul în I, J; un punct M; polara lui, care taie cercul în U, V; diametrul paralel cu d, care taie cercul în X, Y; polul K al dreptei d; parabola determinată de punctele I, J, X, Y, care taie perpendiculara din M pe d, în W. Să se arate că punctele M, I, J, K, U, V, W sunt situate pe o conică. Dacă dreapta d este tangentă cercului M U V, conica este o parabolă. Caz particular, când M este situat pe dreapta d.

N. N. MIHĂILEANU.

6509. Să se studieze variația suprafeței triunghiului determinat de trei puncte situate respectiv pe un cerc, o elipsă și o iperbolă concentrice și bitangente, cordonatele punctelor fiind exprimate în funcție de același parametru.

G. G. CONSTANTINESCU.

6510. Se dau conicele (M) și (N), având un punct comun O, o cubică (γ) admițând punctul O ca punct dublu și o dreaptă (Δ) netrecând prin O. Dreapta variabilă (λ), trecând necontenit prin O, întâlnește conicele respectiv în M și N, cubica (γ) în A și dreapta (Δ) în B. Să se determine curbele (M), (N), (γ), (Δ) cele mai generale, astfel în cât să avem $\overline{MN} = \overline{AB}$, oricare ar fi poziția dreptei variabile (λ).

MIRCEA V. SOARE.

ERATĂ. 1°. La pag. 435 rândul 9 după *« făcută ca $f(x)$ »* se adaugă *« și $\varphi(x)$ »*.

2°. La pag. 452 rândul 24 și pag. 453 rândul 1, se înlocuește $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ prin $\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

3°. La pag. 454 rândul 7, se înlocuește $\frac{a_n}{a_{n=1}}$ prin $\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

4°. La pag. 459 rândul 16 se înlocuește $n \leq N$ prin $n \geq N$.

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

1. Aritmetica şi Teoria numerelor

		Pag.
N. Ciorănescu	Triunghiuri întregi, triunghiuri raţionale şi total raţionale	427
V. Claudian	Soluţii întregi ale unor ecuaţii diofantine	389
I. B. Florescu	Relaţii între funcţiile aritmetice elementare	225
N. Georgescu-Roegen	Asupra problemei 5527	126

2. Geometria

Ş. Gheorghiu	O problemă de construcţie	161
Em. E. Marinescu	Asupra focarelor elipsei lui STEINER	289
G-l Gh. I. Popescu	Asupra unor figuri patru puncte reciproce, formate din ortocentre	257
V. Thébault	Despre poligoanele armonice	321, 353

3. Algebra

V. V. Mehedincu	Asupra amortizării împrumuturilor	24

4. Geometria analitică

N. N. Mihăileanu	Asupra curbelor anarmonice plane	196
Al. Şcodranu	Asupra unei cuartice piriforme	465

5. Analiza şi Teoria funcţiilor

N. Ciorănescu	O clasă de funcţiuni transcendente întregi	133
F. Marcus	Asupra unor curbe sferice	394
V. Vâlcovici	Asupra unor noi funcţiuni transcendente	193

6. Istoria Matematicelor

I. V. Mătieş	DR. PAUL TANCO, profesor ardelean de matematici	262

7. Diverse

I. S. Antoniu	Cuvântare ţinută la inaugurarea casei de citire „ION IONESCU“	60
R. Bădescu	O problemă de actualitate	324
G. Borneanu	Inginerul ION IONESCU	83
G-l Gh. Buicliu	Activitatea lui ION IONESCU la *Gazeta Matematică*	63
T. Constantinescu	Scrisoarea d-lui T. CONSTANTINESCU	116

Pag.

Lt. col. M. I. Focşeneanu Activitatea profesorului ION IONESCU ca ofiţer de rezervă 104
Gazeta Matematică . . . In memoria lui ION IONESCU 57
E. Grapini . . . . . Cuvântul colegiului inginerilor 115
I. Ionescu . . . . . Memoriu pentru înscrierea în colegiul inginerilor 118
I. Ionescu . . . . . Testamentul inginerului ION IONESCU . . . 122
Cr. Niculescu . . . . Cuvântul agirului 82
O. Onicescu . . . . . Inginerul ION IONESCU şi societăţile de ştiinţe 78
D. A. Stan . . . . . Profesorul ION IONESCU 87
C. C. Teodorescu . . . ION IONESCU, omul 109
I. Vardala . . . . . Scrisoarea d-lui Ing. I. VARDALA 117
N. Vasilescu-Karpen . . Cuvântul Academiei Române 78
R. P. Voinea . . . . . Dare de seamă despre comemorarea lui ION IONESCU 57

8. **Necrologuri**

Cr. Mateescu . . . . . C. ORĂŞANU 425
N. N. Mihăileanu . . . Profesorul IOAN STAMATESCU 161

B. CHESTIUNI IN LEGĂTURĂ CU REDACŢIA ŞI SOCIETATEA „GAZETA MATEMATICĂ“

1. Diverse

. . . . . Lista membrilor societăţii *Gazeta Matematică* 5
. . . . . Membrii decedaţi 23

2. Premii şi concursuri

Delegaţia Societăţii . . Concursul *Gazeta Matematică* din 1948. 30, 135, 265
Lt.-Col. Ed. Dragomirescu-Buzne, Ing. D. Stan, A. I. Stan . . . Raport pentru acordarea premiului „G-ral SC. PANAITESCU“ 31
Delegaţia Societăţii . . Premiul „Ing. H. CAPRIEL“ 137
I. S. Antoniu, P. Sergescu, Ş. Ţiţeica . . . . . Raport pt. acordarea premiului V. CONTA“ pe anul 1947 171
I. S. Antoniu, E St. Iacob, P. Sergescu . . . . Raport pentru acordarea premiului de „*Istoria Matematică*“ în 1947 201
I. S. Antoniu, Em. Botea, Ş. Gheorghiu . . . . Raport pt. decernarea premiului „N. BOTEA“ 297
G-l Gh. Buicliu, N. Georgescu-Roegen . . . . Raport pentru premiul de aritmetică „ION IONESCU“ 298
Al. Bunescu, Al. Al. Roşu, D. Stoica . . . . . Raportul comisiunii pentru premiul „Inginer AL. ROŞU“ 330

		Pag.
I. S. Antoniu, N. Petrulian, D. Stan, C. C. Teodorescu	Raport pentru premiul „GH. EM. FILIPESCU"	331
Th. Angheluță, N. Ciorănescu, N. Georgescu-Roegen	Raport pentru premiul de algebră „A. GH. IOACHIMESCU"	363
O. Țino	Rezultatul concursului „*Gazeta Matematică*" din anul 1948	385
I. S. Antoniu, G-l Gh. Liteanu, Al. V. Nicolescu	Raport asupra premiului de Trigonometrie „V. CRISTESCU" pe anul 1946—1947	397
Șerban Gheorghiu, N. N. Mihăileanu	Raport pentru decernarea premiului „G. ȚIȚEICA"	433
I. S. Antoniu, Al. Stoenescu, Gabriela Țițeica	Raport asupra premiului de mecanică SP. HARET"	475

C. NOTE MATEMATICE

1. Aritmetica și Teoria numerelor

22.	*A. Bal*	Despre exercițiul 29 Vol. LII	332
19.	*I. B. Florescu*	Formula lui THABIT BEN KORRAH asupra numerelor amiabile	298
4.	*I. B. Florescu*	Patrate magice cu produse	137
30.	*I. B. Florescu*	Terminațiunile patratelor perfecte	398
1.	*N. Georgescu-Roegen*	Asupra problemei 2354	32
11.	*A. Gloden*	Un sistem diofantian	201
32.	*Gh. Silaș*	Completarea soluției problemei 6129	433

2. Geometria

18.	*G-l Gh. Buicliu*	Asupra notei 17 referitoare la „O problemă de construcție"	269
7.	*G-l Gh. Buicliu*	O problemă de construcție	173
25.	*G-l Gh. Buicliu*	O problemă de construcție	363
33.	*G-l Gh. Buicliu*	O problemă de construcție	433
20.	*Ș. Gheorghiu*	Observare asupra focarelor elipsei lui STEINER	300
17.	*Ș. Gheorghiu*	Rectificare	267
35.	*V. Ghițescu*	Asupra unei chestiuni de geometrie	475
31.	*Em. E. Marinescu*	Asupra focarelor elipsei lui STEINER	400
5.	*N. N. Mihăileanu*	Asupra problemei 3874	139
12.	*Maria Neumann*	Asupra problemei 3366	202
29.	*P. P. Teodorescu*	Volumul tetraedrului în funcție de muchiile sale	398
2.	*V. Thébault*	Tetraedru quasiortocentric	33

Pag.

3. Algebra

23. *M. Adam* . . . . . Generalizarea unei inegalităţi 332
13. *I. B. Florescu* . . . . Forma remarcabilă a unor ecuaţiuni . . . 203
27. *Ş. Gheorghiu* . . . . Notă asupra regulii lui L'HOPITAL 365
36. *Ş. Gheorghiu* . . . . Complectare la nota 27 476
26. *M. Ghermănescu* . . Asupra problemei 6011 364
34. *M. Ghermănescu* . . Asupra regulii L'HOPITAL 434
28. *V. Vâlcovici* . . . . . Asupra întâmpinării d-lui M. GHERMĂNESCU. 368

4. Trigonometria

9. *M. D. Cotariu* . . . Generalizarea unei relaţii trigonometrice . . 173
14. *C. Mihu* . . . . . Asupra problemei 5699 233

5. Calculul probabilităţilor

15. *N. Georgescu Roegen.* Asupra problemei 3182 234

6. Analiza şi Teoria funcţiunilor

24. *V. Ghiţescu* . . . . . Integrarea unei ecuaţii diferenţiale 333
8. *P. P. Teodorescu* . . Asupra unor identităţi algebrice 173

7. Mecanica

10. *Al. Stoenescu* . . . . Asupra problemei 1959 174

8. Istoria Matematicelor

21. *Lt. Col. E. St. Iacob.* Primii studenţi la matematici şi filozofie în limba românească 332

9. Diverse

6. *P. P. Drăghicescu* . . In loc de erată la multiperfectele şi amiabilele d-lui P. POULET 172
3. *G. Enescu* . . . . . Aritmetici diverse 137
16. *V. Vâlcovici* . . . . Restabiliri de prioritate 267

D. CHESTIUNI DE EXAMEN

Concursul *Gazeta Matematică* din 1948 . . . . . 369, 400, 436, 480
Politehnica din Bucureşti. Concursul de admitere din Octombrie 1947. 204
Universitatea din Bucureşti. Examenul de admitere în anul I. Sesiunea Octombrie 1947 . . . . . 272, 301, 334

E. BIBLIOGRAFIE

1. Lucrări şi reviste recenzate

G-l Gh. Buicliu . . . . Bulletin de la Société Mathématique de France 301
G-l Gh. Buicliu . . . . Revista ştiinţifică a liceului Institutului Român din Sofia 302
G-l Gh. I. Liteanu . . . TIB. IONESCU, GH. D. SIMIONESCU, C. IONESCU-BUJOR. Trigonometrie pentru clasa a VI-a liceu 237
Gabriela Ţiţeica . . . . J. CHAZY. Cours de mécanique rationnelle. 481

Pag.

2. Lucrări nerecenzate

C. N. Avram . . . . . Grinzi continui cu moment de inerție variabil. 237

R. Bădescu și Cornelia Nanes . . . . . Culegere de probleme tehnice propuse la examenele de matematici generale și mecanică 302

M. St. Botez . . . . . Metode de rezolvire a ecuațiilor trigonometrice 175

P. Comparat, F. Ecochard, J. Lafoucrière, J. Thibaud . . . . . Uranium 23 et plutonium 239 438

V. Constantinescu și M. I. Surdu . . . . . Table de calculul majorărilor dobânzilor de întârziere și reducerile de 5 și 7 la sută. 438

R. D'Aubay et Puymonin. Les actions à distance 438

Gh. Th. Gheorghiu . . . Curs de geometrie. Vol. I. Geometria plană. 403

Gh. Th. Gheorghiu . . . 67 examene de admitere la Politehnicele din România 403

A. Gloden & G. Palama . Bibliographie des multigrades avec quelques notices bibliographiques 403

A. S. Gurrea . . . . . Fundamentos de Algebra superior 403

A. G. Ioachimescu . . . Culegere de probleme de mecanică 302

Tib. Ionescu, Gh. D. Simionescu și C. Ionescu-Bujor . . . . . Aritmetica pentru clasa I-a a gimnaziului unic. 140

Tib. Ionescu, Gh. D. Simionescu și C. Ionescu-Bujor . . . . . Aritmetica pentru clasa a II-a a gimnaziului unic 237

Tib. Ionescu, Gh. D. Simionescu și C. Ionescu-Bujor . . . . . Aritmetica pentru clasa a III-a a gimnaziului unic 140

Tib. Ionescu Gh. D. Simionescu și C. Ionescu-Bujor . . . . . Geometria pentru clasa II-a a gimnaziului unic 237

Tib. Ionescu, Gh. D. Simionescu și C. Ionescu-Bujor . . . . . Geometria pentru clasa a III-a a gimnaziului unic 237

R. M. Otzet . . . . . Caracteristicas de la carta preliminar del teritorio nacional 403

R. M. Otzet . . . . . La proyeccion gnomonica sobre el horizonte de Ciudad Trujillo 403

R. M. Otzet . . . . . Teoria de los errores de observacion, aplicada a la Topografia, Geodesia y Astronomia . 403

Pag.

M. I. Surdu . . . . . Amortismente la imprumuturi cu prime şi loturi 438

3. **Extrase, Suplimente, Teze**

B. Barbălat . . . . . Sur les espèces topologiques les plus généreaux 140
B. Barbălat . . . . . Sur les fonctions monotones 140
B. Barbălat . . . . . Sur un groupe d'axiomes des espaces abstraits 140
G. G. Constantinescu . . Apropos d'une théorie unitaire des equations integrales 481
C. Iacob . . . . . LAZARE CARNOT 35
C. Iacob . . . . . Mécanique des fluides 35
C. Iacob . . . . . Recherches sur les mouvements fluides engendrés par la rotation de plusieurs corps solides 35
C. Iacob . . . . . Sur la methode approchée de M LAMLA en dinamique des fluides compressibles . . 35
C. Iacob . . . . . Sur l'emploi de la methode hodographique en mécanique des fluides compressibles . 35
A. Gloden . . . . . Table des solutions de la congruence $x^4+1 \equiv 0$, (mod. p) pour $500.000 < p < 600.000$ . . 239
P. Sergescu . . . . . La lithérature mathématique dans la première période du „journal des savants“ 273
P. Sergescu . . . . . La vie et l'oeuvre de GASPARD MONGE . 35
T. Vescan . . . . . Relativistical explication concerning the Spin-Anomaly 239

4. **Reviste periodice**

Acta Bolyaiana 301
Analele Româno-Sovietice 140, 205, 301, 370
Angulo Acuto 370
Archives Internationales d'Histoires des Sciences 370, 371, 437
Boletin Matematico 34, 237, 371
Buletinul Politehnicli „GH. ASACHI“ din Iaşi 205, 403
Buletinul Societăţii Politehnice din România 371, 481
Casopis pro pěstováni Matematiky a Fysiky 175, 237, 438
Cercul de studii Agir 371
Colloqium Mathematicum 371
Endeavour 371, 481
Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien 481
Intermédiaire des Recherches Mathématiques 302, 371
Quaterly of applied mathematics 371, 403
Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk . . 438
Revista 336
Revista Matematică din Timişoara 34, 140, 175, 206, 237, 272, 302, 336, 371, 403, 438, 481
Revista Ştiinţifică „V. ADAMACHI“ 35, 302, 481
Universited Nacional de La Plata 175

F. CERERI [1])

Nr. cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
1	24 (XXI)	?
4	24 „	?
5	24 „	?
7	59 „	?
8	59 „	?
11 [2])	144 „	?
12	145 „	?
13	145 „	219 (XXI) ?
14	183 „	?
15	219 „	?
16	254 „	?
17	294 „	264 (XXXVIII) ?
20	420 „	?
23	17 (XXII)	?
24	75 „	?
26	161 „	?
27	187 „	?
28	213 „	?
29	231 „	?
30	258 „	?
31	277 „	?
32	277 „	259 (XXIII) 39, 186 (XXIV) ?
33	308 „	?
34	40 (XXIII)	?
35	40 „	?
36	65 „	?
37	86 „	211 (XXII) ?
38	112 „	?
39	137 „	?
40	157 „	?
41	185 „	?
42	211 „	?
43	235 „	?
44	259 „	?
46	13 (XXIV)	?
49	57 „	?
50	70 „	?
51	88 „	?
52	103 „	?
55	168 „	?
56	168 „	?
58	16 (XXV)	?
59	36 „	?
60	58 „	?
61	58 „	?
63	71 (XXV)	?
64	122 „	?
65	122 „	?
66	155 „	?
67	175 „	?
68	199 „	?
70	223 „	?
71	251 „	?
73	45 (XXVI)	?
74	45 „	?
75	94 „	?
77	198 „	?
78	227 „	?
80	263 „	?
81	27 (XXVII)	?
82	27 „	160 (XXVII) ?
83	160 „	?
84	197 „	. . . 240
86	240 „	. . . 206, 481
87	283 „	?
88	329 „	?
89	361 „	?
92	57 (XXVIII)	?
93	57 „	?
95	136 „	?
96	136 „	?
97	213 „	?
98	213 „	?
100	297 „	?
101	342 „	?
102	458 „	?
103	458 „	?
104	24 (XXIX)	?
105	58 „	?
107	145 „	?
108	226 „	?
109	298 „	?
112	419 „	?
113	454 „	?
115	22 (XXX)	?
116	102 „	?
117	102 „	?
118	140 „	?
119	218 „	?
120	261 „	?
122	306 „	?
123	337 „	?

1) In această tabelă semnul ? arată că nu s'a primit răspuns sau că se mai aşteaptă răspuns dacă e pus după răspuns.

2) A se vedea nota matematică dela pag. 249, Vol. XLVI.

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
124	383 (XXX)	?
126	423 „	?
128	33 (XXXI)	?
130	56 „	?
131	100 „	?
134	184 „	?
142	53 (XXXII)	?
144	142 „	?
146	216 „	?
148	296 „	?
149	343 „	?
152	19 „	19 (XXXIII) ?
153	51 „	?
154	51 „	?
157	146 „	?
158	185 „	?
159	217 „	?
162	295 „	?
163	341 „	?
166	457 „	?
179	385 (XXXIV)	?
181	24 (XXXV)	?
186	216 „	?
193	466 „	?
196	57 (XXXVI)	?
207	414 „	?
208	462 „	?
210	62 (XXXVII)	?
211	98 „	?
212	137 „	?
214	217 „	?
215	260 „	?
219	425 „	?
220	448 „	?
223	94 (XXXVIII)	?
227	57 (XXXIX)	?
235	222 „	?
237	360 „	?
238	409 „	?
239	458 „	?
243	212 (XL)	?
244	266 „	273, 376, 372, 404
247	499 „	?
248	553 „	?
250	148 (XLI)	?
251	189 „	?
252	241 „	?
253	292 „	?
254	343 „	?
255	384 „	?
256	485 „	?
257	533 (XLI)	?
262	251 (XLII)	?
263	307 „	?
264	368 „	?
265	422 „	?
266	530 „	?
267	588 „	?
268	639 „	?
270	90 (XLIII)	?
271	138 „	?
273	255 „	?
274	304 „	?
275	423 „	?
276	477 „	?
277	539 „	?
279	639 „	?
280	32 (XLIV)	?
289	248 (XLV)	?
290	306 „	?
291	419 „	?
292	479 „	?
294	530 „	?
296	638 „	?
297	205 (XLVI)	?
298	254 „	439
299	315 „	?
301	483 „	?
302	534 „	?
303	583 „	?
304	641 „	?
305	30 (XLVII)	?
306	135 „	?
307 [1]	171 „	?
308	221 „	?
310	373 „	?
311	373 „	?
313	518 „	?
315	564 „	?
316	30 (XLVIII)	?
317	71 „	?
318	166 „	?
319	414 „	?
320	454 „	?
325	243 (XLIX)	35, 176
327	346 „	?
328	434 „	?
329	508 „	?
330	569 „	?
331	611 „	?
333	732 „	?
335	317 (L)	?

1) La pag. 171, Vol. XLVII a fost propusă cu numărul greşit 306.

Nr. cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul	Nr. cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
336	469 (L)	?	342	280 (LII)	?
337	181 (LI)	?	343	405 „	?
338	181 „	?	344	140 (LIII)	?
339	323 „	?	349	303 „	?
340	602 „	?			

G. DIVERSE

Adunările societății *Gazeta Matematică* 140, 206, 273, 404
Cedarea dreptului de autor 303
Din activitatea d-lui Prof. P. SERGESCU 303
Doctorate recente în matematici 439
Donație 303, 372
Inmânare de premii 336, 372
Inștiințare pentru d-nii membrii ai societății *Gazeta Matematică* . . 240
Pentru abonații la I. R. M. 36
Ședințele Societății Române de Matematici 404, 482
Sporirea Bibliotecii *Gazeta Matematică* 140, 206, 273, 404, 440

H. PROBLEME PROPUSE ȘI REZOLVATE

a) Repartizarea pe autori a problemelor propuse în acest volum

M. Adam 6455, 96
A. Arvaniti 6464
B. Barbălat . . 6393, 406, 47, 76
I. A. Barbu 6435
Gh. Bazacov 5503
C. Berdan 6505
C. N. Boerescu 6418, 32
C. I. Budeanu 6501
G-l Gh. Buiciiu 6395, 402, 12, 22, 31, 41, 53, 61, 71, 83, 94, 502
V. Claudian . 6394, 403, 15, 27, 38, 45, 59, 66, 78, 87, 97, 506
G. G. Constantinescu. 6495, 509
Virgil G. Constantinescu . . 6433
C. Corduneanu 6419
C. Coșniță 6480
C. V. Costăchescu 6439
M. D. Cotariu 6446
C. Diaconu 6473
A. Dobrescu 6468
P. P. Drăghicescu 6423
I. B. Florescu 6392, 481
U. M. Florescu 6491
Lt. Col. M. I. Focșeneanu. 6457, 89
N. Gaiu 6463, 98, 507
Răd. Georgescu 6462
N. Georgescu Roegen . 6391, 401 21, 34, 52, 77
Ș. Gheorghiu 6454, 67, 75
M. Ghermănescu . . . 6444, 69, 82
N. Ghircoiașu 6436
V. Ghițescu 6404
I. Hitzig 6409, 50, 500
C. Ionescu-Bujor . . . 6405
C. Ionescu-Țiu . . 6398, 426, 92
A. C. Lascaridis 6400
Em. E. Marinescu 6414
N. N. Mihăileanu 6429, 56, 85, 508
Al. Moraite 6413, 90
Em. Morțun 6448
F. Nedelcu 6410, 74
O. Orănescu 6443
Val. A. Petcu 6472
G-l Gh I. Popescu . . . 6484
M. D. Popa 6397, 479, 88
M. Sarian 6411
A. Scodrano 6408, 58
V. Șerbănescu 6407, 51
Gh. D. Simionescu . . . 4393, 499
M. V. Soare . . . 6399, 437, 510
I. I. Stamate 5504
Aurelian Stan . . . 4396, 470, 93
Al. Stoenescu 6430
D. V. Stoica 6442
I. St. Teodorescu . . 6416, 28, 86
P. P. Teodorescu 6440, 65

V. Vâlcovici	6425	*Dan E. Vasiliu*	6424
A. I. Varga	6420	*E. Wegener*	6417
N. Vasilescu-Karpen	6449	*I. Gh. Zamfirescu*	6460

b) Repartizarea pe materii a problemelor propuse în acest volum

Aritmetica şi teoria numerelor . . . 6391, 2, 401, 2, 11, 21, 31, 51, 2, 61, 71, 2, 81, 501.

Algebra . . . . . 6393, 4, 403, 5, 6, 15, 24, 5, 6, 7, 34, 6, 8, 43, 5, 58, 63, 4, 76, 7, 8, 87, 94, 5, 6, 7, 8, 9, 502, 3, 4, 5, 6, 7.

Geometria . . . . . 4393, 6395, 6, 404, 12, 3, 4, 22, 3, 32, 3, 5, 41, 2, 53, 4, 6, 62, 73, 4, 5, 82, 3, 4, 5, 6, 91, 2, 3.

Trigonometria . . . . . 6397, 8, 416, 7, 46, 55, 65, 78.

Geometria analitică . . . . . 6399, 408, 18, 9, 27, 9, 37, 44, 7, 57, 66, 7, 8, 9, 80, 8, 9, 500, 9, 10.

Mecanica . . . . . 6400, 7, 10, 30, 40, 8, 9, 60, 70, 90.

Analiza şi Teoria funcţiilor . . . 6409, 20, 50, 9.

Cosmografia . . . . . 6439.

c) Indicarea paginei la care problemele au fost propuse sau rezolvate

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
485 [3]	104 (V), 198 (XVI)	NR
585 [4]	172 (VI), 238 (XVI)	. . . 168
676	148 (VII)	
1000 [5]	220 (IX), 438 „	NR
1056 [6]	100 (XI)	NR
1146 [7]	76 (XII)	NR
1156	100 (XII)	
1214	296 „	
1236	64 (XIII)	
1270	192 „	
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1310	352 „, 372 (XXXI)	NR
1342	64 (XIV)	. . . 36

1) Numărul latin din paranteză indică volumul în care problema este propusă. Problemele care au în coloana a doua mai multe numere, au fost publicate sau rectificate de mai multe ori în volumul şi la pagina respectivă.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru celelalte probleme redacţia posedă soluţiuni care nu au fost publicate.

3) Vezi erata pag. 128, Vol. V.

4) Soluţia problemei 585 s'a publicat la pag. 88. Vol. VII. Se mai aşteaptă discuţia la punctele cerute în nota de la finele acelei soluţii. A se vedea articolul dela pag. 402, Vol. XLIV.

5) A se vedea lămuriri la pag. 291, Vol. XXXI.

6) A se vedea pentru anamorfoză articolul dela pag. 80, Vol. XI.

7) A se vedea nota matematică dela pag. 634, Vol. XLVI, în baza căreia problema rămâne nerezolvată, soluţia dela pag. 77, Vol. XLVI neräspunzând adevăratei înterpretări a enunţului.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
1367	128 (XIV)	NR
1398	224 „	
1450	352 „	
1497	128 (XV)	
1533	224 „	
1553	288 „	NR
1577	352 „	
1632	159 (XVI)	
1637	160 „	274
1676	279 „	
1702	360 „	
1711	399 (XVI) / 372 (XXXI)	
1735 [1])	464 (XVI)	
1753	80 (XVII)	
1764 [2])	120 „	NR
1790	240 „	NR
1831	439 „	
1835	440 „	
1840	466 „	
1898	199 (XVIII)	
1914 [3])	239 „	NR
1922	278 „	
1929	279 „	
1945 [4])	320 „	
2004	40 (XIX)	NR
2016	79 „	
2018	80 „	
2024	118 „	
2025	119 „	
2032	120 „	
2038	159 „	
2048	198 „	NR
2055	200 „	176
2065	239 „	
2070 [5])	240 „	NR
2074	278 „	NR
2079	279 „	
2083	280 „	
2106	358 „	
2108	359 „	304
2110	359 „	
2118	399 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
2133	439 (XIX)	
2170	119 (XX)	NR
2176	120 „	
2197	198 „	
2217	239 „	482
2222 [6])	240 „	
2227	279 „	
2235	280 „	
2240	318 „	405
2246 [7])	320 „	373
2247	320 „	337
2248	320 „	
2249	320 „	
2263	359 „	
2264	360 „	
2265	360 „	
2266	360 „	
2274	398 „	
2284	439 „	
2290	439 „	
2301	462 „	
2302	462 „	141
2311	40 (XXI)	
2338	120 „ / 422 (XXXI)	141
2343	157 (XXI)	
2344	158 „	
2357	199 „	
2365	200 „	
2370	239 „	
2375	240 „	
2422	399 „	
2430	439 „	NR
2435	440 „	
2436	440 „	
2462	62 (XXII)	
2466	63 „	
2477	95 „	
2497	144 „	
2500	144 „	
2537	287 „	NR
2553	47 (XXIII)	
2569	120 „	

1) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.

2) Pentru definiţia momentelor statice polare, a se vedea G. M., Vol. XVII, pag. 87.

3) Vezi erata pag. 280, Vol. XVIII.

4) Vezi erata pag. 360, Vol. XVIII.

5) Vezi erata pag. 280, Vol. XIX.

6) Pentru calculul determinantului din enunţ a se vedea articolul dela pag. 126, Vol. XX şi nota dela pag. 172, Vol. XX.

7) Soluţia dela pag. 262, Vol. XXI nefiind exactă, se aşteaptă o nouă soluţie. — Pentru îndrumare a se vedea nota dela pag. 109, Vol. XLVII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
2573	144 (XXIII)	
2586	216 „	206
2591 [1]	240 „	277
2593	264 „	
2602 [2]	318 (XXXI)	
2609 [3]	32 (XXIV)	NR
2631	112 „	
2638	127 „	
2645	143 „	
2655	191 „	
2660	191 „	
2664	24 (XXV)	
2675	63 „	
2684	80 „	
2688	80 „	
2692 [4]	108 „	
2713	143 „	
2752	264 „	
2758	56 (XXVI)	
2769	79 „	
2778	104 „	
2789	135 „	
2814	192 „	NR
2818	216 „	
2827	247 „	
2850	335 „	
2886	104 (XXVII)	NR
2909	221 „	
2912	222 „	NR
2922	236 „	
2926 [5]	264 „	NR
2936	343 „	NR
2955	416 „	
2969	39 (XXVIII)	
2971	39 „	
2983	79 „	
2985	80 „	
2993	119 „	
2999	120 „	
3000	120 „	
3003	159 „	
3005	159 „	
3013	199 „	
3054	360 „	
3070	400 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3071	439 (XXVIII)	
3073	439 „	
3085 [6]	480 „	
3086	480 „	
3091	39 (XXIX)	
3095	40 „	
3108	80 „	
3118	120 „	
3134 [7]	199 „	143
3150	240 „	
3161	318 „	NR
3173	358 „	
3177	359 „	
3178	360 „	
3180	360 „	
3189	400 „	
3198	440 „	
3220	40 (XXX)	
3227	80 „	
3230	80 „	
3232	119 „	
3239	120 „	
3245	160 „	
3249	160 „	
3255	199 „	NR
3260	200 „	
3267	239 „	
3277	280 „	
3287	320 „	
3288	320 „	NR
3296	359 „	
3298	359 „	NR
3304	399 „	NR
3309	400 „	
3310	400 „	NR
3311	438 „	
3312	439 „	278
3316	439 „	144
3318	440 „	
3320	440 „	
3340	40 (XXXI)	
3389	240 „	
3405	319 „	147
3412	358 „	NR
3419	360 „	

1) A se vedea punctul 4° pag. 244, Vol. XXXVIII şi punctul 9° pag. 441, Vol. XXXIX.

2) Inlocueşte problema 2602 propusă la pag. 16, Vol. XXIV.

3) Soluţia dată la pag. 458, Vol. XXXIX nefiind satisfăcătoare, se aşteaptă o nouă soluţie la această problemă.

4) Vezi erata pag. 144, Vol. XXV.

5) Vezi erata pag. 360, Vol. XXXIII.

6) Vezi problema analoagă 3155 rezolvată la pag. 192 Vol. XXXI.

7) A se vedea soluţia parţială dela pag. 254 şi nota dela pag. 300, Vol. XLII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3424	399 (XXXI)	NR
3425	399 „	
3429	400 „	
3439	440 „	
3445	479 „	
3448	479 „	
3457	39 (XXXII)	
3459	40 „	
3467 [1])	79 „	
3468	80 „	
3472	80 „	
3474	119 „	
3488	159 „	
3493	160 „	
3495	199 „	
3499	199 „	
3506	239 „	
3512	240 „	
3513	240 „	. . . 240
3521	279 „	
3522	280 „	NR
3523	280 „	
3533	320 „	
3535	359 „	NR
3536 [2])	438 „	
3542	360 „	NR
3545	398 „	NR
3551 [3])	39 (XXXIII)	
3584	79 „	
3597	120 „	
3607 [4])	159 „	
3620	199 „	
3622 [5])	239 „	
3625	239 „	
3627	278 „	
3632 [6])	279 „	
3644	319 „	
3653	359 „	NR
3657	359 „	
3658	360 „	
3660	360 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3664	399 (XXXIII)	
3681 [7])	478 „	
3682	478 „	
3689	480 „	
3693	39 (XXXIV)	
3700	40 „	NR
3706	79 „	
3713 [8])	119 „	
3725	160 „	
3732	199 „	
3736	200 „	
3749	240 „	
3762	319 „	
3764	319 „	
3768	320 „	
3772	359 „	
3780	360 „	
3787	400 „	
3790	400 „	
3792	439 „	
3793	439 „	NR
3804	479 „	
3807	480 „	
3808 [9])	480 „	
3810	480 „	
3817	40 (XXXV)	
3819	40 „	
3820	40 „	
3824	79 „	
3829	80 „	NR
3836	120 „	NR
3844	159 „	
3849	160 „	
3853	199 „	
3863	239 „	
3864	239 „	
3867	240 „	
3876	279 „	
3883	319 „	
3896	360 „	NR
3909	400 „	NR

1) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXII.

2) Inlocueşte enunţul dela pag. 359, Vol. XXXII ; Vezi şi erata dela pag. 40, Vol. XXXIII.

3) Inlocueşte enunţul dela pag. 400, Vol. XXXII.

4) Vezi erata pag. 240, Vol. XXXIII.

5) Vezi erata pag. 280, Vol. XXXIII.

6) Problema rezolvată la pag. 95, Vol. XLII este 3630, iar nu 3632. A se rectifica în consecinţă tabla de materii a Vol. XLII şi a volumelor următoare.

7) Pentru rezolvare a se vedea articolul dela pag. 161, Vol. XXX şi problema 1128 rezolvată la pag. 306 Vol. XXXV.

8) A se vedea erata dela pag. 672, Vol. XLVI.

9) A se vedea completarea enunţului la pag. 288, Vol. XL.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3934 . . .	39 (XXXVI)	
3939 . . .	40 „ . . .	484
3961 [1]) . .	159 „	
3975 . . .	200 „	
3983 . . .	238 „	
4010 . . .	320 „	
4013 . . .	359 „	NR
4028 . . .	400 „	
4035 . . .	440 „	
4041 [2]) . .	38 (XXXVIII)	
4045 . . .	479 (XXXVI) 142 (XL)	
4053 [3]) . . .	39 (XXXVII)	
4056 . . .	79 „	
4059 . . .	40 „	
4060 . . .	40 „	
4074 . . .	119 „	
4075 . . .	120 „	
4080 . . .	120 „	
4084 . . .	159 „	
4085 . . .	159 „	
4096 . . .	200 „	
4104 [4]) . .	758 (LI)	
4105 . . .	240 (XXXVII)	
4107 . . .	240 „	
4111 [5]) . .	279 „	
4112 . . .	279 „	
4118 . . .	280 „	
4126 . . .	319 „	
4127 . . .	320 „	
4132 . . .	359 „	
4148 [6]) . .	400 „	NR
4150 . . .	400 „	NR
4151 . . .	438 „	NR
4155 . . .	439 „	
4167 . . .	479 „	NR
4169 . . .	480 „	
4172 . . .	39 (XXXVIII)	
4184 . . .	79 „	
4194 . . .	119 „	
4199 . . .	120 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4206 . . .	160 (XXXVIII)	NR
4210 . . .	160 „	
4214 . . .	198 „	
4234 . . .	279 „	
4236 . . .	280 „	
4249 . . .	320 „	NR
4250 [7]) . .	383 (XXXIX)	
4256 . . .	359 (XXXVIII)	NR
4257 . . .	359 „	
4270 . . .	400 „	
4274 . . .	439 „	
4275 . . .	439 „	
4277 . . .	440 „ . . .	38
4285 [8]) . .	479 „	
4287 . . .	480 „	
4289 . . .	480 „	
4290 [9]) . .	383 (XXXIX)	NR
4302 . . .	78 „	
4303 . . .	78 „	NR
4307 . . .	79 „	
4316 . . .	120 „	
4326 . . .	159 „	
4333 . . .	198 „	NR
4335 . . .	198 „	
4337 . . .	200 „	
4340 . . .	200 „	NR
4350 . . .	240 „ . . .	374
4352 . . .	286 „	
4356 . . .	287 „	
4358 . . .	288 „	NR
4360 . . .	334 „	
4363 . . .	335 „	NR
4370 . . .	336 „	
4373 . . .	383 „	
4384 . . .	431 „	NR
4393 [10]) . .	222 (LIII)	
4395 [11]) . .	479 (XXXIX)	NR
4402 . . .	480 „	
4404 . . .	526 „	
4407 . . .	527 „ . . .	440
4411 . . .	528 „	

1) In tabla de materii Vol. XLIX a fost trecută din eroare ca rezolvată.

2) Inlocueşte enunţul dela pag. 479, Vol. XXXVI. A se vedea problema rezolvată la pag. 29, Vol. XXXIX şi erata 1) dela pag. 80, Vol. XXXIX.

3) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXVIII.

4) Inlocueşte enunţul de la pag. 239 Vol. XXXVII.

5) Vezi lămuriri la pag. 499, Vol. XLIX.

6) Vezi erata pag. 200, Vol. XXXVIII.

7) Inlocueşte problema 4250 dela pag. 480 Vol. XXXVIII.

8) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIX.

9) Inlocueşte problema 4290 dela pag. 480 Vol. XXXVIII.

10) Inlocueşte enunţul dela pag. 478, Vol. XXXIX.

11) Vezi erata pag. 48, Vol. XL.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4416	46 (XL)	
4426	48 „	
4435	96 „	
4445	143 „	
4446	143 „	
4449	144 „	
4450	144 „	178
4458	191 „	179
4468	239 „	
4473	240 „	
4478 [1])	285 „	
4480	286 „	
4484	287 „	
4486 [2])	288 „	
4487	334 „	NR
4489	334 „	NR
4492	335 „	NR
4494	336 „	
4496	336 „	
4509	384 „	
4511	430 „	NR
4513	430 „	338
4515	431 „	
4520	432 „	
4525	478 „	
4533	480 „	
4534	480 „	NR
4548	573 „	
4553 [3])	574 „	
4557	575 „	
4558	576 „	
4559	116 (XLI)	NR
4560 [4])	116 „	
4561	116 „	NR
4566	118 „	
4568	118 „	
4571	119 „	
4573	119 „	
4576	119 „	
4578	120 „	
4581	166 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4587 [5])	262 (XLI)	
4590	168 „	
4593	215 „	
4598 [6])	216 „	
4601	216 „	
4603	262 „	NR
4607 [7])	263 „	
4613	264 „	
4614	264 „	NR
4615	310 „	
4620	311 „	
4625	312 „	
4631	359 „	
4634	360 „	
4637	360 „	
4638 [8])	360 „	241
4640	406 „	
4641	407 „	
4644	407 „	
4647	408 „	
4657	454 „	
4660	455 „	
4664 [9])	503 „	405
4670	504 „	
4672	504 „	
4683	551 „	
4685 [10])	552 „	
4686	552 „	NR
4688	598 „	
4690	598 „	
4696	600 „	NR
4698	600 „	NR
4703	647 „	
4705	647 „	
4706	647 „	
4710	648 „	
4717	55 (XLII)	
4720	56 „	
4722	56 „	
4726	110 „	
4729	111 „	

1) Vezi erata pag. 384, Vol. XL.

2) Vezi erata pag. 120, Vol. XLI.

3) I s'a dat o soluţie la pag. 352, Vol. XLI. A se vedea nota dela pag. 302., Vol. XLII. Se aşteaptă completarea soluţiei, pentru cazul p şi q imaginari.

4) Vezi erata pag. 168, Vol. XLI.

5) Inlocueşte problema 4587 dela pag. 168, Vol. XLI.

6) Vezi erata pag. 264, Vol. XLI.

7) Vezi erata pag. 312, Vol. XLI.

8) A se vedea şi articolele dela pag. 286 şi 401, vol. XXXVIII.

9) A se vedea şi problema analoagă 5762 rezolvată la pag. 476, Vol. XLVIII.

10) I s'a rectificat numărul de ordine la pag. 600, Vol. XLI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4731 [1]	112 (XLII)	
4734	112 „	
4741	167 „	
4742	167 „	
4753	223 „	442
4755	224 „	
4765	279 „	340
4768	280 „	
4770	280 „	
4772	334 „	42
4779	336 „	
4780	336 „	
4783	390 „	
4785	390 „	
4788 [2]	390 „	
4790	391 „	
4791	391 „	
4793	392 „	
4801	447 „	
4804	448 „	
4812	503 „	
4815	504 „	
4817	504 „	
4821	558 „	
4825	559 „	
4826	559 „	
4836	615 „	
4839 [3]	616 „	NR
4840	616 „	
4848	671 „	
4849	671 „	
4854	672 „	
4859	55 (XLIII)	
4866	56 „	
4870	110 „	
4880	166 „	
4889	168 „	
4894	222 „	
4897	223 „	
4898	223 „	
4901	224 „	NR
4909	279 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4913	280 (XLIII)	NR
4914 [4]	501 (XLV)	
4917	334 (XLIII)	
4922 [5]	335 „	NR
4923	335 „	
4928	390 „	207
4929 [6]	390 „	NR
4937	392 „	NR
4938	392 „	NR
4940	446 „	
4944	447 „	
4946	447 „	
4949 [7]	448 „	NR
4953 [8]	614 „	NR
4954	502 „	
4955	503 „	
4958	503 „	
4967	559 „	
4969	559 „	209
4973	560 „	
4974	560 „	
4977	614 „	
4981	615 „	
4984	616 „	
4991 [9]	102 (XLVII)	
4992	671 (XLIII)	181
4993	671 „	44
4995	671 „	
4997	672 „	
5002	54 (XLIV)	
5006	55 „	
5009	55 „	
5010	56 „	
5012	56 „	
5013	56 „	
5016	109 „	
5021	110 „	
5022	111 „	279
5026	112 „	
5027	112 „	
5028	112 „	
5030	166 „	

1) Vezi erata pag. 56, Vol. XLIII.

2) Problema rezolvată la pag. 611, Vol. XLII, este 4787, iar nu 4788. A se rectifica în consecinţă tabla de materii a Vol. XLII şi a volumelor următoare.

3) Vezi erata pag. 672, Vol. XLII.

4) Inlocueşte problema 4914, propusă la pag. 280, Vol. XLIII.

5) A se vedea şi articolul dela pag. 286, Vol. XLII.

6) Numărul problemei rezolvate la pag. 494, Vol. XLVI este 4926, iar nu 4929.

7) A se vedea punctul IV al articolului de la pag. 568, Vol. XLVI.

8) I s'a modificat enunţul dela pag. 502, Vol. XLIII.

9) Inlocueşte problema 4991, propusă la pag. 670, Vol. XLIII. A se vedea şi erata dela pag. 152, Vol. XLVII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5031	166 (XLIV)	
5033	166 „	
5034	167 „	
5037	167 „	NR
5040	168 „	
5043	168 „	NR
5046	222 „	
5051	223 „	
5053	223 „	NR
5059	277 „	
5060	277 „	
5064	278 „	
5068	278 „	
5069	279 „	
5072	280 „	
5073 [1])	280 „	
5074	334 „	
5075 [2])	335 „	
5076	335 „	
5079	335 „	
5082	335 „	
5085	336 „	NR
5086	336 „	
5091	390 „	
5092	390 „	
5093	390 „	
5094	391 „	NR
5106	445 „	409
5110	446 „	210
5111	446 „	
5117	448 „	
5121	501 „	
5123	501 „	
5126	502 „	
5127	502 „	213
5129 [3])	262 (LII)	
5130	503 (XLIV)	
5136	558 „	
5137 [4])	558 „	311 (XLIX)
5138	559 „	
5139	559 „	
5140	559 „	
5144	560 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5145	560 (XLIV)	
5146	560 „	
5158	615 „	
5161	616 „	46
5162 [5])	616 „	
5167	669 „	
5169	670 „	
5170	670 „	
5173	671 „	
5177	672 „	376
5178	672 „	NR
5182	53 (XLV)	
5183	53 „	
5184	54 „	NR
5192	55 „	
5196 [6])	109 „	305
5197 [7])	110 „	
5204	111 „	
5205	111 „	
5206	111 „	
5209	112 „	
5212	166 „	NR
5216	167 „	
5217	167 „	
5220	168 „	NR
5226	221 „	
5230	221 „	NR
5236	223 „	
5245	278 „	
5248	279 „	NR
5250	279 „	
5252	280 „	
5253	280 „	NR
5258	334 „	
5261	334 „	
5262 [8])	334 „	
5272	389 „	
5274	390 „	NR
5284	392 „	NR
5289	446 „	NR
5290	446 „	
5294	447 „	
5295	447 „	NR

1) Vezi erata pag. 448, Vol. XLIV.

2) Vezi erata pag. 392. Vol. XLIV.

3) Inlocueşte enunţul dela pag. 503, Vol. XLIX.

4) I s'a publicat soluţia la pag. 311, Vol. XLIX. A se modifica în consecinţă tabla de materii a Vol. XLIX şi a volumelor următoare.

5) Vezi erata pag. 672, Vol. XLIV.

6) A se vedea Vol. XLIX pag. 701, soluţia problemei 5716 analoagă cu 5196.

7) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.

8) Vezi erata pag. 392, Vol. XLV.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5309	503 (XLV)	
5312	503 „	
5322	558 „	
5324	558 „	
5325	558 „	
5326	558 „	
5327	559 „	
5333	613 „	
5334	614 „	
5335	614 „	
5342	615 „	NR
5343	616 „	
5344	616 „	NR
5349	670 „	NR
5351	670 „	
5354	671 „	
5357	671 „	NR
5358	671 „	
5360	672 „	
5366	54 (XLVI)	
5367	54 „	
5370	55 „	NR
5371	55 „	
5376	56 „	NR
5380 [1])	110 „	
5381 [2])	110 „	
5382	110 „	NR
5383	111 „	NR
5384	111 „	
5388	112 „	NR
5397	166 „	
5405	168 „	NR
5408	221 „	NR
5410	222 „	
5411	222 „	NR
5412	222 „	
5416	223 „	
5419	224 „	
5421	224 „	NR
5422	578 „	NR
5425	278 „	NR
5426 [3])	389 „	
5427	278 „	
5429	279 „	
5430	279 „	
5432	280 „	
5435	280 „	
5440	334 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5441	334 (XLVI)	
5443	335 „	
5448	336 „	
5449	336 „	
5456	390 „	
5458	390 „	
5459	391 „	
5462	391 „	
5465	392 „	
5466	392 „	NR
5467	445 „	
5470	446 „	NR
5472	446 „	NR
5478	447 „	
5479	448 „	NR
5481	448 „	NR
5484	503 „	NR
5485 [4])	503 „	
5487	503 „	
5489	503 „	
5490	503 „	NR
5491	504 „	
5492	504 „	
5493	504 „	
5494	504 „	
5496	504 „	
5497	557 „	NR
5498	557 „	
5500	558 „	
5503	558 „	
5506	559 „	
5508	560 „	
5509	560 „	
5512	614 „	
5513	614 „	NR
5514	615 „	NR
5515	615 „	NR
5516	615 „	NR
5517	615 „	
5520	616 „	
5521 [5])	616 „	
5522	616 „	
5524	616 „	
5525	616 „	
5527	664 „	
5528	669 „	NR
5534	670 „	
5539	671 „	

1) Vezi erata pag. 168, Vol. XLVI.
2) Vezi complectarea enunțului la pag. 248, Vol. XLVII.
3) Inlocuește problema 5426 dela pag. 278, Vol. XLVI.
4) Vezi erata dela pag. 560, Vol. XLVI.
5) A se vedea erata de la pag. 672, Vol. XLVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5542	54 (XLVII)	NR
5545	54 „	
5547	55 „	
5551	55 „	
5558	102 „	
5560	103 „	
5561	103 „	
5563 [1])	103 „	
5564	103 „	
5567	104 „	
5568	104 „	NR
5571	150 „	
5572	151 „	
5574	151 „	
5576	151 „	
5577	152 „	
5578	152 „	
5581	199 „	
5582	199 „	NR
5585	199 „	
5589	200 „	
5591	200 „	47
5593	246 „	
5595	246 „	
5596	247 „	
5597	247 „	
5598	247 „	340
5599	247 „	
5600	247 „	
5601	248 „	
5607	204 „	
5608	294 „	
5609	295 „	
5616	296 „	
5619	342 „	
5621	343 „	
5623	343 „	
5624	343 „	
5625	343 „	
5633	390 „	
5934	390 „	
5635	391 „	
5636	391 „	
5639	392 „	
5643	438 „	
5646	439 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost Propusă	Rezolvată
5647	439 (XLVII)	NR
5649	439 „	
5650	439 „	
5651	440 „	NR
5655	486 „	NR
5658	486 „	
5662	487 „	
5663	488 „	
5664	488 „	
5668	533 „	NR
5670	534 „	
5671	534 „	NR
5672	534 „	NR
5673	534 „	
5674	535 „	
5677 [2])	536 „	
5678	536 „	NR
5680	582 „	
5681	582 „	
5682	582 „	NR
5683	583 „	
5687	583 „	
5690	584 „	NR
5693	46 (XLVIII)	
5696	47 „	
5697	47 „	
5700	48 „	
5704	93 „	
5707	94 „	
5709	94 „	NR
5712	95 „	
5713	96 „	NR
5719	143 „	
5728	190 „	NR
5731	191 „	NR
5733 [3])	191 „	
5734 [4])	191 „	
5735	192 „	
5736 [5])	525 „	NR
5737 [6])	192 „	
5738	192 „	NR
5739	238 „	
5740	238 „	
5742	238 „	NR
5743	238 „	
5744	238 „	

1) Vezi erata pag. 152, Vol. XLVII.
2) Vezi erata dela pag. 584, Vol. XLVII.
3) Vezi erata pag. 240, Vol. XLVIII.
4) Vezi erata pag. 240, Vol. XLVIII.
5) Inlocueşte enunţul dela pag. 192, Vol. XLVIII.
6) Vezi erata dela pag. 288, Vol. XLVIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5745	239 (XLVIII)	
5746	539 „	NR
5748	240 „	NR
5749	240 „	NR
5751	286 „	NR
5752	286 „	
5757	287 „	
5758	287 „	
5759 [1])	288 „	NR
5764	334 „	
5765	334 „	
5766 [2])	335 „	NR
5767	335 „	
5770	335 „	
5771	336 „	
5777	381 „	NR
5779	382 „	
5780	382 „	NR
5782	383 „	
5783	383 „	
5784	384 „	
5787	384 „	NR
5789	430 „	
5792	431 „	
5795	431 „	NR
5799	432 „	NR
5803	478 „	
5805	479 „	
5806	479 „	
5807	479 „	
5808	479 „	
5809	479 „	NR
5813	526 „	
5814	526 „	NR
5816	526 „	NR
5817	526 „	
5818	527 „	NR
5819	527 „	
5820	527 „	NR
5821	528 „	NR
5822	528 „	
5823	528 „	NR
5824	528 „	
5826	575 „	
5829	575 „	NR
5830	575 „	
5834	576 „	
5835	576 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5838	54 (XLIX)	
5839	55 „	485
5841	55 „	
5843	55 „	
5844	56 „	
5845	56 „	
5846	56 „	
5847	56 „	
5848	56 „	178
5850	110 „	
5852	110 „	
5853	110 „	NR
5854	111 „	443
5855	111 „	
5858	112 „	NR
5859	112 „	
5860	198 „	
5861	198 „	
5863	198 „	NR
5864	198 „	
5866	199 „	NR
5867	199 „	
5868	199 „	
5869	199 „	
5871	200 „	492
5873	200 „	
5876	264 „	
5878	265 „	
5880	265 „	
5881	265 „	
5882	266 „	
5883	266 „	
5884	266 „	
5887	267 „	
5889	267 „	
5890	321 „	
5892	322 „	NR
5893 [3])	376 „	281
5895	322 „	
5897	322 „	
5900	323 „	
5901	323 „	NR
5902	324 „	
5903	324 „	
5907	377 „	493
5908	377 „	
5910	377 „	NR
5911	378 „	

1) Vezi erata pag. 384, Vol. XLVIII. Un caz particular este problema 2545 rezolvită la pag. 174 Vol. XLIX.

2) O problemă analoagă este problema 4357, rezolvată la pag. 693, Vol. XLIX.

3) Completează enunțul dela pag. 322, Vol. XLIX.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5914	378 (XLIX)	
5915	379 „	
5918	379 „	
5922	460 „	
5923	461 „	NR
5924	461 „	48
5925	461 „	
5927	462 „	
5928	462 „	
5929	462 „	
5930	463 „	
5932	464 „	NR
5933	464 „	377
5935	533 „	NR
5936	533 „	
5938	534 „	
5939	534 „	
5941	534 „	
5942	534 „	
5943	535 „	
5944	535 „	
5945	535 „	
5946	535 „	NR
5947	535 „	
5948	535 „	
5950	589 „	
5951	589 „	495
5952	590 „	
5953	590 „	
5955	590 „	
5957	590 „	
5958	591 „	
5960	591 „	
5962	591 „	
5963	592 „	NR
5964	592 „	
5966	650 „	
5967	650 „	
5968	650 „	
5969	650 „	
5970	650 „	
5974	651 „	
5975	651 „	
5977	651 „	NR
5978	652 „	NR
5979	652 „	NR
5980	705 „	
5982	706 „	
5983	706 „	281
5984	706 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5985	707 (XLIX)	
5986	707 „	
5988	707 „	
5989	707 „	NR
5990	707 „	
5991	708 „	
5992	708 „	
5994	708 „	NR
5995	762 „	
5996 [1])	762 „	
5997	763 „	
5998	763 „	NR
5999	763 „	
6000	763 „	
6001	764 „	
6003	764 „	NR
6004	764 „	
6005	764 „	
6006	53 (L)	
6007	53 „	
6008	53 „	
6010	54 „	NR
6012	54 „	
6014	55 „	
6016	55 „	
6017	56 „	
6018	56 „	
6021	110 „	153
6022	110 „	NR
6023	110 „	NR
6024	110 „	50
6025	110 „	
6027 [2])	111 „	
6028	111 „	
6030	111 „	
6031	112 „	
6032	112 „	
6033	112 „	
6034	112 „	NR
6035	112 „	310
6036	112 „	
6037	165 „	
6038	165 „	
6039	165 „	
6040	166 „	
6041	166 „	
6042	166 „	
6043	166 „	214
6044	166 „	245
6045	167 „	

1) A se vedea problema analoagă 2865 rezolvată la pag. 392 Vol L.
2) A se vedea Gazeta Matematică pag. 280, Vol. XLVIII şi pag. 70 Vol. LI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6048	167 (L)	
6050	168 „	
6051	205 „	
6052	205 „	
6053	205 „	
6054	205 „	
6055 [1])	238 „	
6056	206 „	
6057 [2])	206 „	
6058	206 „	
6059	206 „	
6061	207 „	
6064	208 „	NR
6065	208 „	
6069	239 „	
6071	239 „	
6072	239 „	
6074	240 „	
6075	270 „	
6076	270 „	
6077	270 „	
6078	270 „	
6080	272 „	
6081	272 „	
6083	272 „	51
6084	303 „	497
6085	303 „	
6088	304 „	314
6091	304 „	
6093	334 „	
6094	334 „	
6095 [3])	335 „	NR
6097	336 „	
6098	336 „	
6099	336 „	
6101	336 „	
6102	366 „	
6103	367 „	NR
6105 [4])	406 „	
6106	367 „	153
6107	368 „	
6108	368 „	NR
6110	368 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6111	368 (L)	
6113	406 „	NR
6114 [5])	302 (LI)	NR
6116	407 (L)	
6118	408 „	NR
6119	408 „	NR
6120	446 „	
6121	446 „	
6123	447 „	
6126	448 „	NR
6127	448 „	NR
6128 [6])	448 „	
6129	487 „	154
6130	487 „	
6131	487 „	
6132	487 „	
6133	488 „	
6134	488 „	
6135	488 „	
6136	488 „	
6138	242 (LI)	NR
6140	243 „	
6141	243 „	
6142	243 „	NR
6143	243 „	
6144	244 „	
6145	244 „	
6146	244 „	
6148 [7])	245 „	215
6149	245 „	
6150	245 „	RN
6152	246 „	
6153	246 „	
6156	247 „	
6158	248 „	
6159 [8])	248 „	444
6160	302 „	
6161	302 „	NR
6162	302 „	155
6163	302 „	
6164	303 „	NR
6165 [9])	342 „	449
6167	303 „	

1) Inlocueşte enunţul dela pag. 205, Vol. L.
2) A se vedea articolul dela pag. 109, Vol. LI.
3) Vezi şi nota matematică dela pag, 313, Vol. LI.
4) Inlocueşte enunţul dela pag. 367, Vol L.
5) Inlocueşte enunţul dela pag. 407 Vol. L.
6) Vezi erata dela pag. 488, Vol. L.
7) Vezi erata dela pag. 303, Vol. LI.
8) Vezi erata dela pag. 624, Vol. LI.
9) Inlocueşte enunţul dela pag. 303, Vol. LI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6168	304 (LI)	412
6169	340 „	NR
6170	343 „	NR
6171	343 „	
6172	343 „	
6173	343 „	
6174	343 „	
6175 [1])	344 „	
6176	344 „	217
6179	375 „	NR
6180	375 „	
6181	375 „	
6182	375 „	
6185	375 „	
6186	376 „	
6188	376 „	
6189	405 „	
6190	405 „	
6191	406 „	
6192	406 „	415
6193	406 „	
6195	406 „	
6196	407 „	NR
6198	409 „	NR
6199	582 „	
6200	582 „	189
6201	582 „	
6202	583 „	
6204	583 „	
6205	583 „	
6207	583 „	
6208	584 „	
6209	584 „	
6211	618 „	
6212	619 „	NR
6213	619 „	
6214	619 „	NR
6215	619 „	
6217	619 „	NR
6218 [2])	620 „	
6220	655 „	NR
6221	655 „	
6222	655 „	418
6223 [3])	814 „	
6224	655 „	NR
6226	656 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6227	656 (LI)	
6228	656 „	
6229	656 „	NR
6230	689 „	
6231	689 „	
6232	690 „	
6233	690 „	
6234	690 „	
6235	690 „	
6236	691 „	
6237	691 „	NR
6239 [4])	692 „	NR
6240	692 „	
6241	692 „	
6242	727 „	NR
6243	727 „	
6244	727 „	
6245	727 „	
6246	727 „	
6247	728 „	
6248	728 „	
6249 [5])	728 „	341
6250	728 „	
6252	759 „	
6253	759 „	
6254	759 „	
6255	759 „	
6256	760 „	NR
6257	760 „	
6258	760 „	378
6259	760 „	NR
6260	814 „	
6261	814 „	NR
6262	814 „	498
6263	814 „	
6264	814 „	
6265	815 „	
6266	815 „	NR
6268	816 „	
6269	816 „	
6271	62 (LII)	
6272	62 „	
6273	63 „	420
6274	63 „	NR
6275	63 „	NR
6276	63 „	NR

1) Vezi erata dela pag. 376, Vol. LI.
2) A se vedea soluția dela pag. 76, Vol. LII.
3) Inlocuește enunțul dela pag. 655, Vol. LI.
4) Vezi erata dela pag. 728, Vol. LI.
5) Vezi erata pag. 816, Vol. LI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6277	64 (LII)	NR
6278 [1])	64 „	
6279	64 „	
6280	102 „	
6281	102 „	
6282	102 „	
6283	103 „	
6284	103 „	
6285	104 „	. . . 283
6286	104 „	
6287	104 „	
6288	104 „	
6289 [2])	134 „	. . 249
6290 [3])	134 „	
6291	134 „	NR
6292 [4])	166 „	
6293	135 „	
6294	135 „	
6295	135 „	
6296	136 „	
6297	137 „	
6298 [5])	262 „	
6299	137 „	NR
6300	166 „	
6301	167 „	NR
6302	167 „	NR
6303	167 „	
6304	167 „	
6305	167 „	
6306	168 „	
6307	168 „	NR
6308	168 „	
6309	168 „	. . . 343
6310	198 „	
6311	198 „	
6312	198 „	. . 251
6313	198 „	NR
6314 [6])	199 „	
6315	199 „	. . . 252
6316	199 „	
6317	200 „	NR
6318	200 „	NR
6319	200 „	
6320	230 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6321	230 (LII)	NR
6322	230 „	NR
6323	231 „	
6324	231 „	
6325 [7])	326 „	
6326	232 „	NR
6327	232 „	. . . 379
6328	232 „	
6329	232 „	NR
6330	232 „	
6331	262 „	. . . 315
6332	262 „	
6333	263 „	NR
6334	263 „	
6335	263 „	
6336	263 „	
6337	264 „	NR
6338	264 „	
6339	264 „	NR
6340	295 „	
6341	295 „	
6342	295 „	NR
6343	295 „	
6344 [8])	295 „	NR
6345	296 „	
6346	296 „	
6347	296 „	
6348	296 „	
6349	296 „	
6350	326 „	
6351	326 „	
6352 [9])	327 „	NR
6353	327 „	
6354	327 „	
6355	327 „	
6356	328 „	
6357	328 „	
6358	328 „	
6359	328 „	. . . 348
6360	358 „	
6361	358 „	
6362	358 „	
6363	358 „	
6364	358 „	

1) Vezi erata dela pag. 168 Vol. LII.
2) Inlocueşte enunţul dela pag. 104, Vol. LII.
3) A se vedea erata dela pag. 232, Vol. LII.
4) Inlocueşte enunţul dela pag. 134, Vol. LII.
5) Inlocueşte enunţul dela pag. 137, Vol. LII.
6) A se vedea erata dela pag. 232, Vol. LII.
7) Inlocueşte enunţul dela pag. 231, Vol. LII.
8) Pentru rezolvare a se vedea articolul dela pag. 393, Vol. LII.
9) A se vedea articolul dela pag. 389 Vol. LIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6365	359 (LII)	
6366	359 „	
6367	360 „	NR
6368	360 „	NR
6369	360 „	
6370	360 „	NR
6371	390 „	
6372	390 „	
6373	390 „	
6374	390 „	NR
6375	391 „	
6376	391 „	
6377	392 „	NR
6378	392 „	
6379	392 „	NR
6380	396 „	
6381	422 „	
6382	422 „	
6383	422 „	NR
6384	422 „	
6385	423 „	
6386	423 „	
6387	424 „	
6388	424 „	
6389	424 „	NR
6390	424 „	NR
6391 [1])	54 (LIII)	NR
6392	54 „	NR
6393	55 „	NR
6394	55 „	
6395	55 „	
6396	55 „	
6397	55 „	NR
6398	56 „	
6399	56 „	
6400	56 „	
6401	157 „	NR
6402	157 „	
6403 [2])	157 „	
6404	158 „	
6405	158 „	
6406	159 „	
6407	159 „	
6408	159 „	NR
6409	160 „	NR
6410	160 „	NR
6411	191 „	451
6412	191 „	
6413	191 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6414	191 (LIII)	NR
6415	191 „	
6416	191 „	
6417	192 „	
6418	192 „	
6419	192 „	
6420	192 „	
6421	222 „	NR
6422	222 „	
6423	222 „	NR
6424	223 „	
6425	223 „	NR
6426 [3])	223 „	
6427	224 „	452
6428	224 „	NR
6429	224 „	
6430	224 „	NR
6431	254 „	460
6432	254 „	NR
6433	254 „	NR
6434	254 „	NR
6435	255 „	NR
6436	255 „	
6437	255 „	NR
6438	256 „	
6439	256 „	NR
6440	256 „	NR
6441	286 „	
6442	286 „	NR
6443	286 „	
6444	286 „	
6445	287 „	
6446	287 „	
6447	287 „	NR
6448	288 „	NR
6449	288 „	NR
6450	288 „	
6451	319 „	NR
6452	319 „	
6453	319 „	
6454	319 „	NR
6455	319 „	
6456	320 „	
6457	320 „	NR
6458 [4])	320 „	
6459	320 „	NR
6460	320 „	NR
6461	350 „	
6462	350 „	NR

1) A se vedea nota 1 dela pag. 32, Vol. LIII.
2) A se vedea erata dela pag. 192, Vol. LIII.
3) A se vedea erata dela pag. 256, Vol. LIII.
4) A se vedea erata dela pag. 352, Vol. LIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6463	350 (LIII)	
6464	351 „	
6465	351 „	NR
6466	351 „	
6467	352 „	NR
6468[1]	352 „	
6469	352 „	
6470	352 „	
6471	382 „	
6472	382 „	
6473	382 „	NR
6474	382 „	NR
6475	383 „	NR
6476	383 „	NR
6477	383 „	NR
6478	384 „	NR
6479	384 „	
6480	384 „	
6481	422 „	NR
6482	423 „	NR
6483	423 „	
6484	423 „	NR
6485	483 „	
6486	483 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6487	483 (LIII)	NR
6488	484 „	NR
6489	484 „	NR
6490	484 „	NR
6491	462 „	NR
6492	463 „	NR
6493	463 „	NR
6494	463 „	NR
6495	463 „	
6496	464 „	NR
6497	464 „	NR
6498	464 „	NR
6499	464 „	
6500	464 „	NR
6501	502 „	NR
6502	502 „	NR
6503	503 „	NR
6504	503 „	NR
6505	503 „	NR
6506	503 „	NR
6507	504 „	NR
6508	504 „	NR
6509	504 „	NR
6510	504 „	NR

I. EXERCIŢII[2])

1. Repartizarea exerciţiilor pe autori

I. A. Barbu 17, 30
C. Berdan 20
C. Boerescu 21
I. A. Cohn 15, 36
I. N. Constantinescu . . . 12, 16
M. R. Constantinescu 19
Virgil Constantinescu 9
D. Crăcea 32
Gh. Th. Goldiş 26
Gh. A. Grigore 22
E. St. Iacob . . . 1, 2, 23, 37
C. Ionescu-Ţiu 5, 24, 28
M. G. Iosifescu 25
Em. Marinescu 10, 31, 35
Al. Gh. Moraite 34
I. I. Novac 14
M. D. Petculescu 29
I. N. Pisanca 11, 13
M. D. Popa 8
Val. M. I. Stanciu 27
T. Stoicescu 3
P. P. Teodorescu . . . 6, 7, 33
I. I. Ţiţeica 18
T. Turculeţ 4
M. F. Văduva 34

1. Repartizarea exerciţiilor pe materii

Aritmetica şi teoria numerelor . . . . . 1(43), 3(156), 9(219), 18(285), 20(317), 25(381).

Algebra . . . . . 2(54), 5(156), 8(190), 11(220), 13(221), 19(286), 21(318), 22(318), 23(318), 24(350), 30(462), 32(500), 37(502).

Geometria . . 4(156), 10(220), 16(253), 28(421), 31(499), 34(500), 35(501).

Trigonometria . 6(156), 7(157), 12(220), 14(221), 17(285), 26(382), 27(382) 29(462), 33(500).

Analiza şi Teoria funcţiunilor . . . . . 15(221), 21(218), 36(501), 38(502).

---

1) A se vedea completarea enunţului la pag. 384, Vol. LIII.

2) Numerele din paranteză indică pagina la care a fost propus exerciţiul al cărui număr precede paranteza).

J. TABLOUL NUMELOR

Abason E., 23, 206.
Abramescu N., 23, 273, 491.
Abramescu N. Victoria 273.
Adam M., 6, 203, 319, 333, 464.
Agârbiceanu I., 6.
Agronomof N., 296.
Alaci V., 6, 140, 173, 336, 438, 492.
Albescu C. N., 6, 485.
Aldea N. N., 6, 485.
Alexandrescu Octav, 6
Alexandri V., 206, 481, 482.
Alexi P. Artenie, 265.
Alexiu I., 6.
Almăjanu P., 6.
Amărăşteanu F. M., 6, 181, 409, 443.
Amohnoaie A. Epifan, 266.
Ampère 35, 36.
Andonie Gh., 6.
Andreescu N. C., 485.
Andreescu N. Longin, 253, 266, 285, 315, 317, 452.
Andrei Şt., 6.
Andronescu Pl. 6.
Angheluţă Th., 5, 6, 179, 215, 252, 306, 363, 491.
Aniţescu N., 6, 303.
Antonescu Filofteia, 6.
Antoniu Corn, 6.
Antoniu S. I., 5, 6, 57, 58, 59, 60, 62, 171, 201, 297, 331, 386, 397, 475.
Apăteanu Camil, 6.
Apolonius, 165, 167, 416, 434.
Arghiriade Em., 6, 175, 336.
Armean Ion, 6.
Armeanca I., 6.
Arvaniti Al., 351.
Asachi G., 103, 240
Atanasescu T., 57.
Atanasiu Marcel, 6.
Athanasiu C. Luciliu, 251, 317.
Aude R. T. H., 205.
August D. N,, 214, 499.
Augustin M., 7.
Avram N. C., 7, 237, 440.
Avramescu A., 7, 386.
Avramescu C., 7.

Bădescu Em., Aurel, 7, 441.
Bădescu A. L., 7, 57.
Bădescu R., 7, 301, 302, 330.
Bădulescu Alexandra, 7, 386.
Bădulescu I. Vasile, 7, 439.
Baidaff Ig. B., 7, 34, 237, 371.
Băghină V. V., 317.
Băiatu D., 7.
Bal A., 332, 452.
Balaban N., 438.
Balaban V., 63.
Bălan G. Şt. 7, 57, 59.
Bălan E., 7.
Balş T., 57.
Banciu I., 232.
Bandinus, 404.
Baran Fr., 7.
Barbaiani A. M., 53, 314, 414.
Barbălat B., 7, 54. 140, 158, 267, 287, 385, 386, 402.
Barbilian D., 7.
Barbu A. I., 219, 251, 255, 285, 462, 493, 495, 498.
Bărbulescu Mihail, 7.
Bărbulescu C. V., 317, 499.
Barisien N. E., 305, 475.
Bârsan Andrei, 265.
Bârzescu C. Al., 53.
Başta Mircea, 53.
Bazacov Gh., 7, 503.
Bedreag C C., 57.
Beiu-Paladi G. E., 442.
Beleş A., 106.
Beleş E. Ion, 7, 106.
Beneş I., 7.
Beneş P., 7.
Bercovici Martin, 7.
Berdan C., 41, 51, 317, 451, 503.
Bernouilli, 437.
Beşchea C., 442.
Beschea I. R., 414.
Bessel, 201.
Bianchi L., 394, 395.
Biluseac Oct., 302.
Binet, 215.
Birănaş T., 317.
Biscovich R., 81.
Bizeţ [1], 94.
Björnson, 80.
Blaga Em., 181.
Blanchard A., 35.
Blezu St., 57.
Bodnărescu M. H., 7, 213.
Boerescu N. C., 53, 192, 216, 219, 318, 341, 342, 378, 414, 420, 499.
Bogdan P. C., 206.
Boiangiu D. D., 7, 45.
Bogdan Gr. I., 181.
Bogza V., 340.
Boldescu P., 408.
Bonin, 482.
Borneanu G., 7, 57, 59, 87.
Bornemişa M., 8.
Boroianu Em., 8.
Boroş Ilie, 441.
Borş C., 8, 205.
Boruvka O., 438.
Botea G. Em., 8, 297, 372.
Botea G. N., 277, 278.
Botez Gustav, 8.
Botez Şt. M., 8, 175.
Bozăceanu I., 264.
Bran Gh., 442.
Brâncoveanu, 332.
Braşoveanu D. G., 53, 315, 493.
Brătianu Ionel, 84.
Bratu D., 302.
Bratu Gh., 23.
Bratu I. Mariana, 5, 8, 386.
Brejcha J., 438.
Brenner N. A., 8.
Brocard, 300, 310, 319, 321, 322, 323, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 416, 467.
Bromwich, 456.
Broşu, D-na, 57.
Broşu, d-l Ing., 57.
Bruckner V., 23.
Bucur A. N., 253, 317.
Bucurescu I. Lt. C-dor, 8.
Budeanu I. C., 5, 8, 386, 502.
Buicliu Gh. G-l, 5, 8, 41, 53, 57, 59, 60, 78, 117,

1) Porecla lui *I. Ionescu*

143, 155, 157, 162, 167, 173, 191, 202, 208, 209, 210, 222, 241, 244, 254, 272, 279, 286, 298, 302, 304, 310, 319, 336, 338, 340, 350, 364, 376, 382, 386, 400, 404, 409, 411, 423, 434, 440, 443, 460, 463, 465, 474, 493, 497, 502.
Bujor M. N., 285.
Bujoreanu N., 8.
Bulgăreanu C., 373.
Bunescu D. A., 5, 8.
Bunescu D. E., 8, 59.
Bunescu Paul, 303.
Bungescu I. G-l, 8.
Bunickij E., 438.
Buradescu T., 8, 59.
Burileanu Şt. G-l., 5, 8.
Burlacu E., 32.
Buşilă Ad., 8, 485.
Buşilă G. I., 23.
Buzincu I. I., 181.
Buznea D. D., 45.

Călinescu Aurelian, 409.
Călinescu Valentin, 8.
Călniceanu Gh., 8, 485.
Călugăreanu G., 301.
Cambureanu V. A., 8.
Cambureanu V. D., 8
Cambureanu V. V., 8, 59.
Câmpan Florica, 35.
Câmpeanu Oct., 8.
Canciu Gh., 8.
Cantemir Antioh, 72.
Cantemir D., 240
Cantuniar I. Cr., 246, 414, 493, 495, 497.
Cantuniar I., 8.
Căpraru C. I., 189, 266.
Capriel I., 8.
Capverde I. Val., 340.
Caracostea D. A., 9.
Caracudovici Florica, 9.
Carafoli E., 9.
Caraman E., 9.
Caranfil G. N., 9.
Cârje I., 497.
Cârlănescu C., 9.
Carmichael D. R., 194, 431.
Carnot Lazare, 35.
Carol I., 85.
Caronnet Th. 372, 388.
Carrier F. J., 403.
Cârstoiu I., 301.
Cartianu Gh., 9.
Cartojan N , 273.
Cassian Gh. G-l, 9.
Castellano E., 403.
Cauchy, 215, 456.
Cavallaro G. V., 403.
Cazacu N. C., 9.
Cazanacli V. P., 9.
Ceauşescu F. V. 9.
Cech E., 175.
Cepleanu M., 179.
Cernescu A. N., 53, 266, 498.
Cernescu A. P., 53, 251, 266, 340, 388, 498.
Cesaro, 455.
Cetăţeanu St., 9.
Ceva J , 136, 342.
Chazy J., 481.
Cheleş E., 9.
Cherţman S. M., 441.
Chiriac C. C., 181, 493.
Chiricescu V., 9.
Chiricuţă A., 9.
Chiţulescu I. I., 5, 9, 57, 386, 402.
Ciobanu Gh., 206.
Ciobanu R., 53.
Cioc I. D., 189, 331, 336.
Cioc M., 9.
Ciocoiu A. Gh. 485.
Ciorânescu I. N., 5, 9, 44, 46, 135, 193, 223, 267, 301, 363, 437.
Ciple Al., 265.
Ciucescu N. P., 253, 285, 316, 452, 493.
Ciucescu I. R. 443.
Ciulonescu I., 9.
Claudian V., 5, 9, 54, 57, 59, 157, 191, 221, 256, 287, 320, 351, 384, 386, 394, 423, 452, 459, 464, 482, 504
Climescu C. Al., 9, 205.
Coatu C., 9.
Coceş Gh., 317.
Cocoş Gh. Gh., 266.
Cohn A. I., 221, 501.
Cojan A., 449.
Cojocaru P. P., 181.
Collas L., 240.
Columbeanu D. P., 53, 217, 315, 317, 414, 420, 493, 495, 497, 499.
Comănescu Gh. Val., 266.
Comberousse Ch., 341, 372, 388.
Combescure, 394.
Comloşan Cornelia, 442.
Comparat P., 438.
Conachi C., 74.
Constantinescu E. Em., 53.
Constantinescu I. Em., 189, 249, 310, 340, 343, 346, 348, 445, 449, 497.
Constantinescu George Ing., 9.
Constantinescu Gh. Prof., 143.
Constantinescu Gh. Gh., 10, 241, 386, 463, 481, 504.
Constantinescu I. Gh., 266.
Constantinescu N. Ilie, 135, 155, 219, 220, 253, 315, 493, 497.
Constantinescu R. M., 49, 51, 53, 155, 189, 219, 246, 251, 285, 286, 314, 316, 317, 341, 343, 414, 417, 451, 493, 495, 497, 499.
Constantinescu N. N., 10.
Constantinescu Paul, 251, 266, 285, 387, 495, 499.
Constantinescu Paulina, 10.
Constantinescu T., 10, 57, 59, 64, 116.
Constantinescu Val., 317.
Constantinescu Vasile, 438.
Constantinescu I. Victor, 10.
Constantinescu G. Virgil, 53, 189, 219, 253, 254, 266, 285, 315, 316, 317, 331, 349, 412, 420, 452, 493, 497, 498, 499.
Constantinescu Z., 10.
Corduneanu C. C., 53, 153, 155, 189, 192, 214, 315, 340, 414, 493, 495, 499.
Cornăţeanu I. A., 181, 442.
Cornea V. Damian, 317.
Coşereanu N. I., 10.
Cosma I. Gh., 317.
Coşniţă C., 295, 342, 384, 440, 482.
Costache Nicolae, 10.
Costăchescu V. C. Lt. C-dor, 5, 10, 256, 377.
Costescu Gh. I., 281.
Costin Miron, 404.
Costinescu D., 10.

Cotariu D. M., 174, 287, 314, 341, 452, 493, 495.
Cotescu C., 181.
Crăcea I. D., 189, 266, 285, 315, 317, 414, 452, 493, 495, 497, 499, 500.
Crăciun V., 10.
Crăciuneanu C. Lt. C-dor, 10.
Crăciunescu Mioara, 10, 57, 59.
Crăsnaru Ioan, 332.
Creangă I., 10, 205, 403.
Cristea D. E., 10.
Cristea G. Em., 178.
Cristescu V., 63, 64, 66, 68, 77, 105, 117, 492, 493.
Cruceru C., 493.
Cucu T., 303.
Culcer I., 105.
Curchi I., 278.
Curea I., 302.
Cursaru C. R., 317.

Dabija A. Fl., 266.
D'Alembert, 250, 445.
Damian N. Şt., 246.
Dănciulescu Gr. V., 241.
Darboux G., 404.
Darvaris G. Br. 122.
Darvaris C., 122.
Darvaris Iosif, 122.
Dăscălescu Hr. 10.
Dăscălescu I. Vlad-Mihai, 317.
D'Aubry de Puymonin R., 438.
Deaux R., 206.
Delorme S., 437.
Demetrescu G., 440.
Desargues, 136.
Diaconescu V. C. G-l, 10.
Diaconescu D. I., 10, 493.
Diaconescu N., 36.
Diaconu C. C., 53, 315, 382, 493, 495, 497, 499.
Diaconu G. V., 53, 285, 495, 499.
Diamandescu N., 122.
Didenco N. Teodora, 265.
Dimitriu I. C. Călin, 181, 244, 443.
Dimitriu Tigran, 189, 493.
Dinescu P. Al., 10.
Dinescu Maria, 10.
Diofante, 264.
Dobrescu D. Andrei 10, 283, 352, 415, 417.
Dobrescu D. Paul, 10, 441.
Dodic A. E., 317.
Dodu A. E., 285, 381, 452.
Donciu T. N., 10.
Doneaud E. André, 189, 285, 414, 499.
Drăgan N., 265.
Drăganu Mircea, 374.
Drăghicescu Elena, 493.
Drăghicescu P. P., 44, 47, 51, 172, 181, 186, 213, 222, 241, 297, 341, 409, 411, 440, 493, 495.
Dragomir I. Dan, 266.
Dragomir N. I., 10.
Dragomirescu-Buzne Ed., 10, 32, 57.
Dragu T., 39.
Drăgulănescu Aurel, 303.
Drăgulănescu D., 439.
Drăniceanu Eugenia, 11.
Driault E., 240.
Drosescu Gh. I., 11.
Duca Gh., 94, 103.
Duhamel, 453, 454.
Dumitraşcu N. R., 485.
Dumitrescu D. Arghir, 11.
Dumitrescu I. Gh., 11, 340.
Dumitrescu C. I., 11.
Dumitrescu C. I. Călin. 340.
Dumitrescu Matei, 57.
Dumitrescu N., 11.
Dumitrescu I. Teodor, 11, 57.
Dupuis J., 298.

Ecochard F., 438.
Eftimie D. C., 45.
Eftode M. Ad., 189, 246.
Eliad Ioan, 332.
Elznic V., 175.
Emanuel David, 93, 264.
Eminescu M., 74.
Enăchescu V. T., 53.
Enescu G. Georgə, 53, 137, 155, 214, 251, 253, 273, 315, 317, 341, 372, 442, 452, 493, 498.
Enulescu O., 47.
Epuran A. I., 485.
Estrada Al. de, 336.
Euclide, 303.
Euler, 136, 145, 147, 213, 259, 261, 319, 338, 352, 424.
Eustaţie, Logofătul, 136.

F. G. M. (Frère Gabriel Marie), 220, 269, 290, 293, 398, 405.
Făcăoaru Gh. I., 266, 388.
Fânaru N. D., 317.
Fanciotti S. Gh., 53.
Felix C. G-l, 11.
Fermat, 72, 136.
Feuerbach, 136.
Filimon Fl. I., 317.
Filipescu E. Gh., 67, 97, 114.
Firescu Gr. Şt., 216, 285, 499.
Flexi Cusută Sofia, 11.
Flondor I. I., 266.
Florea Inocenţiu, 11.
Florescu B. I., 38, 41, 54, 139, 144, 204, 233, 234, 300, 386, 399, 422.
Florescu M. U., 11, 386, 405, 409, 462.
Florescu L. V., 45, 181, 375, 442.
Florian M., 440.
Florian Z., 23.
Focşa Vladimir, 11.
Focşeneanu I. M. Lt. Col., 5, 11, 57, 59, 109, 320, 424, 485, 491.
Fornet A., 326.
Frâncu D., 11.
Fuerea C., 11.
Fundăţeanu C. I., 23.
Furtunescu Dorin, 493, 495.
Furtunescu M. V., 265.

Gabis G., 201.
Gabrielescu R., 11, 57.
Gafencu Rodica, 11.
Găină Gh., 11.
Gaiu Gh. N., 11, 350, 464.
Galbură Gh., 11, 387.
Gâlcă I. T., 11.
Galea N., 53.
Galerkin, 336.
Gall St. Tr., 11.
Gans R., 336.
Gauss, 206, 239.
Gelles E., 371.
Georgescu Calipso, 11.
Georgescu Const., 11.
Georgescu I. N., 11, 386.
Georgescu N. N., 12.
Georgescu Răducanu, 350.
Georgescu-Delafrass, 439.

Georgescu-Roegen N., 5, 12, 33, 54, 57, 59, 113, 157, 222, 235, 236, 241, 254, 277, 298, 319, 338, 363, 383,
Georgescu Otilia Roegen, 12, 59.
Gereanu Ana, 12.
Gergonne, 293.
Germani Dionisie, 12.
Ghenea Al., 12.
Gheorghieş Al. G-l, 12.
Gheorghiţă I. St., 414.
Gheorghiu C. Ad., 5, 12, 377, 386.
Gheorghiu Al., 12.
Gheorghiu Gh. Cpt., 32.
Gheorghiu Th. Gh., 5, 12, 34, 38, 140, 175, 190, 207, 278, 403.
Gheorghiu S. I., 12.
Gheorghiu A. Mircea, 23.
Gheorghiu E. Oct., 341, 375.
Gheorghiu A. Şerb., 5, 12, 171, 173, 178, 186, 210, 215, 269, 297, 301, 319, 352, 367, 383, 433, 479.
Gheorghiu A. Vasile, 317.
Gheorghiu V. V., 266.
Ghermănescu M., 12, 162, 173, 281, 282, 286, 302, 305, 348, 349, 352, 365, 366, 367, 368, 423, 433, 436, 495, 496.
Ghica P. Horia, 12.
Ghica Al., 12, 440.
Ghica Ion, 482.
Ghimuş D. A. Col., 12.
Ghiocel V.. 12.
Ghiolu D. Stavri, 305.
Ghircoiaşu V. N., 12, 255, 302.
Ghişoiu I. P., 12, 241.
Ghiţescu A. M., 341.
Ghiţescu Sp , 12.
Ghiţescu V., 12, 158, 334, 386, 476.
Giurcă V. Fl., 266.
Giurescu C. C., 404.
Giurgiuman Tr., 302.
Gligor N. I., 215, 493.
Gliozzi M., 437.
Gloden A., 202, 403.
Gogu C., 64, 264.
Goldiş Th. Gh., 382.
Goldschmid E., 438.
Goormaghtigh R., 210.
Gradîn N., 303.
Grapini E., 60, 116.
Greenberg J. H., 403.
Grigore A., Gh., 49, 51, 53, 155, 214, 251, 318, 414, 493, 495.
Grigorescu C., 12.
Grigorescu Vintilă, 181.
Grosu Ion, 12.
Grumăzescu M. Cpt., 314, 331, 409.
Grünbaum M., 278.
Gugui C. D., 265.
Gurrea S. A., 403.
Guţu I. I., 13.

Hadwiger H., 205.
Haimovici Ad., 205.
Haimovici M. 205.
Haltmayer O., 326.
Hamburger L., 206, 277.
Hammer I. de, 240.
Hâncu M., 13.
Hangan D. M., 13, 59.
Hangan M. Sanda, 189, 494.
Hangan M. Th., 266, 285, 389, 498.
Haret Sp. R., 315, 414, 499.
Haret Spiru, 68.
Haret C. Spiru, 13.
Haret G. Spiru, 264.
Harghel E. I., 53, 246, 315.
Hartman S. 371.
Haşdeu P. B., 137.
Havlicek H., 438.
Helbert, 240.
Henselin A., 372, 387.
Herovanu Mircea, 371.
Hitzig I., 160, 288, 464.
Hopital, 175, 364, 365, 366, 367, 368, 434, 435, 436, 479.
Hogea Gr. Gr., 266.
Hostinsky B., 438.
Huideş V. Al., 53.
Hulubei Horia, 371.
Humbert P., 437.
Hyska A., 438.

Iacob Caius, 13, 35, 302, 371.
Iacob St. E., Lt. Col., 5, 13, 53, 54, 175, 201, 206, 240, 279, 318, 332, 336, 439.
Iacovache Aurelian, 13.
Iacovache Dora, 57, 59, 303.
Ianculescu S. O., 179, 443.
Ieşan Al., 53, 495.
Ievlevicz Ig., 273.
Ignaţiu Tr., 442.
Ilie A. Ion, 181, 209, 440.
Iliescu C. C., 340, 493.
Iliescu Gh., 5, 13.
Ioachimescu Gh. A., 23, 66, 67, 68, 77, 107, 297, 302, 372, 387, 388.
Ioachimescu A, Gh., 13.
Ioan Ana, 5, 13, 57, 59, 386.
Ioan Z. Gh., 13.
Ioaniţescu, Ing. 57.
Ioanovici A., 13.
Ionescu Al. Avocat, 57, 59, 64, 68, 83, 106, 125, 126.
Ionescu Z. Al., 13.
Ionescu Aurel, 371.
Ionescu A. Doru, 442.
Ionescu D-tru, 125.
Ionescu V. D., 5, 13, 37, 302
Ionescu V Fl., 13.
Ionescu Gh. Ing., 13.
Ionescu I. Gh., 13.
Ionescu P. H., 13, 440.
Ionescu Ion, 23, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76 77, 78, 79, 80, 82, 83, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93. 94, 99, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 122, 126, 140, 141, 142, 144, 147, 153, 154, 208, 298, 330, 387, 388, 389, 406, 409, 434.
Ionescu C. Ion, 13.
Ionescu St. Ion, 386, 404.
Ionescu N. Mihail, 13.
Ionescu Mircea, 325, 328, 485.
Ionescu F. P., 493, 497.
Ionescu Nicolae, 122.
Ionescu I. Paul, 13, 386.
Ionescu Tib., 13, 140, 237,
Ionescu Teodor, 13, 371.
Ionescu I. V., 485.
Ionescu M. Valentin, 266.
Ionescu Viorica, 386, 404.
Ionescu-Bujor C., 5, 13, 140, 158, 215, 237, 386, 485, 495, 497, 502.

Ionescu-Bujor C. Claudiu, 266, 317, 389, 452.
Ionescu-Bujor Th., 386, 385, 495, 497, 502.
Ionescu-Ţiu D. C., 5, 13, 55, 57, 156, 189, 190, 223, 350, 386, 401, 421, 463.
Ionescu-Zane D. Gh., 14.
Iordăchescu Gr., 124.
Iorga N., 332, 336.
Iosifescu G M., 53, 214, 285, 304, 315, 341, 381, 495.
Iovănescu D., 241.
Istodor C. Valentin, 266.
Istrati C. Dr., 80.
Istrati C. E., 405.
Ivancea I. M., 14.

Jareghie V. I,, 45.
Jarni K V., 371.
Jipa C. A., 340.
Jordan C., 237.

Kahane Arno, 404, 439.
Kampé de Fériet J., 404.
Kampen R. E. van, 175.
Kassel, 302.
Katetov M., 175, 438.
Kaufman N., 14.
Kaufmann S., 373.
Kazda J., 438.
Kiepert, 295.
Kinsky I., 219, 314, 348.
Klein F., 197.
Knopp, 456.
Kraïtchik M., 143.
Kruan Fr., 438
Kronecker, 237.

Lalan V., 403.
Lalane L., 103.
Lalescu Tr., 67, 76, 337, 372, 388.
Lamla M., 35.
Lafourcière J., 438.
Laignel, 438.
Lascaridis A., 14, 54.
Laurent, 194.
Lavastine, 438.
Lazăr C., 305.
Lazăr Gh., 81, 103.
Lazarini, 81.
Lazu C., 14.
Legendre M. A., 225, 232.
Leffler Mittag, 201.
Leibnitz W. G., 201.
Leibovitz Ş., 304.
Lemoine E., 331, 353, 354, 356, 357, 358, 360, 416.
Leon Al. M., 53, 153, 485, 489, 493, 495.
Leonida D., 14.
Leoveanu Const., 14.
Lie Sophus, 197.
Lin C. C., 403.
Linteş G. I. C-dor, 23, 50, 135, 187, 189, 230, 343, 348.
Liteanu I. Gh. G-l, 5, 14, 57, 140, 217, 219, 239, 386, 397.
Livada F. G., 14.
Lombardi P. J., 336.
Longchamps G. de, 320.
Loria Gino, 465.
Lovin C. M., 266.
Lucas Ed., 129, 130.
Lucas François, 293, 294, 300, 301.
Luculescu C., 14.
Luisoni J. C., 336.
Lumânarę V. Fl., 265.
Lupaşcu I. Em, 266.

Maclaurin, 201.
Macovei Ioan, 14.
Magmutenca D-na, 386.
Magmutenca M. Gabriela, D ra, 266.
Maieru N., 265.
Măinescu Ion, 332.
Mălai I. 265.
Malaxa C. Elena, 14.
Malaxa N., 14.
Malcoci C., 14.
Mamut P., 442.
Manafu V., 14.
Măncescu N. I., 251, 266, 285. 315 388.
Manciu Corneliu, 14.
Manea Gh., 14.
Mănescu C., 90.
Mănescu N. I., 253.
Mangéron I. D., 5, 14, 201, 205, 302.
Manheim A., 140.
Maniţiu Emilian, 14.
Manoilescu M. 14
Manolescu V. G., 216, 498.
Mântulescu, Preot, 56, 139.
Manu I., 14
Mărăcine B., 14.
Marcovici E., 442.
Marcu D. V., 14, 305.
Mărculescu Origen, 209, 213.
Marcus F., 397, 403.
Mărdărescu Vl., 14.
Mareş Em., 485.
Mareş T., 14.
Margulius M, 278, 441.
Marian V., 5, 14, 67, 264, 303.
Marinescu S. D., 15.
Marinescu E. Em., 44, 191, 213, 220, 296, 297, 300, 400, 417, 420, 493, 499, 501.
Marinescu C. Marinel, 315, 493.
Marinescu P., 59.
Marinescu Stelian, 493, 495.
Marteş Gr., 213.
Mason, 194.
Mateescu Cr., 15, 426.
Mateescu Dan, 15.
Mateescu I. Ion, 15.
Mătieş V. I., 15, 265, 278, 279, 460.
Mavrodin D. D., 15.
Mehedincu V., 15, 30.
Mehler G. F., 404.
Menelaus, 136, 207.
Mereuţă M. E., 15, 386, 485.
Mereuţă V., 15.
Meriu C. Gh., 266.
Michel Ch., 388.
Miclescu A. Lt. Col., 15.
Miclescu Ion, 15.
Mieli A., 338.
Mihăiescu S. Şt., 15.
Mihăilă N., 15.
Mihăileauu N. N., 5, 15, 57, 161, 200, 206, 224, 237, 278, 305, 320, 341, 371, 378, 387, 388, 389, 423, 433, 482, 485, 499, 504.
Mihalache G. C., 50, 246.
Mihălcioiu S. M., 53, 251, 315.
Mihalopol C., 15.
Mihoc Gh., 5, 15.
Mihu C., 15, 234, 386, 418, 420.
Milescu N. Cârnul, 336, 372.
Minculescu Al., 315, 495, 497.

Minea V. Aldea, 340.
Minoiu Ioan, 15.
Miquel, 136.
Mircea M. E., 15.
Mirescu P., 15, 386.
Miron C. Em., 404.
Mişicu V. M., 412.
Mitescu C., 373.
Mititelu C. Cl., 16.
Mititelu C. I., 16.
Miu M. I., 16, 241.
Modâlcă S. Em., 16.
Moessner A., 137.
Mohş K., 326, 327, 329.
Moisil Ana, 16.
Moisil Gr., 440.
Moivre, 136.
Moisiliu C., 265.
Moldovanu A. Corneliu, 265.
Monge G., 35, 201, 352 371.
Monteiro C. A., 438.
Moraite Gh. Al., 155, 191, 251, 253, 317, 414, 420, 424, 493, 499, 500.
Moroianu D. Aurel, 317.
Moroiu, 332.
Morţun Gh. Em., 16. 288, 379, 381.
Movilă Petru, 273.
Munteanu T. I., 53, 153, 189, 214, 251, 266, 285, 315, 317, 387, 414, 493, 495, 499.
Munteanu Gh. Lucian, 495.
Munteanu Oct., 205.
Murăroiu I., 278.
Murgeanu Gh., 59.
Musceleanu Ileana, 442.
Mustăcescu V.Tr., 246 ,493·

Năcescu Dan, 16.
Nagel, 293.
Nanul A. St., 499.
Năstase C. Maria-Adriana, 265, 386, 387, 388.
Năstase Cornelia, 302.
Neacşu Gr. I., 266, 389.
Neamţu P., 16.
Neculce E., 16, 440.
Nedelcu Fl., 16, 59, 160, 382.
Nedelcu F. Mariana, 316, 317.
Nedelcu V. Marin, 484.
Negoescu N., 205.
Negrea A. M., 37, 244, 340, 441.
Negulescu I., 53, 497.
Negură G. Şt., 16.
Neguţ A. I., 266.
Neicu M., 16.
Nestor G. D., 16.
Neuberg J., 254, 300.
Neuman Maria, 203, 371.
Newton, 178, 489.
Nichifor A. G., 23.
Nicolae M. G., 49, 189, 495
Nicolae Şt., 57.
Nicolau Al., 16.
Nicolau H. C., 16.
Nicolau T. M., 16, 484.
Nicolescu C. Mircea, 265.
Nicolescu Miron, 5, 16, 440.
Nicolescu I. R., 16.
Nicu August, 214.
Nicolescu I. Al., 53.
Nicolescu V. Al, 16, 369, 370, 386.
Niculescu Const., 16.
Niculescu Cr., 57, 59, 83.
Niculescu V. Gh., 272.
Niewenglowski B., 372,387, 434.
Nikusios P., 336.
Nosurzewska M., 371.
Novac I. I., 216, 221, 285, 317, 343, 412, 421, 499.
Novacu Val., 16.
Novak J., 175.

Olteanu N. Gh., 266.
Onicescu O., 5, 16, 59, 82, 387, 440.
Oniga Gh. Th., 16.
Orănescu O., 16, 42, 286.
Orăşanu D. C., 5, 17, 425, 426.
Orăşeanu Gr., 17, 274.
Otzet Martorell R., 403.

Pachta Z., 438.
Păläceanu D. V., 49, 53, 154, 219, 246, 341, 493, 495, 497.
Paladi Teodor, 332.
Palama G., 403.
Panaite N. Th., 17.
Panaitescu Ing., 57.
Pancu Const., 332.
Pandeli Ioan, 332.
Pantazi Al., 5, 17, 59, 200, 373, 386, 437, 439, 440, 444.
Pantazopol C. St., 498, 499.
Pantea N. Al., 155, 266, 414, 495, 497.
Pantelimon V. C., 444, 493.
Panţu I., 241.
Papelier G., 416.
Părăianu C., 105.
Parepeanu C. I., 340, 485.
Pârvu A., 17.
Pârvănescu C., 57,
Pârvănescu St., 241.
Păsărică Fl., 17.
Pascal, 136, 343.
Pascanu I. I., 340.
Pătrăscioiu M., 493, 495.
Patraşcu A. Gh., 17.
Pătroianu Mihail, 17.
Păunescu St. Gh., 266, 452, 493.
Pavel Dorin, 17.
Pearson K., 236.
Pelsener J., 437.
Perek L., 438.
Perieţeanu D., 305.
Perlea G. Dan, 17.
Perott G., 129, 133.
Perrault P., 437.
Persu Aurel, 17.
Petcu A. Valeriu, 214, 251, 285, 315, 317, 382, 408, 414, 452, 493, 495, 498, 499.
Petculescu D. M., 53, 314, 340, 414, 462, 493.
Petre I. Gh., 266.
Petrescu V. Achile, 313.
Petrescu Benone, 443.
Petrescu S. Gh., 17.
Petrescu Iulian, 17.
Petrescu P. Lt. Col., 17.
Petrescu St., 403.
Petrovitch M,, 45, 46.
Petrulian N., 57, 331.
Pic G., 301.
Picard, 442.
Philipide M., 17.
Pipoş P., 264.
Pirko Z., 436.
Pisanca M. I., 220, 221, 303.
Piska R, 438.
Pitagora, 427, 428, 431.
Pocapski Sofronie, 273.
Poczaczi S., 372
Poenaru P., 81, 103.
Pompeiu D., 59, 140, 443, 481.
Poncelet, 211.

Pop Al., 17, 386.
Popa N. Aurel, 213, 241.
Popa Ilie, 205, 485.
Popa I. Marin, 17.
Popa D. Mircea, 36, 45, 47, 54, 54, 160, 186, 190, 208, 210, 213, 246, 279, 285, 315, 340, 342, 343, 377, 378, 384, 414, 417, 421, 424, 451, 493, 495, 496, 497.
Popa I. Mircea, 442.
Popescu A., 305.
Popescu Barbu, 493, 495, 497.
Popescu N. Corneliu, 17.
Popescu I. G. G-l, 261, 423.
Popescu L. Ilie, 285, 499.
Popescu M. I., Lt.-Col., 17, 214.
Popescu Gh. Marin, 340.
Popescu Ovidiu, 17.
Popescu Simion, 325, 328.
Popescu A. Stelian, 53, 497.
Popescu M. Stelian, 493, 497.
Popescu A. Victor, 17.
Popescu-Botoşani Gh., 17.
Popescu-Zorica Al., 340, 442.
Popovici C. C., 18.
Popovici C. Gh. Const., 18.
Popoviciu I. Gavrilă, 18, 443.
Popoviciu Tib., 5, 18.
Popp Alex., 18.
Popp N. C-dor, 18.
Popp I., Tr., 18, 386.
Porto B. G., 437.
Portocală M., 18, 372.
Postelnicescu Mircea, 18.
Poteca Eufrosin, 332.
Potopeanu Gh. G-l, 18.
Poulet P., 172.
Praporgescu N., 18.
Precup E., 265.
Predoescu M. Tr., 18.
Pretorian E., 105.
Prisecaru M., 493.
Proca A., 405.
Profiri N., 18, 371.
Protopopescu A. Dan, 442.
Protopopescu Gr. G-l, 18.
Ptolomeu, 136.
Puşcariu Sextil, 273.
Puşcaşu M. Silviu, 189, 219, 317.
Puţureanu M. I., 253, 317.

Raabe, 453, 454.
Racliş N. R., 440.
Racoviţă Em., 481.
Radu Elie, 93.
Rădulescu Eliade Ion, 81, 82, 103.
Rădulescu Marcel, 18.
Rădulescu Vlad, 18, 59.
Rădulescu Pogoneanu Elena, 482.
Răutu C. Titus, 497.
Ralet D. Francesco, 189.
Reidert E., 440.
Reiner G., 404.
Reischer L. H., 442.
Reparaz G. de, 438.
Reuter F., 403.
Revici T., 18.
Richards P., 403.
Riemann, 132.
Riesz Marcel, 371.
Ripianu D., 45, 47, 213, 376.
Ristea Gh. Gh., 253, 266, 316, 389.
Rizescu T. Gh., 18.
Rizescu T. Ion, 18.
Roban Vintilă, 18.
Roco M., 63.
Rogoz V. I., 494, 497.
Rohr I. A., 213.
Roibănescu C., 178.
Rolle, 485, 486.
Romanescu M., 305.
Roşca I., [1]) 161.
Roşculeţ V. Al., 241.
Roşculeţ N. M., 443.
Rosetti Nicolae, 332.
Rosetti Scarlat 332.
Rossiev P., 437.
Roşu A., 168, 482.
Roşu Al. A., 18, 57, 178, 179, 331, 338, 372, 374, 386, 440, 442.
Roşu D. C., 485.
Roşu V. C., 53, 214, 315, 414, 493, 495.
Roşu V., 18.
Rotaru C. N., 405.
Rouché E., 341, 372, 388.
Rusciov Ştefana, 205.
Ruzvan I. T., 18.

Sabac Gh. I., 179.
Sager N. I., 441.
Şaichin O. Ad., 45, 443.
Sălăgeanu A., 19.
Salem S., 371.
Saligny A., 66, 67, 85, 90, 91, 93, 112, 121, 123.
Saligny M., 19.
Şandru I. V., 499.
Sanielevici Al., 371.
Sapatino Const., 19.
Săpunaru S. Gh., 19.
Sarian M., 19, 191, 451.
Sarpi P., 437.
Saur I., 19.
Săvescu Ioan, 19.
Săvescu A. M., 53, 219, 414, 497.
Savin C. I., Cpt., 19.
Schilleru-Dili C. I., 19, 207.
Schileru Gr., 19.
Schlömiuk H. Norbert, 266.
Schrön L., 372, 387.
Schwartz St., 237.
Şcodrano Al., 19, 159, 320, 380, 474.
Segal J., 441.
Segal Z., 315.
Seni Cl., 341.
Seni Dinu, 414.
Seni Valeriu, 265.
Şerban C. S-Lt., 414, 499.
Şerban Emil, 303.
Şerbănescu Floricel, 19.
Şerbănescu Gh. V., 19, 159, 319.
Sergescu B., 23.
Sergescu P., 5, 19, 35, 171, 201, 273, 302, 303, 304, 370, 371, 372, 404.
Serret A. J., 474.
Sfinţescu I. C., 19.
Shaw S. F., 403.
Sierpinski W., 371.
Silaş Gh., 434.
Silişteanu D. Dan, 53, 497.
Simionescu G. D., 5, 19, 48, 140, 222, 237, 245, 246, 247, 349, 376, 437, 464.
Simionescu Mircea, 19.
Simson, 136, 261, 417.
Sintescu M., 497.

1) Acelaşi cu *Stamatescu I.*

Sirinian Mendrey, 19.
Şleahtenea D., 19.
Smântânescu A., 20.
Soare V. M., 52, 54, 255, 317, 331, 341, 379, 381, 451, 481, 489, 495, 496, 497, 504.
Soliman II, 240.
Sonnereich Dora, 241.
Sora[1]), 125.
Sorobetea A., 265.
Şotropa V., 265.
Şova C. I., 20, 375.
Spiess O., 437.
Srb J., 237.
Stamate I. I., 5, 20, 45, 302, 503.
Stamatescu I., 20, 161.
Stamatescu I. G., 20.
Stamatescu V., 59.
Stan I. Aurelian, 5, 20, 32, 54, 352, 369, 370, 386, 449, 451, 463.
Stan A. D., 5, 20, 32, 57, 59, 103, 331, 336, 386, 440.
Stan V. Ilie, 20.
Stăncescu N. Virgiliu, 53, 315.
Stanciu C., 493, 495.
Stanciu P., 493.
Stanciu I. Valeriu, 53, 179, 189, 256, 382, 420.
Stancu S. Mircea, 20.
Stănculescu I. I., 20.
Stănciulescu M. Ovidiu, 303.
Stănculescu Rociu Margareta, 20.
Stănculescu Romaşcan Georgeta, 20.
Stănescu D., 452.
Stăneseu Virgil, 499,
Ştefan Gh., 273.
Ştefănescu S. C., 338.
Ştefănescu E., 338.
Ştefănescu D. N. Lt., 20, 210, 441, 443.
Ştefanescu I. Sofronie, 189, 266, 317, 459, 495.
Şteiner, 289, 290, 294, 295, 296, 300, 301, 320, 342, 400.
Steinhaus H., 371.
Stoenescu I. Al., 5, 20, 59, 140, 141, 147, 175, 179, 189, 224, 249, 251, 310, 314, 348, 371, 375, 386, 387, 388, 389, 445, 449, 475, 481.
Stoian I. D-tru, 285.
Stoica D. Al., 20.
Stoica V. D., 5, 20, 210, 246, 249, 286, 331, 386, 401.
Stoicescu T. Teodor, 23, 156.
Stoika V. V., 20.
Stoilov S., 20, 302.
Stratilescu Gr. I., 20, 59.
Streder I., 443.
Stuparu Const., 20.
Sturla A., 336.
Sturm, 45.
Sturza C., 105.
Sulica A. A., 266, 388.
Surdu I. M., 438.
Suta I. M., 266.
Svetencu Oreste, 20.
Sylvester, 179.
Synge L. J., 403.
Syptak M., 438.

Tănăsescu M. Ar. G-l, 20.
Tănăsescu S. C., 53, 343, 417, 498
Tănăsescu A. T., 20.
Tanco I., 262.
Tanco P., 262, 263, 264, 265.
Tanco Teofil, 263, 265.
Tânjală Em., 442.
Tannery J., 365, 435.
Tarry, 359.
Taton R., 370.
Tauber Al., 303, 440.
Taucer, 440.
Taylor, 358, 420.
Telniceanu N. Aurel, 53, 497.
Teodor Şerban, 21.
Teodoreanu V., 20.
Teodorescu C. C. elev, 497.
Teodorescu C. C. Ing., 5, 21, 57, 59, 115, 331, 386.
Teodorescu N. Dorin, 341.
Teodorescu D. Ioana, 21.
Teodorescu St. I, 21.
Teodorescu St. I., Ploeşti, 142, 152, 189, 224, 484.
Teodorescu N. Prof., 371.
Teodorescu V. N., 23.
Teodorescu P. P., 44, 53, 57, 128, 153, 154, 155, 156, 157, 173, 189, 214, 219, 251, 253, 256, 266, 298, 305, 314, 317, 330, 331, 336, 343, 351, 372, 378, 387, 397, 404, 414, 423, 444, 452, 482, 489, 493, 495, 496, 497, 499, 500.
Teodoriu L., 373.
Terquem, 336.
Thabit Ben Korrah, 298, 299.
Thibaud J., 438.
Thébault V., 34, 181, 305, 307, 324, 362.
Theodorescu N. Dorin, 440.
Theodoru H., 21.
Thierrin H. G, 21.
Tibăr A., 339.
Tilică C. Şt. 21, 416, 443.
Timotin A. A., 53, 377, 495, 497.
Tincu C. C., 315, 493, 495.
Ţino N. O., 5, 21, 162, 173, 386, 389, 496.
Ţintea M. I., 21.
Ţiţeica Gabriela, 5, 21, 47, 48, 57, 59, 387, 389, 475.
Ţiţeica George, 66, 67, 68, 79, 80, 117, 176, 202, 302, 416.
Ţiţeica I. I., 285.
Ţiţeica G. Radu, 21, 371, 386.
Ţiţeica Şerban, 5, 51, 171, 371.
Tofan C. A., 53.
Togânel G, 21.
Tomescu Daniil, 332.
Tomescu Şt. I., 21.
Tomescu G. Mircea, 266.
Topalescu G., 442.
Toporescu E., 59.
Trestianu N Savu, 340.
Truell R., 403.
Trufin Tr., 442.
Tucker, 358.
Tudor C. Em., 266, 388.
Tudoran M., 21.
Tudoran Sonia, 442.

1) Mătuşa lui *I. Ionescu.*

Tuhai N., 178.
Tullea C. Gh., 21.
Turculeţ Tiberiu, 156, 340.
Tutunaru D., 21.

Udrea C. I., 50, 189, 420.
Ulescu A., 21.
Urban A., 438.

Vacca G., 437.
Văduva Fl. M., 179, 493, 495, 502.
Vâlcovici V., 5, 21, 67, 196, 223, 302, 368, 371, 404, 439, 482.
Valiron G., 267, 336.
Vandermonde, 241.
Vardala I., 22, 117.
Vargă I. A., 53, 192, 217, 246, 285, 314, 315, 375, 381, 414, 459, 484, 489.
Varlam P., 22.
Vârnav Sc., 105.
Vârzaru I. Em., 317.
Vasilache I., 22.
Vasile Lupu, Domnitor, 273, 336, 372, 404.
Vasilescu August, 277.
Vasilescu C. Gr., 57.
Vasilescu C. I., 22.
Vasilescu P. I., 341.
Vasilescu I. T., 22.
Vasilescu-Karpen N., 59, 78, 288.
Vasilescu-Stabu A. M., 22, 340, 442, 493.
Vasiliu M. Const., 22.
Vasiliu E. Dan, 223, 253, 317, 493, 499.
Vasiliu G. Dan, 22.
Vasiliu C. E., 22.
Vasiliu M. Florin, 266.
Vasiliu D. Gh., 22, 278, 279.
Vasiliu C. I., 22, 46, 47, 213, 214, 278, 386, 398, 405, 443, 444.
Vasiliu Mihai, 22.
Vasiliu Mircea, 22.
Vasiliu M. M., 315.
Vasiliu-Năsturel P., 105.
Vasu Vasile, 22.
Vatopedi Benedict, de la, 336.
Vavrinec J., 438.
Velea M., 485.
Vernescu P., 57.
Vescan T. T., 5, 22, 239, 301.
Viciu A. A., 22.
Vişa E., 22, 206, 237, 349.
Vişian G. A., 499.
Vlad M., 315.
Vlasie M. Gh., 497.
Voinea D. Mircea, 285.
Voinea P. R., 22, 60, 341, 375.
Vrânceanu G. Prof., 371, 387, 439, 440.
Vrânceanu Gh. Gh., 45, 315, 339, 493, 497.

Waelsch, 403.
Walter J. E., 437.
Wegener N. E., 45, 173, 192, 246, 249, 253, 314, 339, 376, 417, 451, 475, 493, 495, 497.
Weiss L., 240.
Wilczimki, 200.
Wilson, 136.
Winkler, 90.
Wintner A., 175, 205.
Woinarovski R., 22.

Xenopol D. A., 273.

Zaharia O. Ioan, 23.
Zaharia M. R., 315.
Zamfirescu Al., 373.
Zamfirescu C. Gr., 23, 373.
Zamfirescu G. I. Maior, 23, 320.
Zamfirescu Ramiro, 57.
Zapan Gh., 23, 305.
Zapan Gr. G-l, 5, 23, 57, 386.
Zarankiewicz K., 371.
Zbigniew Krzwoblocki M., 403.
Zissu I. C., 153.
Zlatcu St. C., 23.
Zottu I., 63, 64.
Zvercu Spiridon, 237.

K. LUCRĂRI CITATE *)

1. Cărţi, Extrase, Teze

		Pag.
N. Abramescu	Geometria analitică	491
Gh. Adamescu	Istoria literaturii române	206
Th. Angheluţă	Algebra superioară	179, 252, 491
Bădulescu I. V.	Table de logaritmi	439
N. Balaban	Călăuză în algebra superioară	439
N. Balaban	Călăuză în aritmetică şi algebra elementară	439
N. Balaban	Călăuză în geometrie	439
N. Balaban	Călăuză în geomtria analitică şi Formular general de Matematică	439
N. Balaban	Călăuză în trigonometrie	439
A. Bârsan	Istoria şcoalelor din Braşov	265

*) In acest capitol nu sunt menţionate lucrările citate la *Bibliografie* şi la *Diverse*, rubrica Sporirea bibliotecii *Gazeta Matematică*.

		Pag.
L. Bianchi	Lezioni di Geometria diff.	394, 395
Bromwich	Infinite series	456
E. Burlacu	Balistica tunurilor cu bătăi mari	32
D. Cantemir	Istoria Imperiului Otoman	240
R. D. Carmichael	Analyse indéterminée	431
N. Cartojan	Istoria literaturii române vechi	273
Cesaro	Analisi algebrica	455
Th. Caronnet	Problèmes de mécaniques	372
C. Coşniţă	Coordonnées barycentriques	342
V. Cristescu	Culegere de probleme de trigonometrie	492, 493
D. Drăgulănescu	Formular de matematici elementare	439
D. Drăgulănescu	Formular de matematici şi calcul II	439
F. G. M.	Exercices de géometrie	220, 269, 290, 293, 405
F. G. M.	Exercices de mécaniques	290, 294
F. G. M.	Exercices de trigonometrie	398
G. E. Filipescu, I. Ionescu, Tr. Lalescu şi G. Ţiţeica	Vocabular matematic	67
A. Fornet	Vom Mehl zum Brot	326
Gazeta Matematică	Volum jubilar	387, 388, 389
N. Georgescu-Roegen	Metoda statistică	235, 236
Gh. Th. Gheorghiu	Probleme de analitică	190
M. Ghermănescu	Algebra superioară	365, 366
M. Ghermănescu	Analiza matematică	365, 365
C. C. Giurescu	Istoria Românilor	404
I. de Hammer	Istoria Imperiului Otoman	240
Helbert	Histoire de l'Empire Ottomann	240
A. Henselin	Rechentafel	372, 387
A. G. Ioachimescu	Culegere de probleme de mecanică	387, 388
A. G. Ioachimescu	Mecanica raţională	297, 372, 387
I. Ionescu	Aritmetica lui LAZARINI	81
I. Ionescu	Aritmetica şi geometria lui GH. LAZĂR	81
I. Ionescu	Beton armat	66, 126, 387, 388
I. Ionescu	Călătoria lui RUGGIERO BOSCOVICH în România veacului al XVII-lea	81
I. Ionescu	Centenarul primei cărţi româneşti de Matematici tipărită în Bucureşti	81
I. Ionescu	Culegere de probleme de aritmetică	155, 434
I. Ionescu	Dobânda în vechile aşezăminte româneşti	81
I. Ionescu	Istoricul învăţământului ingineriei în România.	105
I. Ionescu	Mărgăritare	90
I. Ionescu	Maxime şi minime geometrice	67, 125, 389
I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu, V. Cristescu	Culegere de probleme	66
N. Iorga	Istoria învăţământului românesc	332, 336, 372
M. Kraïtchick	Théorie des nombres	143

		Pag.
T. Lalescu	La géometrie du triangle	372, 388
P. Larousse	Dicţionarul	176
I. Linteş	Teoria indicatorilor	155, 230
G. Loria	Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven	465
E. Lucas	Théorie des nombres	129, 130
V. Marian	Elementele lui EUCLIDE	67, 303
Ch. Michel	Compléments de géometrie moderne	388
N. N. Mihăileanu	Corespondenţa omografică	388
N. N. Mihăileanu	Raportul anarmonic	389
N. N. Mihăileanu	Transformarea prin inversiune	387, 388
N. Milescu	Aritmolozion	372
N. Milescu	Descrierea Chinei	372
N. Milescu	Jurnalul de călătorie	372
Newton	Philosophiae naturalis principia mathematica	67
B. Niewenglowski	Cours d'Algèbre	372, 387, 434
O. Onicescu şi G. Galbură	Algebra	387
Oraşanu C.	Apărare pasivă	426
Oraşanu C.	Astronomia	426
Oraşanu C.	Curs general de construcţii	426
Oraşanu C.	Optica	426
Oraşanu C.	Topografie	426
Al. Pantazi	Elemente de geometria diferenţială proiectivă a curbelor şi suprafeţelor	200
G. Papelier	Exercices de géometrie moderne	410
S. Puşcariu	Istoria literaturii române vechi	273
Elena Rădulescu Pogoneanu	Viaţa lui Alexandri	273, 482
E. Rouché & Ch. de Comberousse	Traité de géometrie	341, 372, 388
L. Schrön	Tables de logarithmes à sept décimales	372, 387
P. Sergescu	Matematica la Românі	372
P. Sergescu	Recherches sur l'infini mathématique à l'établissement du calcul infinitésimal	303
J. A. Serret	Lehrbuch der Differenzial und Integral Rechnung	474
V. Şotropa şi N. Drăgan	Istoria şcoalelor năsăudene	265
Al. Stoenescu	Curs de statică	387
Al. Stoenescu	Probleme de calcul vectorial	388
Al. Stoenescu	Teoria relativităţii	388
P. Tanco	Probleme algebrice	263, 265
J. Tannery	Leçons d'Algèbre et d'Analyse	366
Gabriela Ţiţeica şi Al. Stoenescu	Probleme de calcul vectorial	387
Gabriela Ţiţeica şi Al. Stoenescu	Teoria giroscopului şi aplicaţiunile sale tehnice	389

Pag.

George Ţiţeica . . . . . Culegere de probleme de geometrie . . 202, 416
G. Valiron . . . . . Théorie des fonctions 267
J. Verne . . . . . De la terre à la lune 288
Gh. Vrânceanu . . . . Curs de geometrie analitică 387
A. D. Xenopol . . . . . Istoria Românilor 273

2. Periodice

Actualitée 303
Aghiuţă 137
Almanahul literar 332
American journal for Mathematics 194
Anuarul liceului din Năsăud 263, 265
Anuarul Societăţii de elevi Matematica Bârlădeană 475
Archives Internationalles d'Histoire des Sciences 303
Buletinul cadastral 426
Buletinul Facultăţii de Agronomie, Bucureşti 325
Bulletin des Sciences Mathématiques 129
Bulletin mathématique de la société Roumaine des sicences 45
Bulletin scientifique de l'Ecole Politechnique de Timişoara 465
Buletinul societăţii Politehnice 426, 459
Gazeta Matematică . . 5, 10, 30, 31, 35, 36, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 71, 72, 73, 75, 76, 77, 78, 84, 87, 97, 98, 102, 105, 108, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 117, 121, 122, 124, 125, 126, 127, 135, 137, 139, 140, 143, 155, 161, 162, 167, 172, 173, 174, 181, 193, 196, 201, 202, 203, 208, 210, 213, 215, 216, 222, 223, 225, 231, 233, 234, 238, 239 240, 241, 245, 265, 267, 273, 277, 278, 279, 295, 296, 298, 303, 304, 307, 314, 330, 331, 332, 333, 336, 338, 343, 349, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 372, 373, 376, 377, 385, 386, 387, 388, 397, 398, 399, 409, 411, 417, 425, 432, 433, 434, 443, 444, 460, 461, 465, 475, 476, 479, 481, 496, 500
Gazeta Matematică, Suplimentul cu exerciţii 31, 239, 499
Intermédiaire des mathématiciens 36
Journal de Mathématiques Elémentaires 499
Matematica 304, 305
Mathematische Annalen 197
Mathesis 35, 63, 300, 307
Pozitiva 417
Revista Artileriei 32
Revista Corpului Tehnic militar 32
Revista Matematică din Timişoara 37, 239, 305
Revista Ştiinţifică „V. Adamachi" 201
Revista Universitară Matematică 333
Sciences 45
Technica şi Viaţa 32
The Mathematical Gazette 72
Zeitschrift für die gesamte Getreide 326

L. ERATA

Pagina şi Volumul sau Problema de îndreptat	*Pagina la care se indică îndreptarea de făcut*
Problema 6374	56
Pagina 36	160
Paginele 324, 325 Vol. LII	192
Problema 6403	192
Pagina 160	192
Paginile 163, 176, 178	256
Problema 6426	256
Pagina 220	288
Pagina 226	320
Exerciţiul 11	352
Pagina 288	352
Problema 6458	352
Pagina 24	384
Problema 6468	384
Paginile 435, 452, 454, 459	504

M. SUPLIMENTE

Supliment la Nr. 10. Darea de seamă asupra reuniunii care a încheiat al 38-lea concurs al *Gazetei Matematice* şi Recreaţii matematice 14 pagini.

N. PUBLICAŢIUNI IN AFARĂ DE „GAZETA MATEMATICĂ“

Gazeta Matematică Supliment cu exerciţii. Vol. XIV, 9 numere, 236 pagini.

O. PLANŞE ŞI FOTOGRAFII

Fotografia lui ION IONESCU, între pag. 56 şi pag. 57.
„ „ DR. PAUL TANCO, pag. 262.

CĂTRE DOMNII MEMBRI

ai Societății Gazeta Matematică,

Apariția regulată a revistei *Gazeta Matematică* este funcție numai de contribuția lunară a membrilor societății. Această contribuție este fixată anual de Adunările generale, potrivit statutelor și nevoilor de imprimare. Pentru a asigura continuitatea activității neîntrerupte de 53 de ani, d-nii membri sunt rugați să trimită de urgență o cotizație de 100 (una sută) lei lunar începând din luna Iulie 1948.

Pentru lichidarea restanțelor din cotizațiile mai vechi se vor face propuneri la Adunarea generală din luna August, când se vor fixa și cotizațiile lunare care urmează a se plăti cu începere dela 15 Septembrie 1948.

Având în vedere cheltuielile de francare pentru expediția revistei, s'a hotărât în ședința lunară dela 27 Iulie 1948, ca începând dela 15 Septembrie 1948, revista Gazeta Matematică să nu se mai trimită de cât membrilor la curent cu plata cotizațiilor.

Până la sfârșitul lunii precedente, s'au primit și reținut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Bucur A. N. (6480); *Crăciunescu E.* (P); *Deleanu I. Ar.* (6398, 418); *Enescu G. G.* (6261, 420, 2); *Gross A. Toma* (6416, 83, 5); *Moraite Gh. Al.* (6378, 412, 53); *Nestorescu C. D.* (6458, 68, 83); *Soare V. M.* (6380, 403, P.); *Teodorescu P. P.* (6340, 86, 94, 445, 56, 66, 85, 95, 9, N, P.); *Thébault V* (P.); *Wegener N. E.* (4287, 660, 710, 5027, 567, 6323, 69, 405, 50, 64, 9).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus, de* geometrie, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerație.

Corespondenții cari cer informații sau diverse lămuriri în scris, sunt rugați a însoți cererea și de o carte poștală sau mărci poștale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate, cu preţul de 800 lei volumul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—III, V—X, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia a III-a. Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 270

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 90

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 450

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 130

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 160

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . Lei 450

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . Lei 230

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 90

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.270

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 360

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 180

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 90

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* Lei 230

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Costul abonamentului este de Lei 800

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Octombrie 1948 la 1 Iunie 1949 inclusiv. Costul abonamentului este de. . . . . Lei 360

Abonamentele se pot plăti la cont CEC Nr. 26220 sau pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 12.844.